

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

<http://www.archive.org/details/actamathematica23upps>

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

JOURNAL

HERAUSGEGEBEN

RÉDIGÉ

VON

PAR

030
300

G. MITTAG-LEFFLER

23: 1 & 2

167984.
13/12/21

STOCKHOLM

F. & G. BEIJER,
1899.


BERLIN

MAYER & MÜLLER.
PRINT LOUIS FERNANDINSTRASSE 2.

PARIS

A. HERMANN.
5 rue de la Sorbonne.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.



REDACTION

SVERIGE:

A. V. BÄCKLUND, Lund.
A. LINDSTEDT, Stockholm.
G. MITTAG-LEFFLER, »
E. PHRAGMÉN, »

NORGE:

C. A. BJERKNES, Christiania.
ELLING HOLST, »
S. LIE, Leipzig.
L. SYLOW, Frederikshald.

DANMARK:

J. PETERSEN, Kjöbenhavn.
H. G. ZEUTHEN, »

FINLAND:

L. LINDELÖF, Helsingfors.

SUR LES ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOLIDE ÉLASTIQUE

PAR

IVAR FREDHOLM

à STOCKHOLM.

On connaît le rôle fondamental que joue l'intégrale particulière $\frac{1}{r}$ de l'équation $\Delta u = 0$ dans la théorie du potentiel. On connaît de même des intégrales particulières des équations d'équilibre d'un corps élastique isotrope, qui pour cette partie de la théorie de l'élasticité jouent un rôle tout à fait analogue à celui de la fonction $\frac{1}{r}$ dans la théorie du potentiel. Les dites intégrales particulières ont pour caractère commun la propriété d'être homogènes du degré -1 et d'avoir un seul point singulier réel à distance finie.

Il est naturel de se proposer la question s'il existe des intégrales particulières des équations de l'équilibre d'un corps cristallisé quelconque, jouissant des mêmes propriétés que la fonction $\frac{1}{r}$.

J'espère d'avoir donné une réponse satisfaisante de cette question par les résultats suivants.

Dans le premier chapitre j'ai donné une formule représentant toutes les intégrales homogènes du degré -1 et analytiques, d'une équation aux dérivées partielles et à coefficients constants. En donnant aux éléments arbitraires dans cette formule des valeurs convenables, on trouve que les équations différentielles de la forme $f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)u = 0$, où f est une forme définie, admettent toujours un certain nombre d'intégrales qui sont régulières pour tout système réel des variables, le système $x = y = z = 0$ seul excepté.

A l'aide de ces intégrales je déduis, dans le second chapitre, du théorème connu de BETTI une formule permettant d'exprimer les composantes de déformation à l'intérieur d'un corps, si on se donne ces composantes à la surface ainsi que les forces agissant sur la surface.

La dite formule se compose de trois espèces d'intégrales, parfaitement analogues aux intégrales qui représentent, dans la théorie du potentiel, les potentiels d'une masse étendue à trois dimensions, d'une couche simple et d'une couche double. Dans le troisième chapitre on trouvera une étude de ces intégrales.

Dans le même chapitre j'ai de plus démontré que l'on pourra exprimer toute intégrale homogène de degré négatif entier des équations d'équilibre, qui est régulière pour des valeurs réelles, comme fonction linéaire des dérivées des intégrales régulières du degré -1 . Ensuite j'ai montré quelle est la signification physique des intégrales homogènes du degré -1 , et j'ai résolu le problème d'équilibre d'un milieu élastique infiniment grand, non déformé à l'infini.

CHAPITRE I.

§ 1. *Les solutions homogènes du degré -1 des équations différentielles linéaires à coefficients constants.*

Les fonctions homogènes du degré -1 , satisfaisant à une équation différentielle linéaire homogène et à coefficients constants

$$(1) \quad f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)u = 0,$$

peuvent s'obtenir de l'intégrale particulière

$$u = \frac{1}{\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3},$$

en formant l'expression

$$(2) \quad u = \int \frac{\phi(\xi, \eta) d\xi}{f_2(\xi, \eta)(\xi x_1 + \eta x_2 + x_3)}.$$

Dans cette formule les variables sont liées l'un à l'autre par la relation

$$f(\xi, \eta) = f(\xi, \eta, 1) = 0,$$

$f_2(\xi, \eta)$ désigne la dérivée $\frac{\partial f}{\partial \eta}$, et $\phi(\xi, \eta)$ est une fonction entière rationnelle en η du degré $n-1$, n étant le degré de f , par rapport à ξ elle sera une fonction analytique.

Cela posé, nous faisons sur $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ les hypothèses:

1. que le coefficient de ξ_2^n soit différent de zéro,
2. que les facteurs de f , si elle est réductible, soient tous inégaux.

En vertu de l'hypothèse 1 nous pourrons écrire

$$f(\xi, \eta) = f_0 \eta^n + f_1 \eta^{n-1} + \dots + f_n,$$

où f_0 est certainement différent de zéro. En vertu de la seconde hypothèse les racines $\eta_1 \dots \eta_n$ de l'équation $f(\xi, \eta) = 0$ seront en général inégales.

Substituons maintenant ces racines successivement pour η dans l'expression (2) et faisons la somme des résultats, nous aurons une fonction symétrique des racines η , dont on obtient l'expression en fonction de ξ seul de la manière suivante.

Décomposons en des fractions simples la fonction rationnelle de η

$$\frac{\phi(\xi, \eta)}{f(\xi, \eta)(\xi x_1 + \eta x_2 + x_3)}.$$

Pourvu que la variable ξ ait une valeur telle que les racines η de l'équation $f(\xi, \eta) = 0$ soient tous inégales, on obtient

$$(3) \quad \frac{\phi(\xi, \eta)}{f(\xi, \eta)(\xi x_1 + \eta x_2 + x_3)} = \sum_{\nu=1}^n \frac{\phi(\xi, \eta_\nu)}{f_2(\xi, \eta_\nu)(\xi x_1 + \eta_\nu x_2 + x_3)} \cdot \frac{1}{\eta - \eta_\nu} + \frac{\phi(\xi, \eta_0)}{f(\xi, \eta_0)(\xi x_1 + \eta_0 x_2 + x_3)},$$

où η_0 est déterminé par l'équation $\xi x_1 + \eta_0 x_2 + x_3 = 0$.

Développons maintenant les deux membres de l'équation (3) suivant les puissances négatives de η et écrivons que les coefficients de $\frac{1}{\eta}$ sont égaux, nous aurons l'expression cherchée

$$(4) \quad \sum_{\nu=1}^n \frac{\phi(\xi, \eta_\nu)}{f_2(\xi, \eta_\nu)(\xi x_1 + \eta_\nu x_2 + x_3)} = -\frac{\phi(\xi, \eta_0)}{x_2 f(\xi, \eta_0)}.$$

Posons maintenant

$$\phi(\xi, \eta) = k_1 \eta^{n-1} + k_2 \eta^{n-2} + \dots + k_n,$$

avec les valeurs suivantes des coefficients k :

$$(5) \quad \begin{aligned} k_1 &= f_0 \phi_1, \\ k_2 &= f_1 \phi_1 + f_0 \phi_2, \\ &\dots \dots \dots \\ k_n &= f_{n-1} \phi_1 + f_{n-2} \phi_2 + \dots + f_0 \phi_n, \end{aligned}$$

où les ϕ désignent des fonctions analytiques indéterminées.

En formant maintenant l'intégrale définie

$$(6) \quad u = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\phi(\xi, \eta_0)}{x_2 f(\xi, \eta_0)} d\xi,$$

où le contour fermé C ne doit contenir d'autres points singuliers que les racines de l'équation $f(\xi, \eta_0) = 0$, on obtient une intégrale homogène du degré -1 de l'équation (1), comme cela résulte évidemment de l'équation (4). Nous allons démontrer qu'on pourra choisir les fonctions indéterminées ϕ , de manière que les n premiers coefficients du développement de u suivant les puissances croissantes de x_2 seront égaux aux n coefficients correspondants dans le développement d'une fonction homogène du degré -1 .

En développant la fonction $-\frac{\phi(\xi, \eta)}{x_2 f(\xi, \eta)}$ suivant les puissances décroissantes de η on trouve

$$(7) \quad \frac{\phi(\xi, \eta)}{x_2 f(\xi, \eta)} = -\frac{1}{x_2} \left(\frac{\phi_1}{\eta} + \frac{\phi_2}{\eta^2} + \dots + \frac{\phi_n}{\eta^n} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\phi_{n+\nu}}{\eta^{n+\nu}} \right).$$

Ce développement converge, pourvu qu'on ait donné à η une valeur satisfaisant à l'inégalité $|\eta| > R$, où R désigne la valeur absolue de la plus grande racine en η de l'équation $f(\xi, \eta) = 0$.

Soit $\xi = -\frac{x_3}{x_1}$ un point régulier pour les fonctions $\phi_1(\xi) \dots \phi_n(\xi)$

et choisissons pour contour d'intégration un cercle C avec le point $-\frac{x_3}{x_1}$ comme centre et avec un rayon ρ assez petit pour que C ne contienne aucun point singulier des fonctions ϕ . Supposons cette condition vérifiée si $\rho < \delta$ et posons $\xi = -\frac{x_3}{x_1} + \rho e^{\theta i}$, d'où il vient $\eta_0 = -\frac{x_1}{x_2} \rho e^{\theta i}$.

Parce que les racines de l'équation $f(\xi, \eta_0) = 0$ pour $x_2 = 0$ deviennent tous égales à $-\frac{x_3}{x_1}$, on pourra choisir x_2 assez petit pour que le cercle C contienne toutes ces racines, et qu'en même temps le module de η_0 soit plus grand que R .

Les conditions précédentes étant vérifiées, on pourra intégrer les deux membres de l'équation (7), ce qui nous donne le résultat

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\zeta'(\xi, \eta_0)}{x_2 f(\xi, \eta_0)} d\xi \\ (8) \quad &= \frac{1}{x_1} \zeta'_1 \left(-\frac{x_3}{x_1} \right) - \frac{x_2}{x_1^2} \zeta'_2 \left(-\frac{x_3}{x_1} \right) + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x_2^{n-1}}{x_1^n - 1 x_1^n} \zeta'_{n-1} \left(-\frac{x_3}{x_1} \right) + \dots \end{aligned}$$

Mais ici le coefficient de x_2^ν : $\frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{1}{x_1^{\nu+1}} \phi_{\nu+1}^{(\nu)} \left(-\frac{x_3}{x_1} \right)$ est une fonction homogène des variables x_3 et x_1 du degré $-(\nu+1)$, qu'on pourra choisir arbitrairement si $\nu \leq n-1$.

Done, la formule (6) nous donne bien toute intégrale homogène du degré -1 de l'équation (1) qui est développable suivant les puissances croissantes de x_2 .

Comme on peut toujours faire un changement linéaire de variables de manière qu'une fonction, de l'espèce considérée ici, soit régulière pour $x_2 = 0$ et que l'hypothèse 1 soit vérifiée en même temps, on peut considérer comme résolu le problème de trouver les intégrales homogènes et analytiques du degré -1 de l'équation (1). Toutefois il reste une restriction, à savoir l'hypothèse 2. Mais il est aisé de voir que cette

restriction n'a aucune importance. Car l'expression (6), satisfaisant identiquement à l'équation (1), ne cesse pas à satisfaire à la même équation, si la fonction $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ par hasard a un facteur multiple. De plus le développement (8) a la même forme encore dans ce cas, et les coefficients des n premiers termes sont des fonctions arbitraires.

La formule (6) est ainsi toujours l'expression de l'intégrale cherchée.

On doit observer que les intégrales, dont nous avons donné l'expression sous forme d'intégrale définie, peuvent se présenter sous une forme débarrassée de tout signe d'intégration. Car, en se servant de l'équation (4), on peut aisément effectuer l'intégration dans la formule (8) et on trouve pour expression de u la somme suivante de résidus

$$(9) \quad u = \sum_{\nu=1}^n \frac{\phi(\xi_\nu, \eta_\nu)}{x_1 f_3(\xi_\nu, \eta_\nu) - x_2 f_1(\xi_\nu, \eta_\nu)},$$

où ξ_ν, η_ν désignent les coordonnées des points d'intersection des lignes

$$f(\xi, \eta) = 0, \quad \xi x_1 + \eta x_2 + x_3 = 0,$$

et f_1 et f_2 sont définies par les formules

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial \xi}, \quad f_2 = \frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

En se servant des coordonnées homogènes ξ_1, ξ_2, ξ_3 à la place de ξ et de η on peut donner à u une forme plus symétrique. Posons $f_\nu = \frac{\partial f}{\partial \xi_\nu}$, il vient

$$u f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = f_1 \xi_1 + f_2 \xi_2 + f_3 \xi_3 = 0.$$

Comme nous avons

$$x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 = 0,$$

on déduit, en introduisant trois constantes k_1, k_2, k_3 ,

$$x_2 f_3 - x_3 f_2 = \frac{\xi_2}{x_2 f_1 - x_1 f_3} = \frac{\xi_3}{x_1 f_2 - x_2 f_1} = \frac{k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + k_3 \xi_3}{k_1, k_2, k_3}.$$

$\left. \begin{array}{l} x_1, x_2, x_3 \\ f_1, f_2, f_3 \end{array} \right\}$

Pour que la dernière expression ne soit pas illusoire, il faut que les k satisfassent à l'inégalité

$$k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + k_3 \xi_3 \neq 0.$$

Par introduction des expressions $\xi = \frac{\xi_1}{\xi_3}$ et $\eta = \frac{\xi_2}{\xi_3}$ on trouve

$$\frac{\psi(\xi, \eta)}{x_1 f_2 - x_2 f_1} = \frac{\xi_3 \xi_3^{n-2} \psi\left(\frac{\xi_1}{\xi_3}, \frac{\xi_2}{\xi_3}\right)}{x_1 f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - x_2 f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \\ - \frac{\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)(k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + k_3 \xi_3)}{k_1, k_2, k_3} \Big| \frac{x_1, x_2, x_3}{f_1, f_2, f_3},$$

où l'on a désigné par $\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ la fonction homogène du degré $n-2$ $\xi_3^{n-2} \psi\left(\frac{\xi_1}{\xi_3}, \frac{\xi_2}{\xi_3}\right)$. L'expression de u à l'aide des coordonnées homogènes devient donc

$$(10) \quad u = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\psi(\xi_1^\alpha, \xi_2^\alpha, \xi_3^\alpha)(k_1 \xi_1^\alpha + k_2 \xi_2^\alpha + k_3 \xi_3^\alpha)}{k_1, k_2, k_3} \Big| \frac{x_1^\alpha, x_2^\alpha, x_3^\alpha}{f_1^\alpha, f_2^\alpha, f_3^\alpha},$$

$\xi_1^\alpha, \xi_2^\alpha, \xi_3^\alpha$ étant les coordonnées des points d'intersection des lignes

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0, \quad x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 = 0,$$

et $f_\alpha^\alpha = f_\alpha(\xi_1^\alpha, \xi_2^\alpha, \xi_3^\alpha)$.

Afin d'obtenir une expression symétrique de u en forme d'intégrale définie il convient d'exprimer la variable ξ dans la formule (6) par une variable auxiliaire s de la manière suivante.

Définissons ξ_1, ξ_2 et ξ_3 en fonction de s par l'équation

$$(11) \quad k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + k_3 \xi_3 = \Big| \begin{array}{ccc} k_1 & , & k_2 & , & k_3 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 \\ a_1 s + b_1 & , & a_2 s + b_2 & , & a_3 s + b_3 \end{array} \Big|,$$

qui doit être vérifiée quelles que soient les quantités k_ν .

Nous supposons que les a_ν et les b_ν soient des constantes arbitraires réelles mais indépendantes des k_ν .

Pour $k_\nu = x_\nu$ la formule (11) nous donne

$$x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 = 0.$$

De l'expression $\xi = \frac{\xi_1}{\xi_3}$ il vient $\eta_0 = \frac{\xi_2}{\xi_3}$ et

$$d\xi = \frac{\xi_3 d\xi_1 - \xi_1 d\xi_3}{\xi_3^2},$$

expression qui prend, après un calcul facile, la forme

$$d\xi = -\frac{x_2}{\xi_3^2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} ds,$$

ou, si nous désignons le déterminant par (x, a, b) ,

$$d\xi = -\frac{x_2}{\xi_3^2} (x, a, b) ds.$$

En introduisant ces expressions des ξ, η_0 et $d\xi$ dans la formule (6) on trouve enfin

$$(12) \quad u = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)(a, b, x)}{f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} ds.$$

Par rapport à cette formule nous faisons les remarques suivantes. Le contour C doit contenir du moins une des racines de l'équation $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$. autrement u serait nul.

Supposons qu'on ait fixé un contour d'intégration C . Alors il est clair qu'on pourra faire varier les constantes arbitraires a_ν et b_ν d'une manière continue sans que cela ait aucune influence sur la valeur de u , pourvu que, pendant cette variation, aucun des zéros de $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ne traverse le contour C .

Il est clair qu'on pourra aussi faire varier les x_ν sous la même condition, sans que l'intégrale (12) cesse de représenter la même fonction analytique.

En particulier, supposons que le contour C soit l'axe des s réelles et que f soit une forme définie. Alors deux systèmes de valeurs des constantes a_ν , b_ν donnent la même valeur à u , si on peut passer de l'un système à l'autre par variation continue, sans rencontrer de système pour lequel il y a des racines réelles de l'équation $f=0$. Mais s'il y a une racine réelle en s de l'équation $f=0$, les valeurs correspondantes des ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 seront $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$; dans ce cas l'équation (11) nous donne, en y posant $k_\nu = a_\nu$,

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 = (a, b, x) = 0.$$

La condition $(a, b, x) = 0$ est ainsi nécessaire pour que $f=0$ ait une racine réelle en s .

En supposant de plus que $\psi(-x_1, -x_2, -x_3) = \psi(x_1, x_2, x_3)$, cherchons quelle sera la valeur de $u(x_1, x_2, x_3)$, quand on change le signe des variables x_1, x_2, x_3 . Parce qu'on ne peut passer du point (x_1, x_2, x_3) au point $(-x_1, -x_2, -x_3)$ sans rencontrer des valeurs pour lesquelles on a $(a, b, x) = 0$, il est nécessaire de faire varier les quantités a_ν, b_ν en même temps que les x_ν . Supposons par exemple que les valeurs des quantités a_ν, b_ν soient telles que (a, b, x) conserve la valeur 1 pendant que (x_1, x_2, x_3) passe du point (x_1, x_2, x_3) au point $(-x_1, -x_2, -x_3)$. Comme alors les fonctions ψ et f ne changent pas de signe, on aura

$$u(-x_1, -x_2, -x_3) = u(x_1, x_2, x_3).$$

§ 2. Le cas où $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ est une forme définie.

Supposons que la forme $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ soit une forme définie, c'est à dire que l'équation

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$$

n'admette pas de solution réelle autre que la solution évidente

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0.$$

Nous allons démontrer, dans ce cas, qu'il se trouve parmi les intégrales homogènes du degré -1 un certain nombre jouissant de la propriété

d'être holomorphes dans le voisinage de tout point réel, l'origine seulement excepté.

Les fonctions considérées ici étant homogènes, il suffit de démontrer que nos fonctions sont régulières pour toutes les valeurs réelles satisfaisant à la condition

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

De l'équation (11) on tire, en donnant aux quantités k_1, k_2, k_3 les valeurs a_1, a_2, a_3 ,

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 = (a, b, x),$$

d'où l'on conclut que la distance du point ξ_1, ξ_2, ξ_3 à l'origine n'est jamais moindre que

$$r = \frac{(a, b, x)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Supposons, ce qui est toujours possible, les nombres a, b , choisis de manière que r soit plus grand qu'une quantité donnée différente de zéro, soit d . En appelant μ le minimum de $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ pour les valeurs réelles satisfaisant à l'équation

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1,$$

on peut affirmer que le minimum de $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ pour des valeurs réelles de s n'est pas moindre que μd^n .

Alors l'équation $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ n'admet aucune racine réelle en s . De plus, le coefficient de s^n dans cette équation étant

$$f \left(\begin{array}{cc} x_2 & x_1 \\ a_2 & a_1 \end{array}, \begin{array}{cc} x_3 & x_1 \\ a_3 & a_1 \end{array}, \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ a_1 & a_2 \end{array} \right),$$

on pourra toujours choisir a_1, a_2, a_3 de manière que ce coefficient sera en valeur absolue plus grand qu'une quantité positive donnée, soit A . Les autres coefficients étant toujours finis, il est clair qu'on pourra décrire du point $s=0$ comme centre un cercle C avec un rayon ρ indépendant de x_1, x_2, x_3 et assez grand pour que toutes les racines en s de l'équation $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ soient intérieures à C .

Prenons maintenant pour contour d'intégration dans la formule (12) un demi-cercle C_1 avec le rayon ρ_1 plus grand que ρ ayant le diamètre

sur l'axe des s réelles et l'origine pour centre. Alors je dis que la fonction $u(x_1, x_2, x_3)$ définie par l'équation

$$u = \int_{C_1} \frac{\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)(a, b, x)}{f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} ds,$$

où ψ désigne une fonction entière rationnelle et homogène du degré $n-2$, n'aura pas de singularités réelles.

On voit maintenant que la valeur absolue de $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, quand s parcourt la partie curviligne de C_1 , ne descend jamais au dessous de la quantité $A(\rho_1 - \rho)^n$. Soit m le plus petit des nombres μd^n et $A(\rho_1 - \rho)^n$; alors m est une limite inférieure des valeurs absolues que prend $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ quand s décrit le contour C_1 . Cela posé, on peut trouver deux nombres h et $m_1 < m$ de manière que l'inégalité

$$|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3, s) - f(x_1, x_2, x_3, s)| \leq m_1$$

soit vérifiée pour tous les h_ν satisfaisant aux inégalités

$$(13) \quad |h_\nu| < h. \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

Dans l'inégalité précédente on a désigné $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ par $f(x_1, x_2, x_3, s)$.

Maintenant il est facile de voir que le développement de $\frac{(a, b, x)\psi}{f}$ suivant les puissances croissantes des h_ν converge pour tous les h_ν satisfaisant aux inégalités (13). Posons

$$(14) \quad \frac{(a, b, x)\psi}{f} = \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \phi_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} h_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2} h_3^{\lambda_3},$$

et soit G une limite supérieure des valeurs de $(a, b, x)\psi$ pour les valeurs des variables considérées. Nous avons montré que la valeur absolue de $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3)$ n'est pas moindre que $m - m_1$, par suite on trouve

$$|\phi_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}| < \frac{G}{m - m_1} \frac{1}{h^{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}}.$$

Le développement (14) étant ainsi uniformément convergent, on a le droit d'écrire

$$(15) \quad u = \int_{C_1} \frac{(a, b, x)\psi}{f} ds = \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} h_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2} h_3^{\lambda_3} \int_{C_1} \phi_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} ds.$$

Il s'en suit que la fonction u est développable dans le voisinage d'un point réel quelconque x_1, x_2, x_3 satisfaisant à l'équation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ et que ce développement converge pour tous les h_ν qui sont moindres que h . Soit ce développement

$$u = \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} u_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} h_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2} h_3^{\lambda_3},$$

le développement de u autour d'un point x_1, x_2, x_3 satisfaisant à l'égalité $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ s'écrit

$$(16) \quad u = \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \frac{u_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}}{r^{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}} h_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2} h_3^{\lambda_3}$$

et converge par suite, si les h_ν satisfont à l'inégalité

$$(17) \quad |h_\nu| < h \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

et a fortiori si $\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} < h \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Il importe d'observer que le développement (16) est aussi uniformément convergent, si on le considère comme fonction des variables réelles x_1, x_2, x_3 assujetties à la condition

$$\frac{1}{h} \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} < \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

car dans ce cas encore chaque terme du développement de u est inférieur en valeur absolue au terme correspondant d'une série convergente dont les termes sont indépendants des termes dans le développement de u .

§ 3. Application à un système d'équations différentielles.

Dans la suite nous aurons en particulier besoin des intégrales homogènes du degré -1 de deux systèmes d'équations différentielles, à savoir

$$(18 \text{ a}) \quad \sum_{\mu=1}^3 \Delta_{\mu\lambda} u_\mu = 0, \quad (18 \text{ b}) \quad \sum_{\lambda=1}^3 \Delta_{\lambda\mu} v_\lambda = 0.$$

où les $\Delta_{\lambda\mu}$ désignent des symboles d'opération de la forme

$$\Delta_{\lambda\mu} = \sum_{\alpha, \beta} \left(\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta} \right) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

où $\left(\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta} \right)$ désigne un coefficient constant.

Nous aurons les intégrales cherchées de la manière suivante. Éliminons soit entre les équations (18 a) ou (18 b) deux des inconnues, nous obtenons une équation différentielle qui peut s'écrire sous forme symbolique

$$\begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{vmatrix} v = 0.$$

Cette équation différentielle est linéaire, homogène du sixième ordre et à coefficients constants. Appelons f la fonction qu'on obtient en remplaçant dans le déterminant les signes d'opération $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$ par des variables ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

D'après ce qui précède les intégrales cherchées seront représentées par les formules

$$(19) \quad v_a = \frac{1}{\pi} \int_C \frac{(a, b, x) \phi_a}{f} ds = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^6 \int_C \frac{\phi'_a(\xi, \eta_\nu) d\xi}{f_a(\xi, \eta_\nu)(\xi x_1 + \eta_\nu x_2 + x_3)},$$

où il ne s'agit que de déterminer les fonctions ϕ .

En introduisant les expressions (19) dans les équations (18 b), on trouve

$$\sum_{\nu=1}^6 \int_C \frac{\Delta_{1\nu}^\nu \phi'_1 + \Delta_{2\nu}^\nu \phi'_2 + \Delta_{3\nu}^\nu \phi'_3}{f_a(\xi, \eta_\nu)(\xi x_1 + \eta_\nu x_2 + x_3)^3} d\xi = 0, \quad (\mu = 1, 2, 3)$$

où les $\Delta_{\lambda\mu}^\nu$ désignent les fonctions qu'on obtient en remplaçant dans les $\Delta_{\lambda\mu}$ $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$ par $\xi, \eta_\nu, 1$ respectivement.

On voit qu'on satisfait aux équations précédentes en prenant pour les ϕ des fonctions du quatrième degré dépendant de trois constantes arbitraires et définies par les formules

$$\phi_1 = \begin{vmatrix} k_1 & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ k_2 & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ k_3 & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{vmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & k_1 & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & k_2 & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & k_3 & \Delta_{33} \end{vmatrix}, \quad \phi_3 = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & k_1 \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & k_2 \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & k_3 \end{vmatrix}.$$

Prenons enfin pour contour d'intégration C le demi-cercle défini dans le numéro précédent, les formules (19) représenteront des intégrales du système (18 b) dont le seul point singulier réel à distance finie est le point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Désignons par $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ les intégrales ainsi obtenues. Maintenant on aura immédiatement les intégrales analogues du système (18 a) en échangeant entre eux dans les expressions des ϕ les indices des Δ . Appelons ces intégrales $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Il résulte de la formule (10) § 1 que ces intégrales α et β sont des fonctions algébriques.

CHAPITRE II.

La méthode de Green.

§ 1. Démonstration d'un théorème fondamental.

Considérons un corps élastique quelconque. Soient u_1, u_2, u_3 les composantes du déplacement d'un point du corps, x_1, x_2, x_3 les coordonnées rectangulaires du même point dans l'état naturel. Alors on sait que le potentiel des forces intérieures s'exprime à l'aide d'une forme quadratique définie des six variables

$$\sigma_{\nu} = \frac{\partial u_{\nu}}{\partial x_{\nu}}, \quad \delta_{\lambda \nu} = \frac{\partial u_{\lambda}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial u_{\nu}}{\partial x_{\lambda}}. \quad (\lambda, \nu = 1, 2, 3)$$

Soit f cette forme, dS l'élément de volume S du corps considéré, le dit potentiel est égal à l'intégrale $\int f dS$, étendue sur le volume S .

En appliquant le principe des vitesses virtuelles on s'imaginee nu autre déformation, dont les composantes seront v_1, v_2, v_3 et on considère l'intégrale $\int \Delta dS$, où Δ est la forme bilinéaire

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial \delta_{11}} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial \delta_{23}} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial \delta_{33}} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \\ + \frac{\partial f}{\partial \delta_{23}} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial f}{\partial \delta_{31}} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial f}{\partial \delta_{12}} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right).$$

La considération de l'intégrale $\int \Delta dS$ nous conduira au théorème fondamental, dont la démonstration fait l'objet de ce paragraphe.

J'observe d'abord que la forme Δ est loin d'être la forme bilinéaire la plus générale qu'on puisse former avec les dérivées premières des fonctions u et v . Cependant, comme les théorèmes que j'ai l'intention de démontrer subsistent encore dans le cas général, je suppose, que Δ soit une forme bilinéaire quelconque des premières dérivées des fonctions $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$. Posons pour abréger

$$u_{\alpha\gamma} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\gamma}, \quad v_{\lambda\alpha} = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\alpha}.$$

Nous exprimons la forme Δ par la formule

$$(2) \quad \Delta = \sum_{\lambda, \mu, \alpha, \beta} \left(\frac{\lambda \mu}{\alpha \beta} \right) v_{\lambda\alpha} u_{\mu\beta}, \quad (\lambda, \mu, \alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

où le symbole $\left(\frac{\lambda \mu}{\alpha \beta} \right)$ désigne une constante et chacun des indices prend les valeurs 1, 2, 3 indépendamment des autres.

Nous supposons que les six fonctions $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ et leurs dérivées des deux premiers ordres soient des fonctions continues dans un certain domaine réel D .

Introduisons des quantités $T_{\lambda\alpha}$ et $\mathfrak{T}_{\mu\beta}$ définies par les formules

$$T_{\lambda\alpha} = \frac{\partial \Delta}{\partial v_{\lambda\alpha}}, \quad \mathfrak{T}_{\mu\beta} = \frac{\partial \Delta}{\partial u_{\mu\beta}}.$$

Prenons dans l'intérieur du domaine D un volume S limité par une surface ω , possédant un plan tangent déterminé en chaque point. Soit $d\omega$ l'élément de ω .

Des identités

$$\Delta = \sum_{\lambda\alpha} T_{\lambda\alpha} v_{\lambda\alpha} = \sum_{\mu\beta} \mathfrak{T}_{\mu\beta} u_{\mu\beta}$$

on déduit maintenant d'une manière bien connue deux expressions de l'intégrale $\int_S \Delta dS$

$$(3) \quad \int_S \Delta dS = \int_{\omega} \sum_{\lambda} v_{\lambda} \sum_{\alpha} T_{\lambda\alpha} \cos(nx_{\alpha}) d\omega - \int_S \sum_{\lambda} v_{\lambda} \sum_{\alpha} \frac{\partial T_{\lambda\alpha}}{\partial x_{\alpha}} dS$$

et

$$\int_{\omega} \sum_{\mu} u_{\mu} \sum_{\beta} \mathfrak{T}_{\mu\beta} \cos(nx_{\beta}) d\omega - \int_S \sum_{\mu} u_{\mu} \sum_{\beta} \frac{\partial \mathfrak{T}_{\mu\beta}}{\partial x_{\beta}} dS,$$

où n désigne la normale extérieure de la surface ω et $\cos(nx_{\alpha})$ ($\alpha = 1, 2, 3$) ses cosinus directeurs.

De l'équation (1) on tire les expressions des $T_{\lambda\alpha}$ et $\mathfrak{T}_{\mu\beta}$

$$(4) \quad \begin{aligned} T_{\lambda\alpha} &= \sum_{\mu\beta} \left(\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta} \right) u_{\mu\beta} = \sum_{\alpha=1}^3 \left[\left(\frac{\lambda\mu}{\alpha 1} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{\lambda\mu}{\alpha 2} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\frac{\lambda\mu}{\alpha 3} \right) \frac{\partial}{\partial x_3} \right] u_{\mu}, \\ \mathfrak{T}_{\mu\beta} &= \sum_{\lambda\alpha} \left(\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta} \right) v_{\lambda\alpha} = \sum_{\lambda=1}^3 \left[\left(\frac{\lambda\mu}{1\beta} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{\lambda\mu}{2\beta} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\frac{\lambda\mu}{3\beta} \right) \frac{\partial}{\partial x_3} \right] v_{\lambda}, \end{aligned}$$

d'où il vient

$$(5) \quad \begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial T_{\lambda\alpha}}{\partial x_{\alpha}} &= \sum_{\alpha\beta\mu} \left(\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta} \right) \frac{\partial^2 u_{\mu}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}}, \\ \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial \mathfrak{T}_{\mu\beta}}{\partial x_{\beta}} &= \sum_{\alpha\beta\lambda} \left(\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta} \right) \frac{\partial^2 v_{\lambda}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}}. \end{aligned}$$

Si l'on introduit maintenant les signes d'opération

$$(6) \quad \begin{aligned} \Delta_{\lambda\mu} &= \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}}, \\ \Delta_{\lambda\mu}^{\alpha} &= \left(\frac{\lambda\mu}{\alpha 1} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{\lambda\mu}{\alpha 2} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\frac{\lambda\mu}{\alpha 3} \right) \frac{\partial}{\partial x_3}, \\ \nabla_{\mu}^{\beta} &= \left(\frac{\lambda\mu}{1\beta} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{\lambda\mu}{2\beta} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\frac{\lambda\mu}{3\beta} \right) \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

on pourra écrire les formules (4) et (5)

$$(8) \quad T_{\lambda\alpha} = \sum_{\mu} \Delta_{\lambda\mu} u_{\mu}, \quad \mathfrak{T}_{\mu\beta} = \sum_{\lambda} \nabla_{\lambda\mu}^{\beta} v_{\lambda},$$

$$(9a) \quad \sum_{\alpha} \frac{\partial T_{\lambda\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = \sum_{\mu} \Delta_{\lambda\mu} u_{\mu},$$

$$(9b) \quad \sum_{\beta} \frac{\partial \mathfrak{T}_{\mu\beta}}{\partial x_{\beta}} = \sum_{\lambda} \Delta_{\lambda\mu} v_{\lambda}.$$

Maintenant je suppose que les fonctions u_{λ} et v_{λ} satisfassent aux systèmes d'équations différentielles

$$(10) \quad \sum_{\mu} \Delta_{\lambda\mu} u_{\mu} = U_{\lambda}, \quad \sum_{\lambda} \Delta_{\lambda\mu} v_{\lambda} = V_{\mu},$$

où les lettres U_{λ} et V_{μ} désignent des fonctions continues et uniformes. En formant maintenant la différence des expressions (3) j'obtiens, en ayant égard aux équations (10), l'équation

$$(11) \quad \int_S \sum_{\rho} (U_{\rho} v_{\rho} - V_{\rho} u_{\rho}) dS \\ = \int_{\omega} \left\{ \sum_{\lambda} v_{\lambda} \sum_{\alpha} T_{\lambda\alpha} \cos(n x_{\alpha}) - \sum_{\lambda} u_{\lambda} \sum_{\alpha} \mathfrak{T}_{\lambda\alpha} \cos(n x_{\alpha}) \right\} d\omega.$$

En posant pour abréger

$$T_{\lambda} = \sum_{\alpha} T_{\lambda\alpha} \cos(n x_{\alpha}), \quad \mathfrak{T}_{\lambda} = \sum_{\alpha} \mathfrak{T}_{\lambda\alpha} \cos(n x_{\alpha}),$$

on peut écrire la formule (11) sous la forme

$$(12) \quad \int_S \sum_{\rho} (U_{\rho} v_{\rho} - V_{\rho} u_{\rho}) dS = \int_{\omega} \sum_{\lambda} (v_{\lambda} T_{\lambda} - u_{\lambda} \mathfrak{T}_{\lambda}) d\omega.$$

Cette formule est l'expression du théorème fondamental, qui pour les systèmes (10) joue le même rôle que le théorème de GREEN pour l'équation de LAPLACE. Dans le cas particulier, où Δ est la variation du potentiel intérieur d'un corps élastique, le théorème fondamental est identique au théorème connu de BETTI.

§ 2. *Application de la méthode de Green aux systèmes*

$$\sum_{\mu} \Delta_{\lambda\mu} u_{\mu} = U_{\lambda}, \quad \sum_{\lambda} \Delta_{\lambda\mu} v_{\lambda} = V_{\mu}.$$

Soient u_1, u_2, u_3 trois fonctions satisfaisant aux équations

$$\sum_{\mu=1}^n \Delta_{\lambda\mu} u_{\mu} = U_{\lambda},$$

et supposons que les conditions de continuité du § 1 soient vérifiées. En prenant pour les fonctions v les fonctions $\beta_{\mu}(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0)$ nous pourrions appliquer la formule (12) du § 1 à condition d'exclure du domaine d'intégration S la partie à l'intérieur d'une surface fermée ω' . Nous supposons que ω' soit une sphère avec le rayon arbitrairement petit r et avec le point $A(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ comme centre. Soient $\sigma_{\lambda\alpha}$ et σ_{λ} les fonctions déduites des fonctions β de la même manière que les quantités $\mathfrak{T}_{\lambda\alpha}$ et \mathfrak{T}_{λ} des fonctions v . Appelons S' le domaine S moins la sphère ω' . Alors l'application de la formule (12) nous donne

$$\begin{aligned} (13) \quad & \int_{\omega} \sum_{\rho} (\beta_{\rho} T_{\rho} - u_{\rho} \sigma_{\rho}) d\omega + \int_{\omega'} \sum_{\rho} (\beta_{\rho} T_{\rho} - u_{\rho} \sigma_{\rho}) d\omega' \\ & = \int_{S'} \sum_{\rho} U_{\rho} \beta_{\rho} dS'. \end{aligned}$$

Faisons maintenant décroître le rayon r , l'intégrale

$$\int_{\omega} \sum_{\rho} \beta_{\rho} T_{\rho} d\omega'$$

converge évidemment vers zéro, parce que les intégrales β_{ρ} sont des fonctions homogènes du degré -1 et T_{ρ} reste finie pour $r = 0$.

Voyons ce que deviendra l'autre partie de l'intégrale appartenant à la sphère ω' . Il suffit de considérer l'intégrale

$$J_1 = \int u_1 (\sigma_{11} \cos(nx_1) + \sigma_{12} \cos(nx_2) + \sigma_{13} \cos(nx_3)) d\omega'$$

où n désigne la normale extérieure au volume S' , c'est à dire la normale intérieure à la sphère ω' . Désignons par $\sigma'_{\alpha\beta}$ la valeur de la fonction

homogène du degré -2 σ_{u_3} sur la surface d'une sphère au rayon 1 concentrique avec ω' , et l'élément de surface de cette sphère par $d\omega_1$. Alors les valeurs de la fonction σ_{u_3} en deux points sur le même rayon, l'un sur ω' et l'autre sur ω , sont liées par la formule

$$\sigma_{u_3} = \frac{1}{r^2} \sigma'_{u_3},$$

et on a de plus

$$d\omega' = r^2 d\omega_1.$$

Ainsi on peut écrire

$$J_1 = \int u_1 (\sigma'_{11} \cos(nx_1) + \sigma'_{12} \cos(nx_2) + \sigma'_{13} \cos(nx_3)) d\omega_1.$$

Dans cette formule u_1 seul dépend de r . Posons $u_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = u_1^0$; à cause de la continuité de u_1 nous pourrions choisir r assez petit pour que $|u_1 - u_1^0|$ soit moindre qu'une quantité arbitrairement petite δ . Soit de plus g la plus grande valeur absolue de la quantité entre les parenthèses dans l'expression de J_1 , il vient

$$\begin{aligned} & \left| J_1 - u_1^0 \int_{\omega_1} (\sigma'_{11} \cos(nx_1) + \sigma'_{12} \cos(nx_2) + \sigma'_{13} \cos(nx_3)) d\omega_1 \right| \\ &= \int_{\omega_1} (u_1 - u_1^0) (\sigma'_{11} \cos(nx_1) + \sigma'_{12} \cos(nx_2) + \sigma'_{13} \cos(nx_3)) d\omega_1 \\ &< \delta g \int d\sigma_1 \\ &< 4\pi \delta g, \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\lim_{r \rightarrow 0} J_1 = u_1^0 \int_{\omega'} \sigma_1 d\omega'.$$

Posons pour abrégé

$$(14) \quad L_\rho = \int_{\omega} \sigma_\rho d\omega,$$

nous aurons

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\omega} \sum_\rho u_\rho \sigma_\rho d\omega = L_1 u_1^0 + L_2 u_2^0 + L_3 u_3^0.$$

L'intégrale dans le second membre de l'équation (13) conserve évidem-

ment une valeur finie, quand nous faisons tendre r vers zéro, car, en désignant par G et g les limites supérieures des $|U_\rho|$ et $|r\beta_\rho|$, nous aurons

$$\left| \int_S \sum_\rho U_\rho \beta_\rho dS' \right| < Gg \int_S \frac{dS'}{r}.$$

Mais on sait que l'intégrale dans le second membre conserve une valeur finie, quelque petit que soit r . Par conséquent il est loisible d'écrire

$$\lim_{r=0} \int_S \sum_\rho U_\rho \beta_\rho dS' = \int_S \sum_\rho U_\rho \beta_\rho dS.$$

Le résultat des tous ces passages à la limite s'exprime par la formule

$$(15) \quad L_1 u_1^0 + L_2 u_2^0 + L_3 u_3^0 = \int_{\omega} \sum_\rho (\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\omega - \int_S \sum_\rho U_\rho \beta_\rho dS.$$

De même on obtient une formule analogue pour les fonctions v_μ , satisfaisant au système adjoint

$$\sum_\mu \Delta_{\mu\lambda} v_\mu = V_\lambda.$$

En désignant par τ_ρ la quantité analogue à σ_ρ déduite des intégrales α , et par M_ρ l'intégrale

$$M_\rho = \int_{\omega'} \tau_\rho d\omega', \quad (\rho = 1, 2, 3)$$

la formule s'écrit

$$(16) \quad M_1 v_1^0 + M_2 v_2^0 + M_3 v_3^0 = \int_{\omega} \sum_\rho (\alpha_\rho \mathfrak{T}_\rho - v_\rho \tau_\rho) d\omega - \int_S \sum_\rho V_\rho \alpha_\rho dS.$$

Envisageons de plus le cas où le point $A(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ est situé à la surface ω , et supposons que la surface ω ait en A un plan tangent déterminé. Décirivons à cet effet, de A comme centre, la sphère ω' et appelons ν la partie de ω qui est à l'extérieur de la sphère ω' . Soit S' la partie de S qui est à l'extérieur de la sphère ω' . Appliquons le théorème de réciprocité au volume S' , nous aurons, en appelant ω' la partie de la surface sphérique ω' qui est à l'intérieur de S :

$$\begin{aligned} & \int_{\nu} \sum_\rho (\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\omega' + \int_{\omega'} \sum_\rho (\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\nu \\ &= \int_{S'} \sum_\rho u_\rho \beta_\rho dS'. \end{aligned}$$

On démontre, comme dans ce qui précède, que la limite de l'intégrale dans le second membre pour $r = 0$ est une quantité finie. De même on trouve la limite de la première intégrale

$$\lim_{r=0} \int_{\omega'} (\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\omega' = -u_1^0 \int_{\omega'} \sigma_1 d\omega' - u_2^0 \int_{\omega'} \sigma_2 d\omega' - u_3^0 \int_{\omega'} \sigma_3 d\omega',$$

où les intégrales dans le second membre doivent être étendues à la partie de la surface sphérique ω' qui est du côté intérieur du plan tangent à ω au point A — le côté intérieur du plan tangent étant celui de la normale intérieure. Parce que les σ_ρ sont des fonctions paires quantités il s'en suit que la valeur de $\int \sigma_\rho d\omega'$ est égale à $\frac{1}{2} L_\rho$. On démontre aussi que la limite de l'intégrale

$$\int_v \Sigma_\rho (\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) dv$$

pour $r = 0$ est une quantité finie. Cette limite peut donc être exprimée par l'intégrale

$$\int_{\omega} \Sigma_\rho (\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\omega.$$

Nous sommes ainsi conduits à la formule

$$L_1 u_1^0 + L_2 u_2^0 + L_3 u_3^0 = 2 \int_{\omega} \Sigma_\rho (\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\omega - 2 \int_S \Sigma_\rho U_\rho \beta_\rho dS,$$

et de même à la formule analogue

$$M_1 v_1^0 + M_2 v_2^0 + M_3 v_3^0 = 2 \int_{\omega} \Sigma_\rho (\alpha_\rho \mathfrak{T}_\rho - v_\rho \tau_\rho) d\omega - 2 \int_S \Sigma V_\rho \alpha_\rho dS.$$

Enfin, si A est un point à l'extérieur du volume S je rappelle qu'on a

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \Sigma_\rho (\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\omega - \int_S \Sigma_\rho U_\rho \beta_\rho dS &= 0, \\ \int_{\omega} \Sigma_\rho (\alpha_\rho \mathfrak{T}_\rho - v_\rho \tau_\rho) d\omega - \int_S \Sigma_\rho V_\rho \alpha_\rho dS &= 0, \end{aligned}$$

car en ce cas aucun point singulier ne se trouve à l'intérieur de ω .

Dans le paragraphe suivant nous allons calculer les valeurs des coefficients L et M . Comme il en résultera que ces coefficients sont différents de zéro, les formules (15) et (16) permettent de calculer les valeurs des fonctions u et v dans l'intérieur d'un volume S , si nous connaissons les valeurs de ces fonctions et de certaines fonctions linéaires de leurs premières dérivées pour les points (x_1, x_2, x_3) appartenant à la surface ω .

En particulier ces formules s'appliquent à la théorie de l'équilibre d'un corps élastique cristallisé quelconque. Dans ce cas les quantités T_ρ désignent les composantes de pression à la surface du corps considéré. Nous reviendrons dans le dernier chapitre à cette application.

§ 3. Calcul des coefficients L et M .

Nous avons défini le coefficient L_ρ par la formule

$$L_\rho = \int_{\omega} \sigma_\rho d\omega,$$

où l'intégrale doit être étendue sur une certaine surface sphérique ω . En prenant cependant pour les fonctions u_λ des valeurs constantes, l'application de la formule (15) § 2 nous apprend que L_ρ est indépendant de la forme spéciale de la surface d'intégration, de sorte que ω peut être une surface fermée quelconque contenant l'origine, pourvu que par une déformation continue, elle puisse se ramener à la sphère ω . Prenons en particulier pour ω un cylindre C parallèle à l'axe des x_1 et dont les bases aient pour équations $x_1 = a$ et $x_1 = -a$. En appelant ds l'élément linéaire de l'intersection du cylindre C avec le plan des x_2, x_3 , on pourra écrire l'expression de L_ρ

$$L_\rho = \int_s \int_{-a}^{+a} \sigma_\rho ds dx_1 + B,$$

où B est la somme des deux intégrales étendues sur les bases de C . Mais en appelant A l'aire du base et en désignant par σ_0 la plus grande valeur absolue de σ_ρ quand x_1 est égal à l'unité on a

$$|B| < \frac{2A\sigma_0}{a^2}.$$

Il s'en suit que $\lim B = 0$ pour a infini. Par suite on pourra écrire

$$L_\rho = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_a^{+a} \int_{-a}^a \sigma_\rho ds dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-a}^a \sigma_\rho ds dx_1.$$

Mais il est clair qu'on pourra choisir une quantité positive a_0 telle que les deux intégrales

$$\int_a^\infty \sigma_\rho dx_1, \quad \int_{-\infty}^{-a} \sigma_\rho dx_1$$

aient des valeurs moindres qu'une quantité arbitrairement petite si a est positive et plus grande que a_0 . Il s'en suit que l'on a le droit d'intervertir l'ordre des intégrations dans la formule pour L_ρ . Calculons d'abord l'intégrale

$$J(a) = \int_{-a}^{+a} \sigma_\rho dx_1.$$

Si nous supposons pour le moment que x_2 ait une valeur positive, nous pouvons employer l'expression de β_ν que nous avons donné dans le chapitre I, § 3 :

$$\beta_\nu = \frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^6 \frac{\psi_\nu(\xi, \eta_a) d\xi}{f_2(\xi, \eta_a)(\xi x_1 + \eta_a x_2 + x_3)},$$

où le contour C ne doit contenir que ceux des zéros de $\xi x_1 + \eta_a x_2 + x_3$ dont la partie imaginaire est positive. De cette expression de β_ν on déduit l'expression suivante de $\sigma_{\rho\nu}$ (voir § 1 form. (8))

$$(1) \quad \sigma_{\rho\nu} = -\frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^6 \frac{\Delta_{1\rho}^\nu \psi_1 + \Delta_{2\rho}^\nu \psi_2 + \Delta_{3\rho}^\nu \psi_3}{f_2(\xi, \eta_a)(\xi x_1 + \eta_a x_2 + x_3)^2} d\xi,$$

où les expressions $\Delta_{\rho\sigma}^\nu$ désignent les fonctions linéaires en ξ et η qu'on obtient en remplaçant dans les expressions (7) § 1 les signes $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2}$, $\frac{\partial}{\partial x_3}$ respectivement par ξ , η_a et 1.

Nous aurons par suite pour l'intégrale J une expression de la forme

$$(2) \quad J(a) = -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \int_C \sum_1^6 \frac{A_2^a \cos(nx_2) + A_3^a \cos(nx_3)}{f_2(\xi, \eta_a)(\xi x_1 + \eta_a x_2 + x_3)^2} d\xi dx_1.$$

Désignons pour abréger $A_2^a \cos(n, x_2) + A_3^a \cos(n, x_3)$ par $\Phi(\xi, \eta_a)$, nous aurons en exécutant l'intégration par rapport à x_1 — ce qui est évidemment loisible —

$$J(a) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{C}} \sum_1^6 \frac{2a \Phi(\xi, \eta_a) d\xi}{a f_2(\xi, \eta_a)(a\xi + \eta_a x_2 + x_3)(-a\xi + \eta_a x_2 + x_3)}.$$

Mais dans cette formule il est aisé à effectuer l'intégration, ce qui nous donne le résultat

$$J(a) = i \sum_{\nu} \frac{4a \Phi(\xi_{\nu}, \eta_{\nu}) d\xi}{\left(a \frac{\partial f}{\partial \eta_{\nu}} - x_2 \frac{\partial f}{\partial \xi_{\nu}}\right)(-a\xi_{\nu} + \eta_{\nu} x_2 + x_3)} \\ + i \sum_{\nu} \frac{4a \Phi(\xi'_{\nu}, \eta'_{\nu})}{\left(-a \frac{\partial f}{\partial \eta'_{\nu}} - x_2 \frac{\partial f}{\partial \xi'_{\nu}}\right)(a\xi'_{\nu} + \eta'_{\nu} x_2 + x_3)},$$

où l'on doit donner aux ξ_{ν}, η_{ν} les valeurs satisfaisant aux équations

$$f(\xi, \eta) = 0, \quad a\xi + \eta x_2 + x_3 = 0$$

et aux ξ'_{ν}, η'_{ν} les valeurs satisfaisant aux équations

$$f(\xi', \eta') = 0, \quad -a\xi' + \eta' x_2 + x_3 = 0;$$

dans les deux cas ξ et ξ' doivent avoir ses parties imaginaires positives. A l'aide de ces équations linéaires on peut écrire l'expression de $J(a)$ comme il suit

$$J(a) = 2i \sum_{\nu} \frac{a \Phi(\xi_{\nu}, \eta_{\nu})}{\left(a \frac{\partial f}{\partial \eta_{\nu}} - x_2 \frac{\partial f}{\partial \xi_{\nu}}\right)(\eta_{\nu} x_2 + x_3)} + 2i \sum_{\nu} \frac{a \Phi(\xi'_{\nu}, \eta'_{\nu})}{\left(-a \frac{\partial f}{\partial \eta'_{\nu}} - x_2 \frac{\partial f}{\partial \xi'_{\nu}}\right)(\eta'_{\nu} x_2 + x_3)},$$

et nous aurons à chercher la limite de cette fonction pour $a = \infty$.

Puisque pour $a = \infty$ les lignes droites qui déterminent ξ, ξ', η, η' tendent vers la ligne $\xi = 0$, les valeurs correspondantes de η satisfont à l'équation

$$f(0, \eta) = 0.$$

Comme de plus la partie imaginaire de ξ est positive et que nous avons supposé que x_2 est positif, il s'en suit que la partie imaginaire de η doit être négative et la partie imaginaire de η' doit être positive. Ce raisonnement suppose, il est vrai, que les racines de $f(0, \eta) = 0$ soient

finies, mais on pourra toujours par un changement de coordonnées s'arranger de manière que les dites racines soient à la fois finies et inégales. Cela posé, on trouve facilement la limite cherchée

$$\lim_{a \rightarrow \infty} J(a) = 2i \sum_{\nu}^3 \frac{\phi(0, \eta_{\nu})}{\frac{\partial f_{\nu}}{\partial \eta_{\nu}}(\eta_{\nu} x_2 + x_3)} - 2i \sum_{\nu}^3 \frac{\phi(0, \eta_{\nu}')}{\frac{\partial f_{\nu}'}{\partial \eta_{\nu}'}(\eta_{\nu}' x_2 + x_3)}.$$

Mais en introduisant la valeur de ϕ , on trouve

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_p dx_1 &= 2i \sum_{\nu}^3 \frac{A_2 \cos(nx_2) + A_3 \cos(nx_3)}{f_2(0, \eta_{\nu})(\eta_{\nu} x_2 + x_3)} \\ &- 2i \sum_{\nu}^3 \frac{A_2' \cos(nx_2) + A_3' \cos(nx_3)}{f_2'(0, \eta_{\nu}')(\eta_{\nu}' x_2 + x_3)}. \end{aligned}$$

Dans la déduction de cette formule nous avons supposé x_2 plus grand que zéro mais on voit que l'égalité subsiste encore quand x_2 est négative, car σ_p ne change pas de signe si on change les signes de x_2 et x_3 , et le second membre a la même propriété. Nous aurons maintenant à calculer

$$\int_s J(\infty) ds,$$

mais comme la valeur de cette intégrale ne dépend pas de la forme du contour s , on conclut que A_2^{ν} et A_3^{ν} doivent satisfaire aux relations

$$A_2^{\nu} \eta_{\nu} + A_3^{\nu} = 0, \quad A_2^{\nu'} \eta_{\nu}' + A_3^{\nu'} = 0.$$

En tirant A_3^{ν} et $A_3^{\nu'}$ de ces formules et en se rappelant que n désigne la normale intérieure de s , on parvient à la formule

$$L_p = -2i \int \sum_{\nu}^3 \frac{A_2^{\nu}(\eta_{\nu} dx_2 + dx_3)}{f_2(0, \eta_{\nu})(\eta_{\nu} x_2 + x_3)} + 2i \int \sum_{\nu}^3 \frac{A_2^{\nu'}(\eta_{\nu}' dx_2 + dx_3)}{f_2'(0, \eta_{\nu}')(\eta_{\nu}' x_2 + x_3)}.$$

mais ici il est facile d'exécuter les intégrations; on trouve

$$\int \frac{\eta_{\nu} dx_2 + dx_3}{\eta_{\nu} x_2 + x_3} = 2\pi i, \quad \int \frac{\eta_{\nu}' dx_2 + dx_3}{\eta_{\nu}' x_2 + x_3} = -2\pi i,$$

et par suite

$$L_\rho = 4\pi \sum_{a=1}^6 \frac{A_2^a}{f_2(\mathbf{O}, \eta_a)},$$

où l'on doit étendre la sommation à toutes les racines de l'équation $f(\mathbf{O}, \eta) = 0$. Si on observe que la somme dans le second membre n'est autre chose que le coefficient de $\frac{1}{\eta}$ dans le développement de $\frac{A_2}{f(\mathbf{O}, \eta)}$ suivant les puissances décroissantes de η , il est facile de simplifier l'expression de L_ρ . Nous avons en effet (voir form. (1) et (2) ce paragraphe)

$$\begin{aligned} A_2 &= \nabla_{1\rho}^2 \phi_1 + \nabla_{2\rho}^2 \phi_2 + \nabla_{3\rho}^2 \phi_3 \\ &= \nabla_{1\rho}^2 \begin{vmatrix} k_1 & \Delta_{21} & \Delta_{32} \\ k_2 & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ k_3 & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{vmatrix} + \nabla_{2\rho}^2 \begin{vmatrix} \Delta_{11} & k_1 & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & k_2 & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & k_3 & \Delta_{33} \end{vmatrix} + \nabla_{3\rho}^2 \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & k_1 \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & k_2 \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & k_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en se rappelant les formules (6) et (7) § 1, la valeur suivante du coefficient de η^5 dans A_2

$$\begin{aligned} & \left(k_1, \begin{pmatrix} 21 \\ 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 31 \\ 22 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 11 \\ 22 \end{pmatrix}, k_1, \begin{pmatrix} 31 \\ 22 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 11 \\ 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 22 \end{pmatrix}, k_1 \right) \\ & + \left(\begin{pmatrix} 1\rho \\ 22 \end{pmatrix} \right) \left(k_2, \begin{pmatrix} 22 \\ 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 32 \\ 22 \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} 2\rho \\ 22 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 12 \\ 22 \end{pmatrix}, k_2, \begin{pmatrix} 32 \\ 22 \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} 3\rho \\ 22 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 12 \\ 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 22 \\ 22 \end{pmatrix}, k_2 \right), \\ & \left(k_3, \begin{pmatrix} 23 \\ 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 33 \\ 22 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 13 \\ 22 \end{pmatrix}, k_3, \begin{pmatrix} 33 \\ 22 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 13 \\ 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 23 \\ 22 \end{pmatrix}, k_3 \right) \end{aligned}$$

ou plus simplement

$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} 11 \\ 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 31 \\ 22 \end{pmatrix} \right) \\ & = k_1 \left(\begin{pmatrix} 12 \\ 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 22 \\ 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 32 \\ 22 \end{pmatrix} \right), \\ & \left(\begin{pmatrix} 13 \\ 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 23 \\ 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 33 \\ 22 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

mais ici le déterminant qui multiplie k_ρ est égal au coefficient de η^6 dans $f(\mathbf{O}, \eta)$; par conséquent on aura

$$L_\rho = 4\pi k_\rho.$$

Parce que L_ρ ne dépend point des coefficients $\left(\frac{\alpha\beta}{\lambda\mu}\right)$ et comme on aurait obtenu la valeur de M_ρ par le même calcul, en prenant pour point de départ des formules où l'on eût changé $\left(\frac{\alpha\beta}{\lambda\mu}\right)$ en $\left(\frac{\beta\alpha}{\mu\lambda}\right)$, on conclut que la valeur de M_ρ est

$$M_\rho = 4\pi k_\rho.$$

Les formules (15) et (16) du paragraphe précédent prendront par suite la forme

$$(15a) \quad k_1 u_1^0 + k_2 u_2^0 + k_3 u_3^0 = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \sum_{\rho} (T_{\rho} \beta_{\rho} - u_{\rho} \sigma_{\rho}) d\omega - \frac{1}{4\pi} \int_S \sum_{\rho} U_{\rho} \beta_{\rho} dS$$

et

$$(16a) \quad k_1 v_1^0 + k_2 v_2^0 + k_3 v_3^0 = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \sum_{\rho} (\mathfrak{T}_{\rho} \alpha_{\rho} - v_{\rho} \tau_{\rho}) d\omega - \frac{1}{4\pi} \int_S \sum_{\rho} V_{\rho} \alpha_{\rho} dS.$$

Dans le cas où le point (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est un point de la surface ω avec un plan tangent déterminé on a les formules

$$(17a) \quad k_1 u_1^0 + k_2 u_2^0 + k_3 u_3^0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} \sum_{\rho} (T_{\rho} \beta_{\rho} - u_{\rho} \sigma_{\rho}) d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_S \sum_{\rho} U_{\rho} \beta_{\rho} dS,$$

$$(18a) \quad k_1 v_1^0 + k_2 v_2^0 + k_3 v_3^0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} \sum_{\rho} (\mathfrak{T}_{\rho} \alpha_{\rho} - v_{\rho} \tau_{\rho}) d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_S \sum_{\rho} V_{\rho} \alpha_{\rho} dS.$$

CHAPITRE III.

Applications.

§ 1. Application à la théorie de l'équilibre d'un corps solide élastique.

Soit f une forme quadratique définie des six variables

$$\partial_{\nu\nu} = \frac{\partial u_{\nu}}{\partial x_{\nu}}, \quad \partial_{\mu\lambda} = \partial_{\lambda\mu} = \frac{\partial u_{\lambda}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial u_{\mu}}{\partial x_{\lambda}},$$

nous avons déjà rappelé que $\int f dS$ peut représenter le potentiel des forces intérieures d'un corps élastique. Prenons un autre système de variables

$$\varepsilon_{\nu\nu} = \frac{\partial v_\nu}{\partial x_\nu}, \quad \varepsilon_{\lambda\mu} = \varepsilon_{\mu\lambda} = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\mu} + \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\lambda},$$

je rappelle que nous avons (§ 1, chapitre II)

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{11}} \varepsilon_{11} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{22}} \varepsilon_{22} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{33}} \varepsilon_{33} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{23}} \varepsilon_{23} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{31}} \varepsilon_{31} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{12}} \varepsilon_{12} \\ & + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{11}} \partial_{11} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{22}} \partial_{22} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{33}} \partial_{33} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{23}} \partial_{23} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{31}} \partial_{31} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{12}} \partial_{12}. \end{aligned}$$

Il s'en suit que les quantités $T_{\lambda\alpha}$ sont identiques aux composantes de pression qu'on désigne d'ordinaire par $t_{\lambda\alpha}$ (voir p. ex. CLEBSCH, *Theorie d. Elasticität*).

Soient X_1, X_2, X_3 les composantes rectangulaires de la force sollicitant un élément de volume, les composantes de déformation satisfont aux équations

$$\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial t_{\lambda\alpha}}{\partial x_\alpha} = -X_\lambda. \quad (\alpha=1, 2, 3)$$

Mais ces équations sont identiques aux équations différentielles (10) § 1, chapitre II. Cela suffit pour voir les rapports des problèmes traités auparavant avec le problème de l'équilibre d'un corps élastique solide.

Il reste à démontrer que le déterminant des fonctions $\Delta_{\lambda\mu}$ ne peut être nul pour aucun système de valeurs réelles des variables. Dans l'expression de Δ posons $u_\lambda = v_\lambda$, il vient

$$2f = \Delta(u, u).$$

Substituons dans cette équation $u_{\mu\beta} = x_\mu \xi_\beta$, on obtient

$$\begin{aligned} 2f = & \sum_{\lambda, \mu, \alpha, \beta} \left(\frac{\lambda\mu}{a\beta} \right) x_\lambda x_\mu \xi_\alpha \xi_\beta = \sum_{\lambda, \mu} x_\lambda x_\mu \sum_{\alpha, \beta} \left(\frac{\lambda\mu}{a\beta} \right) \xi_\alpha \xi_\beta \\ & = \sum_{\lambda, \mu} \Delta_{\lambda\mu} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) x_\lambda x_\mu. \end{aligned}$$

C'est à dire, si l'on fait dans $2f$ les substitutions

$$\partial_{\nu\nu} = x_\nu \xi_\nu, \quad \partial_{\lambda\mu} = x_\lambda \xi_\mu + x_\mu \xi_\lambda,$$

on obtient une forme quadratique en x_1, x_2, x_3 , dont le déterminant est précisément le déterminant des fonctions $\Delta_{\lambda\mu}$.

Supposons que ce déterminant fût nul pour un système de valeurs réelles des variables, soit $\xi_\nu = \alpha_\nu$, où l'une des quantités α_ν doit être différente de zéro. Alors on pourrait trouver un système de valeurs réelles $x_\nu = a_\nu$, où l'une des quantités a_ν doit être différente de zéro, pour lequel f serait égale à zéro. Mais pour l'évanouissement de f il faut que $\partial_{\nu\nu} = 0$, $\partial_{\lambda\mu} = 0$, ou bien que les équations suivantes soient vérifiées

$$a_\nu \alpha_\nu = 0, \quad a_\lambda \alpha_\mu + a_\mu \alpha_\lambda = 0.$$

Nous pouvons supposer que α_1 soit différent de zéro; il s'en suit que $a_1 = 0$. En substituant cette valeur dans les autres équations, on trouve $a_4 \alpha_1 = 0$, $a_3 \alpha_1 = 0$, d'où l'on conclut que $a_2 = a_3 = 0$, ce qui est contraire à la supposition. Ainsi le déterminant des fonctions $\Delta_{\lambda\mu}$ est différent de zéro pour tout système de valeurs réelles des variables ξ_ν , le système $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ seulement excepté

C. Q. F. D.

§ 2. Développements en série.

Nous avons vu que les fonctions α , et β jouissent de la propriété d'être développables en des séries de puissances dans le voisinage d'un point réelle a_1, a_2, a_3 quelconque, à l'exception seulement du point $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. De plus le développement de $\alpha(a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3 + h_3)$ suivant les puissances des variables h_1, h_2, h_3 converge pour toutes les valeurs de ces variables h satisfaisant à l'inégalité

$$\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} \leq \mu \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

où μ est une quantité positive indépendante des quantités a_ν et h_ν et inférieure à l'unité.

Cela rappelé, supposons que u_1, u_2, u_3 forment un système d'intégrales de équations différentielles (7) chapitre II vérifiant les conditions nécessaires pour l'application du théorème de BERTI dans un domaine limité par deux surfaces sphériques 1 et 2 ayant l'origine pour centre et ρ_1 et ρ_2 pour rayons. Supposons l'inégalité $\frac{\rho_2}{\rho_1} < \mu^2$ remplie, il s'en suit

$$\frac{\rho_2}{\mu} < \rho_1 \mu.$$

Prenons un point x_1, x_2, x_3 situé entre les sphères des rayons $\frac{\rho_2}{\mu}$ et $\rho_1\mu$ et soit ξ_1, ξ_2, ξ_3 un point sur la sphère 2, le développement de

$$\alpha(\xi_1 - x_1, \xi_2 - x_2, \xi_3 - x_3)$$

suivant les puissances des variables ξ_v converge, si

$$\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} < \mu \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

ou, en considérant la série comme fonction de x_1, x_2, x_3 , si

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} > \frac{\rho_2}{\mu}.$$

Soit η_1, η_2, η_3 un point sur la sphère 1, le développement de

$$\alpha(\eta_1 - x_1, \eta_2 - x_2, \eta_3 - x_3)$$

suivant les puissances des variables x_1, x_2, x_3 converge, si

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < \mu\rho_1.$$

Ainsi les deux développements des fonctions

$$\alpha(\eta_1 - x_1, \eta_2 - x_2, \eta_3 - x_3) \quad \text{et} \quad \alpha(\xi_1 - x_1, \xi_2 - x_2, \xi_3 - x_3)$$

ont pour domaine de convergence commun l'espace entre les deux surfaces sphériques des rayons $\frac{\rho_2}{\mu}$ et $\rho_1\mu$.

Ces développements convergent encore dans le même domaine si le point ξ_1, ξ_2, ξ_3 est à l'intérieur de la sphère 2 et le point η_1, η_2, η_3 est à l'extérieur de la sphère 1.

Appliquons maintenant la formule (4) chapitre II aux fonctions u_1, u_2, u_3 . En prenant pour domaine S l'espace entre les deux sphères 1 et 2, nous obtenons en appelant ω_1 et ω_2 les surfaces des deux sphères 1 et 2:

$$\begin{aligned}
 & k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 \\
 = & \frac{1}{4\pi} \int_{\omega_1} \sum_{\rho=1}^3 T_\rho(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \frac{x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} x_3^{\lambda_3} \partial^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \mathcal{P}_\rho(-\gamma_1, -\gamma_2, -\gamma_3)}{|\lambda_1| |\lambda_2| |\lambda_3| \partial \gamma_1^{\lambda_1} \partial \gamma_2^{\lambda_2} \partial \gamma_3^{\lambda_3}} d\omega_1 \\
 & - \frac{1}{4\pi} \int_{\omega_1} \sum_{\rho=1}^3 u_\rho(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \frac{x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} x_3^{\lambda_3} \partial^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \sigma_\rho(-\gamma_1, -\gamma_2, -\gamma_3)}{\partial \gamma_1^{\lambda_1} \partial \gamma_2^{\lambda_2} \partial \gamma_3^{\lambda_3}} d\omega_1 \\
 & + \frac{1}{4\pi} \int_{\omega_2} \sum_{\rho=1}^3 T_\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} (-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \frac{\xi_1^{\lambda_1} \xi_2^{\lambda_2} \xi_3^{\lambda_3} \partial^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \mathcal{P}_\rho(x_1, x_2, x_3)}{|\lambda_1| |\lambda_2| |\lambda_3| \partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2} \partial x_3^{\lambda_3}} d\omega_2 \\
 & - \frac{1}{4\pi} \int_{\omega_2} \sum_{\rho=1}^3 u_\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} (-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \frac{\xi_1^{\lambda_1} \xi_2^{\lambda_2} \xi_3^{\lambda_3} \partial^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \sigma_\rho(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2} \partial x_3^{\lambda_3}} d\omega_2.
 \end{aligned}$$

Mais de la convergence uniforme des séries il suit qu'on en pourra effectuer l'intégration en intégrant chaque terme; on obtient ainsi un développement de l'expression $k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3$, valable dans l'espace entre les deux sphères des rayons $\frac{\rho_2}{\mu'}$ et $\rho_1 \mu$. Ce développement consiste en deux parties dont l'une est une série de puissances et l'autre est une série dont les termes sont les dérivées partielles des fonctions β_ν . La première de ces parties converge à l'intérieur de la sphère de rayon $\mu \rho_1$ et la seconde à l'extérieur de la sphère de rayon $\frac{\rho_2}{\mu'}$.

Considérons maintenant le développements de quelques fonctions spéciales. Supposons d'abord que u_1, u_2, u_3 désignent les fonctions homogènes du degré entier négatif $-n$ et vérifiant les conditions nécessaires de continuité dans toute l'espace à l'exception de l'origine. Quand le rayon ρ_1 tend vers l'infini les deux premières intégrales tendent évidemment vers zéro. Des autres termes il ne reste que ceux qui sont homogènes du degré $-n$, de sorte qu'on obtient

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \sum_{\rho=1}^3 \left(\sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} A_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}^\rho \frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \mathcal{P}_\rho(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2} \partial x_3^{\lambda_3}} - \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} B_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}^\rho \frac{\partial^{\mu_1+\mu_2+\mu_3} \sigma_\rho(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^{\mu_1} \partial x_2^{\mu_2} \partial x_3^{\mu_3}} \right)$$

où les valeurs $A_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}^p$ et $B_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}^q$ sont des coefficients constants et les indices doivent satisfaire aux conditions

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = n - 1, \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = n - 2. \end{cases}$$

Supposons en particulier que n soit égal à l'unité il vient

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = A_1 \beta_1 + A_2 \beta_2 + A_3 \beta_3.$$

De plus nous savons que les fonctions β dépendent linéairement des constantes k de sorte qu'on peut écrire

$$\beta_p = k_1 \beta_{p1} + k_2 \beta_{p2} + k_3 \beta_{p3},$$

d'où résultent pour les fonctions u les expressions

$$u_\nu = A_1 \beta_{2\nu} + A_2 \beta_{2\nu} + A_3 \beta_{3\nu}. \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

Posons dans ces formules $u_\nu = \alpha_\nu$ nous obtenons, en observant que dans ce cas $A_p = k$

$$\alpha_\nu = k_1 \beta_{1\nu} + k_2 \beta_{2\nu} + k_3 \beta_{3\nu}. \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

On déduit de cette formule, en égalant les coefficients des constantes k , et en posant

$$\alpha_\nu = k_1 \alpha_{\nu 1} + k_2 \alpha_{\nu 2} + k_3 \alpha_{\nu 3},$$

la relation

$$\alpha_{\mu\nu} = \beta_{\nu\mu},$$

à l'aide de laquelle on pourra écrire l'expression des fonctions u de la manière suivante

$$u_\nu = A_1 \alpha_{\nu 1} + A_2 \alpha_{\nu 2} + A_3 \alpha_{\nu 3}. \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

Il résulte de cette formule que les fonctions α_ν sont les seules intégrales homogènes du degré -1 des équations (7) § 2 ayant la propriété d'être uniformes et continues ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres pour toutes les valeurs réelles des variables.

§ 3. Des propriétés des intégrales dans les formules fondamentales.

Dans la formule fondamentale (15) chapitre II nous avons désigné par T_ρ certaines fonctions linéaires des premières dérivées des fonctions u_1, u_2, u_3 . Laissons maintenant de côté cette définition des quantités T_ρ et supposons seulement qu'elles soient des fonctions finies et en général continues des paramètres qui fixent la position d'un point sur la surface ω .

Soient x_1, x_2, x_3 les coordonnées d'un point réel A d'ailleurs quelconque, et ξ_1, ξ_2, ξ_3 les coordonnées d'un point A' sur la surface ω .

Considérons l'intégrale

$$(1) \quad \varphi = k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2 + k_3 \varphi_3 = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \sum_{\rho} T_{\rho} \beta_{\rho} d\omega;$$

montrons que φ est une fonction continue pour tout système de valeurs réelles de x_1, x_2, x_3 . Comme il résulte immédiatement de ce que nous avons dit dans le paragraphe précédent que φ est continue pour des points extérieurs à ω , prenons un point A sur ω .

Décrivons de A comme centre une sphère s de rayon ε ; soit φ_0 la partie de l'intégrale φ étendue sur la partie ω_0 de ω intérieure à s et désignons par φ' le reste $\varphi - \varphi_0$. Alors φ' est une fonction continue en A . Mais nous savons qu'on peut déterminer une quantité finie et positive g de manière que

$$|\beta_{\rho}| < \frac{g}{r},$$

r étant la distance AA' . Soit de plus G une limite supérieure des fonctions T_{ρ} , on a

$$|\varphi_0| < \frac{3}{4\pi} G \cdot g \int_{\omega_0} \frac{d\omega}{r}.$$

Mais on connaît des éléments de la théorie du potentiel que la valeur de l'intégrale dans cette inégalité converge vers zéro avec le rayon ε . Donc, on peut déterminer ε assez petit pour que la différence de deux valeurs de φ_0 en des points intérieurs à s soit moindre qu'une quantité arbitrairement petite, d'où résulte bien que $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$ est une fonction continue en A .

Passons maintenant à l'intégrale

$$\vartheta = k_1 \vartheta_1 + k_2 \vartheta_2 + k_3 \vartheta_3 = \frac{1}{4\pi} \int_S \sum_{\rho} U_{\rho} \beta_{\rho} dS$$

où U_{ρ} est une fonction continue des variables ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

Il est clair que ϑ est une fonction continue ainsi que ses dérivées pour des points $A(x_1, x_2, x_3)$ extérieurs au volume S .

Pour établir la continuité de ϑ pour des points appartenant à S on n'a qu'à répéter la démonstration bien connue pour la continuité du potentiel d'une masse étendue à trois dimensions.

Par la même méthode on établit aussi la continuité des premières dérivées de ϑ .

Revenons maintenant à la formule (15 a) chapitre II. Nous avons vu que l'expression

$$(2) \quad \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \sum_{\rho} (T_{\rho} \beta_{\rho} - U_{\rho} \sigma_{\rho}) d\omega - \frac{1}{4\pi} \int_S \sum_{\rho} U_{\rho} \beta_{\rho} dS$$

pour des points A appartenant au volume S représente la fonction $k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3$ et si le point A se trouve sur ω , l'expression (2) est égale à $\frac{1}{2}(k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3)$ et enfin, si A est en dehors de S elle est égale à zéro. Mais de ce que nous avons démontré de la continuité des intégrales φ et ϑ , il suit que les changements brusques de l'expression (2) sont dus à l'intégrale

$$\bar{\omega} = k_1 \bar{\omega}_1 + k_2 \bar{\omega}_2 + k_3 \bar{\omega}_3 = \frac{1}{4\pi} \int_S u_{\rho} \sigma_{\rho} d\omega.$$

Soit s un point de la surface ω . Désignons par $\bar{\omega}_s$ la valeur de $\bar{\omega}$ au point s , par $\bar{\omega}_{is}$ la limite de $\bar{\omega}$ quand le point $A(x_1, x_2, x_3)$ tend vers s en étant à l'intérieur de la surface, par $\bar{\omega}_{es}$ la limite de $\bar{\omega}$ quand le point A tend vers s en étant à l'extérieur de la surface, on a les deux relations

$$(3) \quad \begin{aligned} \bar{\omega}_{is} &= \bar{\omega}_s - \frac{1}{2}(k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3), \\ \bar{\omega}_{es} &= \bar{\omega}_s + \frac{1}{2}(k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3). \end{aligned}$$

Donc, si u_1, u_2, u_3 sont les valeurs sur la surface ω de trois fonctions

des variables ξ_1, ξ_2, ξ_3 et si les fonctions aient des dérivées continues des deux premiers ordres, les formules (3) nous informent de la discontinuité de l'intégrale $\bar{\omega}$.

Mais nous allons démontrer que les formules subsistent encore dans des conditions un peu plus générales.

Soient u_1, u_2, u_3 des fonctions des paramètres qui fixent la position d'un point sur ω . Supposons que ces fonctions admettent des dérivées finies du premier ordre, et prenons sur ω un point s où la courbure est finie. Décrivons de s comme centre une sphère de rayon ε , qui découpe sur la surface ω une courbe γ . Soit $\bar{\omega}'$ la partie de l'intégrale relative à l'aire ω_0 intérieure à γ , on aura

$$\bar{\omega}' = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega_0} \sum_{\rho} u_{\rho} \sigma_{\rho} d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega_0} \sum_{\rho} u_{\rho}' \sigma_{\rho} d\omega + \frac{1}{4\pi} \int_{\omega_0} \sum_{\rho} (u_{\rho} - u_{\rho}') d\omega.$$

Mais comme σ_{ρ} est une fonction homogène du degré -2 qui est régulière en dehors du point s on peut poser, en désignant par r la distance de s à un autre point de ω :

$$\sigma_{\rho} = \frac{\sigma_{\rho}^0}{r^2},$$

où σ_{ρ}^0 est une fonction dont le module a une limite supérieure finie, soit g . Alors on a

$$\int_{\omega_0} \sum_{\rho} (u_{\rho} - u_{\rho}') \sigma_{\rho} d\omega = \int_{\omega_0} \sum_{\rho} \frac{u_{\rho} - u_{\rho}'}{r^2} \sigma_{\rho}^0 \frac{d\omega}{r^2}.$$

Mais il existe une limite supérieure finie de $\frac{1}{r} (u_{\rho} - u_{\rho}')$, quelque petit que soit r ; soit u cette limite on pourra écrire

$$\left| \int_{\omega_0} \sum_{\rho} (u_{\rho} - u_{\rho}') \sigma_{\rho} d\omega \right| < 3gu \int_{\omega_0} \frac{d\omega}{r}.$$

Mais dans la théorie du potentiel on démontre que l'intégrale a une valeur absolue moindre que

$$\frac{2\pi\varepsilon}{\cos \gamma'}$$

où γ_0 désigne le plus grand angle d'une normale à ω_0 avec la normale en s .

L'intégrale $\frac{1}{4\pi} \int_{\omega_1} \sum_{\rho} u_{\rho}^s \sigma_{\rho} d\omega$ n'est jamais plus grande que $k_1 u_1^s + k_2 u_2^s + k_3 u_3^s$.

Nous pouvons donc écrire l'inégalité suivante

$$|\bar{\omega}'| < |k_1 u_1^s + k_2 u_2^s + k_3 u_3^s| + \frac{3g n \varepsilon}{2 \cos \gamma_0}.$$

d'où il résulte qu'on peut choisir le rayon ε assez petit pour que l'intégrale $\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \sum_{\rho} (u_{\rho} - u_{\rho}^s) \sigma_{\rho} d\omega$ soit en valeur absolue moindre qu'une quantité arbitrairement petite δ .

Comme l'intégrale $\bar{\omega} - \bar{\omega}'$ est continue dans le voisinage de s , on conclut que l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \sum_{\rho} (u_{\rho} - u_{\rho}^s) \sigma_{\rho} d\omega$$

est continue au point s . De là on déduit immédiatement les équations (3).

Comme les seconds membres dans les équations (3) sont indépendants des coefficients dans les équations différentielles définissant les fonctions β , on voit (voir p. 27) que les formules (3) subsistent aussi pour les fonctions définies par l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} (v_1 \tau_1 + v_2 \tau_2 + v_3 \tau_3) d\omega.$$

Nous avons établi que les fonctions ζ sont des fonctions continues; au contraire ses dérivées premières présentent des discontinuités dont nous allons montrer la nature sous l'hypothèse que les T_v soient des fonctions ayant des dérivées du premier ordre.

Comme τ_{ρ} désigne une fonction linéaire des constantes arbitraires k , mettons-les en évidence, en écrivant

$$\tau_{\rho} = k_1 \tau_{\rho}^1 + k_2 \tau_{\rho}^2 + k_3 \tau_{\rho}^3,$$

où les τ_{ρ}^{ν} sont des fonctions linéaires des cosinus directeurs de la normale de ω :

$$\tau_{\rho}^{\nu} = \sum_a \tau_{\rho a}^{\nu} \cos(n x_a),$$

d'où on déduit l'expression suivante de $\tau_{\rho\alpha}^\nu$ (voir form. (8) chapitre II § 1 et chapitre III § 2)

$$\tau_{\rho\alpha}^\nu = \sum_{\mu} \Delta_{\rho\mu}^{\alpha} \alpha_{\mu\nu}.$$

A l'aide de ces notations nous pouvons substituer aux formules (3) l'énoncé suivante: l'intégrale $\int_{\omega} v \tau_{\alpha}^k d\omega$ est une fonction continue de (x_1, x_2, x_3) si λ est inégal à α ; au contraire, si $\lambda = \alpha$, l'intégrale présente une discontinuité définie par les formules

$$\left[\int_{\omega} v \tau_{\alpha}^k d\omega \right]_s^{is} = -2\pi v_s, \quad \left[\int_{\omega} v \tau_{\alpha}^{\alpha} d\omega \right]_s^{es} = 2\pi v_s.$$

En différentiant maintenant l'expression de φ_{μ} à l'aide des fonctions α

$$\varphi_{\mu} = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} (T_1 \alpha_{\mu 1} + T_2 \alpha_{\mu 2} + T_3 \alpha_{\mu 3}) d\omega,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} \Delta_{\lambda\mu}^{\alpha} \varphi_{\mu} &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \sum_{\mu} (T_1 \Delta_{\lambda\mu}^{\alpha} \alpha_{\mu 1} + T_2 \Delta_{\lambda\mu}^{\alpha} \alpha_{\mu 2} + T_3 \Delta_{\lambda\mu}^{\alpha} \alpha_{\mu 3}) d\omega \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} (T_1 \tau_{\lambda\alpha}^1 + T_2 \tau_{\lambda\alpha}^2 + T_3 \tau_{\lambda\alpha}^3) d\omega. \end{aligned}$$

Multiplions les deux membres avec $\cos(nx_{\alpha})$ et faisons la somme par rapport à l'indice α , nous aurons

$$(4) \quad \sum_{\alpha} \cos(nx_{\alpha}) \sum_{\mu} \Delta_{\lambda\mu}^{\alpha} \varphi_{\mu} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} (T_1 \tau_{\lambda}^1 + T_2 \tau_{\lambda}^2 + T_3 \tau_{\lambda}^3) d\omega.$$

Or l'intégrale dans le second membre est de la même forme que l'intégrale définissant la fonction $\bar{\omega}$, donc nous pouvons rendre compte de la discontinuité de l'expression (4) par les formules suivantes

$$\begin{aligned} \left[\sum_{\mu} \cos(nx_{\alpha}) \Delta_{\lambda\mu}^{\alpha} \varphi_{\mu} \right]_s^{is} &= \frac{1}{2} T_{\lambda} \\ \left[\sum_{\mu} \cos(nx_{\alpha}) \Delta_{\lambda\mu}^{\alpha} \varphi_{\mu} \right]_s^{es} &= -\frac{1}{2} T_{\lambda}. \end{aligned}$$

Reprenons maintenant l'étude de l'intégrale ϑ , en supposant que les fonctions U_a admettent des dérivées continues du premier ordre. En vertu de cette hypothèse on pourra écrire, en appliquant une formule bien connue de la théorie du potentiel:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x_a} = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \sum_{\rho} U_{\rho} \beta_{\rho} \cos(nx_a) d\omega - \frac{1}{4\pi} \int_S \sum_{\rho} \frac{\partial U_{\rho}}{\partial x_a} \beta_{\rho} dS.$$

En égalant les coefficients de k_n dans les deux membres de cette équation et en remplaçant les fonctions $\beta_{\rho n}$ par les expressions équivalentes $\alpha_{\rho n}$, on trouve

$$\frac{\partial \vartheta_n}{\partial x_a} = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \sum_{\rho} U_{\rho} \alpha_{\rho n} \cos(nx_a) d\omega - \frac{1}{4\pi} \int_S \sum_{\rho} \frac{\partial U_{\rho}}{\partial x_a} \alpha_{\rho n} dS.$$

Prenons la dérivée des deux membres par rapport à x_{β} il vient

$$\frac{\partial^2 \vartheta_n}{\partial x_a \partial x_{\beta}} = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \sum_{\rho} U_{\rho} \frac{\partial \alpha_{\rho n}}{\partial x_{\beta}} \cos(nx_a) d\omega - \frac{1}{4\pi} \int_S \sum_{\rho} \frac{\partial U_{\rho}}{\partial x_a} \frac{\partial \alpha_{\rho n}}{\partial x_{\beta}} dS,$$

où le dernier terme est une fonction continue.

En multipliant les deux membres de l'équation par le coefficient $\left(\frac{\lambda \mu}{\alpha \beta}\right)$ et en faisant la somme par rapport aux indices α et β , on trouve

$$\Delta_{\lambda \mu} \vartheta_n = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \sum_{\alpha} \sum_{\rho} U_{\rho} \sum_{\beta} \left(\frac{\lambda \mu}{\alpha \beta}\right) \frac{\partial \alpha_{\rho n}}{\partial x_{\beta}} \cos(nx_a) d\omega + \text{une fonction continue.}$$

Rappelant la formule

$$\sum_{\beta} \left(\frac{\lambda \mu}{\alpha \beta}\right) \frac{\partial \alpha_{\rho n}}{\partial x_{\beta}} = -\Delta_{\lambda \mu}^a \alpha_{\rho n},$$

on pourra écrire l'expression de $\Delta_{\lambda \mu} \vartheta_n$

$$\Delta_{\lambda \mu} \vartheta_n = -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \sum_{\alpha} \sum_{\rho} U_{\rho} \Delta_{\lambda \mu}^a \alpha_{\rho n} \cos(nx_a) d\omega + \text{une fonction continue.}$$

Prenons la somme par rapport à μ , nous aurons

$$\sum_{\mu} \Delta_{\lambda \mu} \vartheta_n = -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \sum_{\alpha} \sum_{\rho} U_{\rho} \sum_{\mu} \Delta_{\lambda \mu}^a \alpha_{\rho n} \cos(nx_a) d\omega + \text{une fonction continue.}$$

Mais on a la formule

$$\sum_a \sum_{\mu} \Delta_{\lambda\mu}^a \alpha_{\mu\rho} \cos(n x_a) = \tau_{\lambda}^{\rho},$$

à l'aide de laquelle on obtient

$$\sum_{\mu} \Delta_{\lambda\mu} \vartheta_{\mu} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \sum_{\rho} U_{\rho} \tau_{\lambda}^{\rho} d\omega + \text{une fonction continue.}$$

Nous avons démontré que l'intégrale qui figure dans cette formule éprouve une diminution brusque égale à U_{λ} quand le point $A(x_1, x_2, x_3)$ passe de l'intérieur à l'extérieur de la surface ω . Mais nous savons que $\sum_{\mu} \Delta_{\lambda\mu} \vartheta_{\mu}$ est égale à zéro pour les points extérieurs à S ; par suite on a pour les points intérieurs

$$\sum_{\mu} \Delta_{\lambda\mu} \vartheta_{\mu} = U_{\lambda}. \quad (\lambda = 1, 2, 3)$$

Il résulte de ce que nous avons démontré sur les fonctions ϑ qu'elles nous donnent la solution du problème suivant:

Déterminer l'état de déformation d'un milieu élastique illimité quand ce milieu n'est soumis qu'à des forces agissant aux éléments de volume intérieurs à une certaine surface et qu'on suppose que la déformation à distance infinie est nulle.

Prenant en particulier le volume S infiniment petit on trouve que

$$\vartheta = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\rho} \beta_{\rho} \int_S U_{\rho} dS,$$

d'où, en posant $\int_S U_{\rho} dS = -X_{\rho}$, on déduit

$$\vartheta_{\nu} = \frac{1}{4\pi} (X_1 \beta_{1\nu} + X_2 \beta_{2\nu} + X_3 \beta_{3\nu}).$$

Ainsi il est clair que ces fonctions ϑ représentent les composantes de déformation dans le cas limite, où le milieu est sollicité en un seul point par une force dont les composantes sont X_1, X_2, X_3 .

§ 4. Usage de fonctions compensatrices.

En s'inspirant des idées de GREEN on peut réduire les problèmes généraux de l'équilibre d'un corps élastique à des problèmes particuliers de la même nature.

Envisageons d'abord le cas, où l'on se donne les composantes de déformation sur la surface ω d'un corps S , et les forces agissant sur les éléments de volume du corps.

Si on peut résoudre le problème d'équilibre dans le cas particulier, où les composantes de déformation à la surface ω sont égales aux fonctions $\alpha_p(\xi_1 - x_1, \xi_2 - x_2, \xi_3 - x_3)$ et les forces intérieures sont égales à zéro, on peut aussi résoudre le problème général. Désignons les composantes de déformation dans le problème particulier par $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et les composantes de la pression à la surface par T_1, T_2, T_3 . Alors le théorème de BETTI nous donne

$$0 = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \sum_p \gamma_p (T_p - T_p^0) d\omega - \frac{1}{4\pi} \int_S \sum_p T_p \gamma_p dS.$$

En formant la différence de cette expression et le second membre de l'équation (15 a) § 3 chap. II, on trouve la solution du problème général:

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \sum_p (T_p - \sigma_p) u_p d\omega - \frac{1}{4\pi} \int_S \sum_p U_p (\alpha_p - \gamma_p) dS.$$

Considérons le second problème, où les forces agissant sur la surface sont connues. Désignons par T_p les composants de ces forces. Soient U_1, U_2, U_3 les composantes de la force agissant sur un élément de volume de S . Alors on sait que le corps S doit être en équilibre sous l'influence de ces forces, ce qui entraîne les six conditions

$$\int T_p d\omega + \int U_p dS = 0,$$

$$\int (\xi_1 T_1 - \xi_2 T_2) d\omega + \int (\xi_1 U_1 - \xi_2 U_2) dS = 0,$$

La solution de ce problème d'équilibre n'est pas unique; soient u_1, u_2, u_3 des fonctions donnant une solution, on obtient toutes les autres par les formules

$$u_\lambda + a_\lambda + p_\mu x_\nu - p_\nu x_\mu$$

où a_λ et p_μ désignent des constantes.

A la déformation définie par les fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ correspondent des composantes de pression égales aux τ_1, τ_2, τ_3 . Nous avons déjà trouvé que $\int_\omega \tau_\rho d\omega = 4\pi k_\rho$. En substituant dans la formule (15a) chapitre II des fonctions linéaires pour les u , on trouve

$$\int_\omega (\xi_\lambda \tau_\rho - \xi_\rho \tau_\lambda) d\omega = 4\pi (x_\lambda k_\rho - x_\rho k_\lambda).$$

Prenons maintenant pour origine le centre de gravité de la surface ω , et pour axes les axes principales d'inertie de la surface ω .

Appliquons à la surface ω des forces dont les composantes sont

$$t_\lambda = b_\lambda + c_\mu \xi_\nu - c_\nu \xi_\mu. \quad (\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3)$$

Ecrivons les conditions pour que les forces $-t$ et τ se fassent équilibre, nous aurons

$$\begin{aligned} \int_\omega t_\lambda d\omega &= b_\lambda \cdot \int_\omega d\omega = 4\pi k_\lambda, \\ \int_\omega (\xi_\lambda t_\rho - \xi_\rho t_\lambda) d\omega &= c_\mu \cdot \int_\omega (\xi_\lambda^2 + \xi_\rho^2) d\omega = 4\pi (x_\lambda k_\rho - x_\rho k_\lambda). \end{aligned}$$

On voit que les valeurs des coefficients b et c satisfaisant à ces équations sont des fonctions linéaires des variables x_ν . Pourvu que les coefficients b et c aient été choisis de manière à satisfaire aux conditions d'équilibre et en faisant l'hypothèse que le problème de l'équilibre soit possible, on peut résoudre ce problème dans le cas particulier où les forces agissant sur ω sont égales à

$$\tau_\rho - t_\rho.$$

Désignons, dans ce cas particulier, par $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ les composantes de déformation et par A_1, A_2, A_3 les composantes de pression correspondantes. On a par suite pour les points de la surface ω les relations

$$\tau_\rho - A_\rho = t_\rho.$$

D'ailleurs le théorème de BETTI nous donne

$$0 = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \Sigma (\partial_{\rho} T_{\rho} - \Lambda_{\rho} u_{\rho}) d\omega - \frac{1}{4\pi} \int_S \Sigma_{\rho} U_{\rho} \partial_{\rho} dS,$$

et la formule (15) chapitre II

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \Sigma_{\rho} (T_{\rho} \alpha_{\rho} - u_{\rho} \tau_{\rho}) d\omega - \frac{1}{4\pi} \int_S \Sigma U_{\rho} \alpha_{\rho} dS,$$

d'où l'on obtient, en formant la différence,

$$\begin{aligned} k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 &= \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \Sigma_{\rho} T_{\rho} (\partial_{\rho} - \alpha_{\rho}) d\omega - \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \Sigma_{\rho} U_{\rho} (\tau_{\rho} - \Lambda_{\rho}) d\omega \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_S \Sigma_{\rho} U_{\rho} (\alpha_{\rho} - \partial_{\rho}) dS. \end{aligned}$$

Mais ici la seconde intégrale est égale à une fonction linéaire des variables x_v de la forme

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + \begin{vmatrix} k_1, k_2, k_3 \\ p_1, p_2, p_3 \\ x_1, x_2, x_3 \end{vmatrix},$$

et qui par suite représente un simple déplacement du corps. En supposant cette fonction égale à zéro, nous obtenons la solution

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \Sigma_{\rho} T_{\rho} (\partial_{\rho} - \alpha_{\rho}) d\omega - \frac{1}{4\pi} \int_S \Sigma_{\rho} U_{\rho} (\alpha_{\rho} - \partial_{\rho}) dS.$$

SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE D'UNE BRANCHE UNIFORME

D'UNE FONCTION MONOGENE

(Première note¹)

PAR

G. MITTAG-LEFFLER.

Désignons par a un point du plan de la variable complexe x , et adjoignons à a une suite infinie de quantités,

$$(1) \quad F(a), F^{(1)}(a), F^{(2)}(a), \dots, F^{(n)}(a), \dots$$

où chaque quantité est parfaitement déterminée quand on sait le rang qu'elle occupe dans la suite. Supposons, ce qui sera possible d'une infinité de manières, que ces quantités F soient choisies telles que la limite supérieure des valeurs limites² des modules $\left| \sqrt[n]{\frac{1}{\mu} F^{(n)}(a)} \right|$ soit un nombre fini, par exemple $\frac{1}{r}$.

¹ La présente note est un extrait des différentes communications qui ont été faites à l'Académie des sciences de Stockholm dans le courant de l'année 1898, et qui ont été publiées sous les titres suivants:

Om en generalisering af potensserien (9 Mars 1898).

Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion: Första meddelande (11 Maj 1898); Andra meddelande (11 Maj 1898); Tredje meddelande (14 Sept. 1898).

² P désignant une suite infinie de nombres, on nommera nombre limite ou valeur limite de ces nombres, un nombre tel que, dans un voisinage aussi rapproché de lui que l'on voudra, il se trouve une infinité de nombres appartenant à P . L'infini est dit la valeur limite de la suite si, dans un voisinage aussi rapproché de zéro que l'on voudra,

Si, au moyen des quantités I' comme éléments, l'on forme une série de puissances

$$(2) \quad \mathfrak{P}(x|a) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} I'^{(\mu)}(a) \cdot (x-a)^{\mu},$$

cette série sera convergente tant que x remplira la condition

$$|x-a| < r,$$

et sera divergente tant que

$$|x-a| > r.^1$$

Le domaine $|x-a| < r$, qui dans le plan des x est représenté par un cercle ayant pour centre le point a et pour rayon la quantité positive r , est le cercle de convergence de la série $\mathfrak{P}(x|a)$.²

Dans la théorie des fonctions analytiques, édifiée par WEIERSTRASS, la fonction est définie par la série $\mathfrak{P}(x|a)$ et par la continuation analytique de cette série. Chaque fonction analytique est parfaitement déterminée, pourvu que les éléments

$$F'(a), F^{(1)}(a), F^{(2)}(a), \dots, F^{(n)}(a), \dots$$

soient donnés. On désigne en général par $F(x)$ la fonction qui dans sa totalité est définie par ces éléments.

Si K est un continuum foriné d'une seule pièce qui ne se recouvre

il existe une infinité de nombres qui sont les inverses des nombres appartenant à la suite P . Si P est formée de nombres réels quelconques, et, si parmi ces nombres il en existe un qui n'est inférieur à aucun des autres, ce nombre sera dit *la limite supérieure* de P . Si, parmi les nombres qui appartiennent à P , il en est de plus grands que tout nombre donné, c'est *l'infini* qui sera dit *la limite supérieure* de P . Si aucun de ces deux cas n'a lieu il existe toujours, ainsi que WEIERSTRASS l'a démontré d'une manière rigoureuse, un nombre plus grand que tous les nombres appartenant à P et tel que dans chaque voisinage de ce nombre il existe un nombre infini de valeurs appartenant à P . Ce nombre alors sera dit *la limite supérieure* de P .

La limite inférieure de P peut aussi être définie d'une manière analogue.

¹ Voir: CAUCHY, Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique. I^{ère} Partie. Analyse algébrique, Paris 1821. Chapitre 9, § 2, théorème I, pag. 286.

² Nous ne comptons donc pas le contour du cercle de convergence comme faisant partie du cercle.

nulle part elle-même, renfermant le point a , et tel que la branche de la fonction $F(x)$, formée par $\mathfrak{P}(x|a)$ et sa continuation analytique à l'intérieur de K , reste uniforme et régulière, nous désignerons cette branche par $FK(x)$.

Le problème dont nous allons nous occuper sera de trouver une représentation analytique d'une branche $FK(x)$ choisie aussi étendue que possible.

De la définition même de la fonction analytique $F(x)$, et de celle de la branche $FK(x)$, résulte immédiatement une sorte de représentation analytique de la branche $FK(x)$ en question.

En effet, pour obtenir une représentation de cette branche, il suffit d'effectuer un nombre dénombrable de prolongements analytiques de $\mathfrak{P}(x|a)$, par exemple

$$\mathfrak{P}_\nu(x|a_\nu) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} \left(\frac{d^\mu FK(x)}{dx^\mu} \right)_{x=a_\nu} (x - a_\nu)^\mu,$$

$$\nu = 0, 1, 2, \dots; a_0 = a; \mathfrak{P}_0(x|a) = \mathfrak{P}(x|a).$$

Les séries $\mathfrak{P}_\nu(x|a_\nu)$ sont formées au moyen des éléments

$$\left(\frac{d^\mu FK(x)}{dx^\mu} \right)_{x=a_\nu}; \quad \left(\begin{matrix} \mu=0, 1, 2, \dots \\ \nu=0, 1, 2, \dots \end{matrix} \right)$$

et ces éléments eux-mêmes peuvent être calculés au moyen des éléments primitifs

$$F^{(\mu)}(a); (\mu = 0, 1, 2, \dots; F^{(0)}(a) = F(a)).$$

Mais, pour opérer ce calcul, il faut connaître le rayon du cercle de convergence de chaque série $\mathfrak{P}_\nu(x|a_\nu)$, car il est impossible d'effectuer la continuation immédiate d'une telle série sans en connaître le rayon de convergence. Nous avons déjà cité le théorème de CAUCHY qui nous donne ce rayon de convergence exprimé par l'inverse de la limite supérieure des quantités positives

$$\left| \sqrt[\nu]{\frac{1}{\mu!} \left(\frac{d^\mu FK(x)}{dx^\mu} \right)_{x=a_\nu}} \right|; \mu = 0, 1, 2, \dots$$

On voit que cette manière de représenter $FK(x)$ au moyen d'expressions analytiques est d'une complication extrême et d'une transcen-

dance très élevée. Il semble d'ailleurs que WEIERSTRASS n'ait guère regardé la continuation analytique autrement que comme un mode de définition de la fonction analytique. Les avantages de cette définition sont bien connus, et je n'ai pas besoin d'y insister.

Au premier abord il semble que la théorie de CAUCHY, qui est édifiée sur des principes tout autres que celle de WEIERSTRASS, possède un grand avantage sur celle-ci, lorsqu'il s'agit de la représentation analytique de $FK(x)$. En effet une telle représentation est donnée par la formule

$$(3) \quad FK(x) = \int_S \frac{F'K(z)}{z-x} dz,$$

où l'intégrale est prise le long d'un contour fermé S situé à l'intérieur de K et aussi rapproché de la frontière de K que l'on voudra. D'après la définition même d'une intégrale, il est évident que l'intégrale (3) peut être remplacée par une somme infinie de fonctions rationnelles de x dont les coefficients sont exprimés par des valeurs spéciales de x en nombre dénombrable et par les valeurs correspondantes de $FK(x)$. Cette observation a été le point de départ d'un travail magistral de M. RUNGE, que j'ai publié dans le tome 6 de ce journal.¹ La représentation analytique que l'on obtient ainsi exige donc que l'on connaisse la valeur de $FK(x)$ en un nombre infini et dénombrable de points qui doivent se rapprocher indéfiniment de la frontière de K . Or, dans les problèmes habituels de l'analyse, ces valeurs ne sont nullement connues. En général, c'est au contraire la série des valeurs

$$F(a), F^{(1)}(a), F^{(2)}(a), \dots$$

qui est donnée. Si l'on se met au point de vue usuel, il en est ainsi, par exemple, dans le problème si vaste de l'intégration des équations différentielles.

Quand il s'agira de trouver la représentation analytique de $FK(x)$, il faudra donc la tirer des éléments (1) et s'efforcer à l'aide seule de ces éléments de construire une formule qui représente la branche $FK(x)$ toute entière.

¹ Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen, § 1, p. 229—239.

Désignons par C le cercle de convergence de la série (2). L'expression

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{|\mu|} F^{(\mu)}(a) \cdot (x-a)^{\mu}$$

donnera alors la représentation analytique de $FC(x)$, l'égalité

$$FC(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{|\mu|} F^{(\mu)}(a) \cdot (x-a)^{\mu}$$

ayant lieu pour tous les points de C .

Cette expression est construite au moyen des éléments

$$F(a), F^{(1)}(a), F^{(2)}(a), \dots$$

et des nombres rationnels $\frac{1}{|\mu|}$ indépendants du choix des dits éléments.

Est-il possible d'obtenir de même pour une branche $FK(x)$ ayant la plus grande étendue possible une représentation analytique de cette nature? Nous allons voir que la réponse est affirmative, et qu'il est par conséquent possible de combler une lacune de la théorie des fonctions analytiques; en effet, jusqu'ici l'on n'avait pu donner pour la branche générale $FK(x)$ une représentation analytique pareille à celle trouvée dès les débuts de la théorie pour la branche $FC(x)$.

Pour traiter à fond la question que nous avons posée, il faut définir un domaine K qui soit aussi vaste que possible. C'est ce que nous allons faire en introduisant une nouvelle conception géométrique: l'*Etoile*.

Dans le plan de la variable complexe x , soit une aire engendrée de la manière suivante: autour d'un point fixe a on fera tourner une fois un vecteur¹ l ; sur chaque vecteur on déterminera d'une manière univoque un point, soit a_i , dont la distance au point fixe a sera plus grande qu'une quantité positive donnée, la même pour tous les vecteurs. Ce point a_i pourra être situé à une distance finie ou infinie du point a . Dans le cas où la distance de a à a_i est finie, on exclura du plan des x la partie du vecteur qui s'étend de a à a_i à l'infini. Nous donnerons le nom d'*Etoile* au domaine qui reste après que l'on aura exécuté toutes ces coupures dans le plan des x .

¹ Une demi-droite.

On voit que l'étoile¹ ainsi définie est un continuum formé d'une seule pièce et à connexion simple.

Adjoignons maintenant à a les éléments

$$F(a), F^{(1)}(a), F^{(2)}(a), \dots, F^{(n)}(a), \dots,$$

et formons la série

$$\mathfrak{P}(x|a) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} F^{(\mu)}(a) \cdot (x-a)^{\mu}.$$

Effectuons la continuation analytique de $\mathfrak{P}(x|a)$ le long d'un vecteur issu du point a .

Il se peut que chaque point de ce vecteur appartienne au cercle de convergence d'une série qui est elle-même une continuation analytique de $\mathfrak{P}(x|a)$ obtenue en procédant le long du vecteur; mais il est aussi possible qu'en procédant le long du vecteur on rencontre un premier point qui n'est situé à l'intérieur du cercle de convergence d'aucune continuation analytique de $\mathfrak{P}(x|a)$ le long du vecteur. Dans ce dernier cas nous exclurons du plan des x la partie du vecteur comprise entre le point ci-dessus et l'infini. En faisant tourner une fois le vecteur autour de a nous obtiendrons une étoile telle qu'elle a été définie précédemment.

Cette étoile étant donnée d'une manière univoque dès que les éléments (1) sont fixés, nous l'appellerons *l'étoile appartenant à ces éléments*.¹ Nous la désignerons en général par A , la première lettre du mot grec ἀστέρα.

En définissant l'étoile, nous avons choisis comme vecteurs des demi-droites. Il est facile de voir qu'on aurait pu prendre aussi bien des lignes courbes définies d'une manière convenable.

En analogie parfaite avec la terminologie: *étoile appartenant aux éléments* (1), nous parlerons du *cercle appartenant à ces éléments*, qui n'est pas autre chose que le cercle de convergence de la série

$$(2) \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} F^{(\mu)}(a) \cdot (x-a)^{\mu}.$$

Nous parlerons de même de la *fonction* $F(x)$ et de la *branche fonctionnelle* $FA(x)$ appartenant à ces éléments.

¹ J'ai introduit pour la première fois la conception de l'étoile appartenant aux éléments (1) dans ma note déjà citée *Om en generalisering etc.*

Ces préliminaires terminés nous pouvons énoncer ainsi le théorème principal qui sera démontré dans la suite:

La branche $FA(x)$ peut toujours être représentée par une série

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} G_{(\mu)}(x),$$

les $G_{(\mu)}(x)$ désignant des fonctions entières rationnelles de x :

$$G_{(\mu)}(x) = \sum_{(\nu)} c_{\nu}^{(\mu)} F^{(\nu)}(a) \cdot (x - a)^{\nu},$$

où les coefficients $c_{\nu}^{(\mu)}$ sont donnés a priori indépendamment du choix de a et de $F^{(\nu)}(a)$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots, \infty$).

Cette série $\sum_{\mu=0}^{\infty} G_{\mu}(x)$ est convergente pour chaque point de l'étoile A et uniformément convergente pour chaque domaine à l'intérieur de A .

Dans cette première note on trouvera une démonstration de ce théorème, remarquable par la forme très-simple qu'on obtient pour les coefficients $c_{\nu}^{(\mu)}$. Dans d'autres notes nous donnerons d'autres démonstrations qui se distinguent surtout par une détermination différente des $c_{\nu}^{(\mu)}$. Nous nous occuperons de même d'autres questions rentrant dans le même ordre d'idées ainsi que de leurs applications.

Pour donner la démonstration que nous voulons exposer dans cette note il sera commode d'employer une construction géométrique se rapportant à une étoile quelconque, soit E , qui n'est pas le plan des x tout entier.

Soit a le centre de l'étoile E , et soit n un nombre entier positif donné. Nous définirons une étoile $E^{(n)}$ de la manière suivante. Fixons un vecteur l issu du point a . En désignant par r une quantité positive suffisamment petite et en limitant le vecteur à la longueur $(n-1)r$, il arrivera que tout cercle de rayon r , décrit d'un point quelconque de ce vecteur limité comme centre, fera partie de E . En désignant par ρ la limite supérieure de r , en portant sur l la longueur $n\rho$ et en faisant tourner l une fois autour de a , nous obtiendrons l'étoile $E^{(n)}$. On voit que l'étoile $E^{(1)}$ est un cercle, que l'étoile $E^{(n+1)}$ renferme l'étoile $E^{(n)}$ et que toutes les étoiles $E^{(1)}, E^{(2)}, E^{(3)}, \dots$ font partie de l'étoile E .

Soit ensuite α une quantité réelle positive et inférieure à l'unité. Nous considérerons, conjointement avec l'étoile $E^{(n)}$, n autres étoiles $E_\mu^{(n)}$ ($\mu = 1, 2, \dots, n$) obtenues en remplaçant ρ successivement par

$$(4) \quad \rho_\mu = \alpha^\mu \rho.$$

On voit que $E_\mu^{(n)}$ est situé à l'intérieur de $E_{\mu-1}^{(n)}$ ($\mu = 1, 2, \dots, n$; $E_0^{(n)} = E^{(n)}$).

Soit maintenant \mathfrak{C} une étoile quelconque et soit X un domaine fini situé à l'intérieur de \mathfrak{C} , on pourra toujours trouver une étoile finie E concentrique à \mathfrak{C} , située toute entière à l'intérieur de \mathfrak{C} , et qui renferme à son intérieur tout le domaine X .

En effet, soit X' l'étoile *concentrique* à \mathfrak{C} et *circonscrite* à X . C'est ainsi que nous désignerons une étoile formée de la manière suivante: Si du point a on mène un vecteur quelconque et si l'on désigne par R la limite supérieure des distances de a aux points de ce vecteur qui appartiennent au domaine X , tous les points du vecteur dont la distance à a est inférieure ou égale à R appartiendront à X' , tandis que ceux dont la distance à a est supérieure à R n'y appartiendront pas.

Il est évident que l'étoile X' est finie lorsque le domaine X est fini.

Il est de même facile de voir que l'étoile X' est située à l'intérieur de l'étoile \mathfrak{C} si tel est le cas pour le domaine X . En effet, soit δ une quantité positive assez petite pour que «l'entourage δ » d'un point quelconque de X fasse partie de \mathfrak{C} . Considérons un point quelconque de X' , soit x , et soit r la distance de a à x . Comme précédemment soit R la portion appartenant à X' , du vecteur issu de a et passant par x . Puisque le point à l'extrémité de ce vecteur est sur la frontière de X , son entourage δ fera partie de \mathfrak{C} , et par conséquent, puisque \mathfrak{C} est une étoile dont le centre est en a , l'entourage $\frac{r}{R}\delta$ de x fera partie de \mathfrak{C} . Soit \mathfrak{R} la limite supérieure des R et soit k une quantité positive fixée d'une manière quelconque, on pourra *a fortiori* dire que l'entourage $\frac{k}{\mathfrak{R}}\delta$ du point

¹ Un domaine fini X est dit situé à l'intérieur d'un autre domaine X' s'il existe une quantité positive r telle que, x étant un point quelconque appartenant à X , tous les points x' pour lesquels $|x' - x| < r$ appartiennent à X' ; ce qu'on exprime parfois en disant que «l'entourage r » de x appartient à X' .

x fait partie de \mathfrak{C} , dès que r , la distance de a à x , n'est pas inférieure à k . Fixons maintenant, ce qui est toujours possible, k de telle manière qu'un cercle décrit du point a comme centre, avec le rayon

$$k\left(1 + \frac{\delta}{\mathfrak{R}}\right) = k + \frac{k}{\mathfrak{R}} \delta,$$

fasse partie de \mathfrak{C} . Alors l'entourage $\delta' = \frac{k}{\mathfrak{R}} \delta$ du point x fera partie de \mathfrak{C} , même si r est inférieur à k , et il en sera de même, par conséquent, pour toutes les positions du point x à l'intérieur de X' . Donc X' est, comme nous l'avons dit, situé à l'intérieur de \mathfrak{C} .

Soit maintenant E l'étoile X' agrandie dans la proportion de \mathfrak{R} à $\mathfrak{R} + \frac{1}{2} \delta'$. L'étoile E sera située toute entière à l'intérieur de \mathfrak{C} et de son côté renfermera le domaine X à son intérieur.

Nous pouvons aller plus loin encore. Il est toujours possible de trouver un nombre entier \bar{n} suffisamment grand pour que X soit situé à l'intérieur de $E^{(n)}$ dès que $n \geq \bar{n}$. En effet, désignons par δ la limite inférieure des distances entre un point à l'intérieur de E et un point sur la frontière de X ; δ sera une quantité réelle et supérieure à zéro. De plus soit \mathfrak{R} le rayon d'un cercle ayant pour centre le point a et qui renferme tout le domaine X . Il suffit de prendre \bar{n} plus grand que $\frac{\mathfrak{R}}{\delta}$ pour être sûr que tout le domaine X sera situé à l'intérieur de $E^{(n)}$ dès que $n \geq \bar{n}$.

Ayant choisi un nombre \bar{n} qui vérifie cette condition, on pourra encore choisir α en sorte que non seulement $E^{(n)}$ mais encore $E_n^{(n)}$ renferme à son intérieur tout le domaine X . En réalité, si nous faisons dépendre α de n de telle sorte que α^n converge vers l'unité quand n croît indéfiniment, il arrivera toujours, à partir d'une certaine valeur de n , que $E_n^{(n)}$ renfermera à son intérieur le domaine X .

Ces préliminaires posés, nous supposerons que X est un domaine fini quelconque, situé à l'intérieur de l'étoile \mathcal{A} appartenant, au sens défini ci-dessus, aux éléments

$$F(a), F'(a), F^{(2)}(a), \dots$$

C'est par rapport à cette étoile \mathcal{A} que nous formerons aussi bien

l'étoile finie E qui renferme à son intérieur le domaine X et qui est située elle-même à l'intérieur de A , que l'étoile $E^{(n)}$ et les n étoiles adjointes

$$E_1^{(n)}, E_2^{(n)}, \dots, E_n^{(n)},$$

l'entier n étant choisi arbitrairement.

Nous supposerons que n soit choisi suffisamment grand pour que $E_n^{(n)}$ renferme à son intérieur le domaine X .

A l'intérieur et sur la frontière de E la limite supérieure des valeurs $|FA(x)|$ sera une quantité finie que nous désignerons par g .

Pour simplifier les formules suivantes, nous conviendrons d'écrire

$$\xi \text{ au lieu de } \frac{x-a}{n},$$

$$\xi_\mu \text{ au lieu de } a + \mu \frac{x-a}{n}.$$

Nous ferons encore cette convention que dans nos formules $F^{(n)}(x)$ signifiera $\frac{d^n FA(x)}{dx^n}$.

Soit maintenant x un point du domaine X . Fixons le vecteur issu du point a qui passera par x , ainsi que la quantité positive ρ correspondant à ce vecteur, de la manière indiquée à la fin de la page 49. Si maintenant z satisfait à la condition

$$(5) \quad |z - \xi_{n-1}| \leq \rho,$$

z sera situé à l'intérieur de E , ou sur sa frontière, et l'on aura

$$(6) \quad FA(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_1|} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})(z - \xi_{n-1})^{\lambda_1}.$$

Par conséquent, en vertu d'un théorème connu, développé par WEIERSTRASS dans son mémoire de 1841 *Zur Theorie der Potenzreihen*,¹ on aura

$$(7) \quad \left| \frac{1}{|\lambda_1|} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1}) \right| \leq g \rho^{-\lambda_1}.$$

Le point x appartenant au domaine X appartiendra en même temps

¹ Werke, Bd. I, page 67.

à $E_1^{(n)}$, et on aura $|\xi| < \rho_1$, où ρ_1 est défini par la formule (4). Par conséquent

$$(8) \quad \left| \frac{1}{|\lambda_1|} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1}) \xi^{i_1} \right| \leq g \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^{\lambda_1} = g \alpha^{\lambda_1}.$$

Si x appartient à l'étoile $E_1^{(n)}$, et si z et z_1 sont choisis conformément aux conditions

$$(9) \quad \begin{aligned} |z_1 - \xi_{n-2}| &\leq \rho_1, \\ |z - z_1| &\leq \rho - \rho_1, \end{aligned}$$

la distance de z au point ξ_{n-2} , situé sur le vecteur allant de a à x , est au plus égale à ρ , et z appartient, par conséquent, à l'intérieur ou à la frontière de E . On aura donc pour toutes les valeurs z qui satisfont à la condition (9)

$$(10) \quad FA(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_1|} F^{(\lambda_1)}(z_1) \cdot (z - z_1)^{\lambda_1}$$

et, par conséquent, en vertu du théorème de WEIERSTRASS on aura

$$(11) \quad \left| \frac{1}{|\lambda_1|} F^{(\lambda_1)}(z_1) \right| \leq g(\rho - \rho_1)^{-\lambda_1}.$$

Multipliant par $|z_1 - \xi_{n-2}|^{\lambda_1} \leq \rho_1^{\lambda_1}$, on obtient immédiatement

$$(12) \quad \left| \frac{1}{|\lambda_1|} F^{(\lambda_1)}(z_1) (z_1 - \xi_{n-2})^{\lambda_1} \right| \leq g \left(\frac{\rho_1}{\rho - \rho_1} \right)^{\lambda_1} = g \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^{\lambda_1}.$$

Or on a

$$(13) \quad F^{(\lambda_1)}(z_1) = \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_2|} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2}) \cdot (z_1 - \xi_{n-2})^{\lambda_2}$$

et, par conséquent,

$$(14) \quad \frac{1}{|\lambda_1|} F^{(\lambda_1)}(z_1) (z_1 - \xi_{n-2})^{\lambda_1} = \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_1| |\lambda_2|} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2}) (z_1 - \xi_{n-2})^{\lambda_1+\lambda_2}.$$

Appliquant encore une fois le théorème de WEIERSTRASS nous obtenons, en vertu de (12) et (14)

$$(15) \quad \left| \frac{1}{|\lambda_1| |\lambda_2|} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2}) \right| \leq g \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^{\lambda_1} \rho_1^{-(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

où

$$(21) \quad \varepsilon_1 = \sum_{\lambda_1=m_1+1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_1|} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1}) \xi^{\lambda_1}.$$

On aura donc, à cause de (8),

$$(22) \quad |\varepsilon_1| \leq g \sum_{\lambda_1=m_1+1}^{\infty} \alpha^{\lambda_1} = g \frac{\alpha^{m_1+1}}{1-\alpha}.$$

De même, les conditions (9) étant remplies en faisant $z_1 = \xi_{n-1}$, $z = z_1$, on aura, en sommant dans (14) par rapport à λ_1 depuis 0 jusqu'à m_1 ,

$$(23) \quad \sum_{\lambda_1=0}^{m_1} \frac{1}{|\lambda_1|} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1}) \xi^{\lambda_1} = \sum_{\lambda_1=0}^{m_1} \sum_{\lambda_2=0}^{m_2} \frac{1}{|\lambda_1| |\lambda_2|} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2}) \xi^{\lambda_1+\lambda_2} + \varepsilon_2$$

où

$$(24) \quad \varepsilon_2 = \sum_{\lambda_1=0}^{m_1} \sum_{\lambda_2=m_2+1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_1| |\lambda_2|} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2}) \xi^{\lambda_1+\lambda_2}.$$

On aura, par conséquent, en vertu de (16)

$$(25) \quad |\varepsilon_2| < g \sum_{\lambda_1=0}^{m_1} \sum_{\lambda_2=m_2+1}^{\infty} \frac{\alpha^{2\lambda_1+\lambda_2}}{(1-\alpha)^{\lambda_1}} = g \frac{\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha}\right)^{m_1}}{1-\frac{\alpha^2}{1-\alpha}} \left(1 - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha^2}\right)^{m_1+1}\right) \cdot \frac{\alpha^{m_2+1}}{1-\alpha}.$$

On démontrera de la même manière les formules suivantes

$$(26) \quad FA(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{m_1} \sum_{\lambda_2=0}^{m_2} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{m_n} \frac{1}{|\lambda_1| |\lambda_2| \dots |\lambda_n|} \cdot F^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)}(a) \cdot \left(\frac{x-a}{a}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n} \\ + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{\mu} + \dots + \varepsilon_n$$

où

$$(27) \quad |\varepsilon_{\mu}| \leq g \frac{\left(\frac{\alpha^{\mu}}{1-\alpha}\right)^{m_1}}{1-\frac{\alpha^{\mu}}{1-\alpha}} \cdot \frac{\left(\frac{\alpha^{\mu-1}}{1-\alpha}\right)^{m_2}}{1-\frac{\alpha^{\mu-1}}{1-\alpha}} \dots \frac{\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha}\right)^{m_{\mu-1}}}{1-\frac{\alpha^2}{1-\alpha}} \\ \times \left(1 - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha^{\mu}}\right)^{m_1+1}\right) \left(1 - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha^{\mu-1}}\right)^{m_2+1}\right) \dots \left(1 - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha^3}\right)^{m_{\mu-1}+1}\right) \frac{\alpha^{m_{\mu}+1}}{1-\alpha}.$$

La dernière formule pourra s'écrire

$$(28) \quad |\varepsilon_p| \leq g \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{1-\alpha}{a^{n-(\nu-1)}}\right)^{m_\nu+1}\right)}{\prod_{\nu=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1-\alpha}{a^{n-(\nu-1)}}\right)} \cdot \frac{a^{m_1+1}}{1-\alpha} \cdot \frac{a^{m_1+m_2}}{(1-\alpha)^{m_1}} \cdot \frac{a^{m_1+m_2+m_3}}{(1-\alpha)^{m_2}} \cdots \frac{a^{m_1+m_2+\dots+m_p}}{(1-\alpha)^{m_{p-1}}}.$$

Nous avons fait la supposition suivante au sujet de α : c'est une quantité positive plus petite que l'unité, indépendante de x , de a et des constantes (1) mais qui dépend du nombre n , et cela de telle sorte que α^n tende indéfiniment vers l'unité en même temps que le nombre n croît indéfiniment.

Faisons maintenant

$$(29) \quad \alpha = e^{-\frac{1}{n\omega(n)}}$$

où $\omega(n)$ est une quantité positive qui dépend de n de telle sorte que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(n) = \infty.$$

On aura

$$(30) \quad 1 - \alpha < \frac{1}{n\omega(n)},$$

dès que n devient suffisamment grand, et de même

$$\alpha^{-\lambda} = e^{\frac{\lambda}{n\omega(n)}} \leq e^{\frac{1}{n\omega(n)}} \quad \text{pour } \lambda = 2, 3, \dots, n.$$

Par conséquent,

$$\frac{1-\alpha}{\alpha^\lambda} \leq \frac{1}{n\omega(n)}$$

et

$$\frac{1}{1 - \frac{\alpha^\lambda}{1-\alpha}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{e^{\frac{1}{n\omega(n)}}}}$$

Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène, 59
et, que par conséquent,

$$(35) \quad |\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n| < g.k. \frac{1}{\omega(n)}.$$

Si on fait dépendre les entiers m_1, m_2, \dots, m_n de n d'une manière déterminée de telle sorte que les inégalités (33) soient vérifiées, au moins pour les grandes valeurs de n , l'expression

$$(36) \quad g_n(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{m_1} \sum_{\lambda_2=0}^{m_2} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{m_n} \frac{1}{|\lambda_1| |\lambda_2| \dots |\lambda_n|} \cdot F^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n} \right)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n},$$

qui a la forme

$$(37) \quad \sum_{(\nu)} c_{\nu}^{(n)} F^{(\nu)}(a) \cdot (x-a)^{\nu}$$

où les coefficients $c_{\nu}^{(n)}$ sont des nombres rationnels qui dépendent seulement de n et de ν , aura la propriété très remarquable que voici:

Si A est l'étoile qui appartient aux éléments

$$F(a), F'(a), F^{(2)}(a), \dots,$$

si X est un domaine quelconque situé à l'intérieur de A et si σ est une quantité positive donnée, on pourra trouver un nombre \bar{n} tel que l'inégalité

$$|FA(x) - g_n(x)| < \sigma$$

soit satisfaite pour tous les x qui appartiennent à X , pourvu que n soit supérieur à \bar{n} .

Nous pouvons résumer au moyen du théorème suivant le résultat que nous avons obtenu:

Théorème 1. Désignons par A l'étoile appartenant aux éléments

$$F(a), F'(a), F^{(2)}(a), \dots$$

et par $FA(x)$ la branche fonctionnelle correspondante qui appartient à ces mêmes éléments, et soit X un domaine fini quelconque à l'intérieur de A et σ une quantité positive aussi petite que l'on voudra.

Il est toujours possible de trouver un nombre entier \bar{n} tel, que la différence entre $FA(x)$ et le polynôme

$$(38) \quad g_n(x) = \sum_{\nu} c_{\nu}^{(n)} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu}$$

soit, dès que n surpasse \bar{n} , inférieure à σ en valeur absolue pour toutes les valeurs de x appartenant au domaine X .

Les coefficients $c_{\nu}^{(n)}$ peuvent être choisis à priori et sont absolument indépendants de a , de $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, $F^{(2)}(a)$, ... et de x .

De l'expression (36) on tire pour les $c_{\nu}^{(n)}$ la formule

$$(39) \quad c_{\nu}^{(n)} = \frac{1}{n^{\nu}} \sum_{(\lambda)} \frac{1}{|\lambda_1| |\lambda_2| \dots |\lambda_n|}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ parcourent tous les entiers positifs, le nombre zéro y compris, qui vérifient les conditions

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \nu,$$

$$\lambda_1 \leq m_1, \lambda_2 \leq m_2, \dots, \lambda_n \leq m_n$$

où m_1, m_2, \dots, m_n sont des entiers positifs dépendant de n .

La dépendance des nombres m_1, m_2, \dots, m_n du nombre n peut être fixée d'une infinité de manières différentes. Il faudra seulement la choisir telle que l'inégalité (35) soit vérifiée.

Nous avons vu que l'inégalité (35) a lieu dès que les m_1, m_2, \dots, m_n sont choisis de manière à vérifier les inégalités (33).

Ces inégalités subsistent pour des valeurs suffisamment grandes de n si l'on pose

$$(40) \quad m_{\mu} = n^{2\mu}; \mu = 1, 2, \dots, n.$$

En choisissant cette détermination pour les m_{μ} , le polynôme $g_n(x)$ prend la forme très simple

$$g_n(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{|\lambda_1| |\lambda_2| \dots |\lambda_n|} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n} \right)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n}.$$

La forme (39) que nous avons obtenue pour les $c_{\nu}^{(n)}$ est loin d'être la seule possible. Il y a au contraire un nombre indéfini d'autres formes

qui répondent à des conditions spéciales. Il y a lieu de considérer entr'autres pour les $C^{(n)}$ des expressions qui sont formées à l'aide des deux célèbres transcendentes e et π .¹

Il est maintenant facile d'obtenir le théorème que nous avons mis en tête de ce travail.

En effet, posons

$$(42) \quad \begin{cases} G_0(x) = g_0(x) = F(a), \\ G_\mu(x) = g_\mu(x) - g_{\mu-1}(x); \quad \mu = 1, 2, \dots, \infty. \end{cases}$$

On a

$$(43) \quad \sum_{\mu=0}^n G_\mu(x) = g_n(x).$$

Par conséquent, x étant un point quelconque à l'intérieur de A , et σ étant une quantité positive aussi petite que l'on voudra, on aura en choisissant n suffisamment grand,

$$(44) \quad \left| FA(x) - \sum_{\mu=0}^n G_\mu(x) \right| < \sigma.$$

L'égalité

$$(45) \quad FA(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x)$$

a donc lieu pour chaque point à l'intérieur de A .

La série

$$(46) \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x)$$

est uniformément convergente pour chaque domaine à l'intérieur de A . En effet pour un tel domaine on a en même temps

$$(47) \quad \begin{cases} \left| FA(x) - \sum_{\mu=0}^n G_\mu(x) \right| < \sigma, \text{ le nombre } n \text{ étant suffisamment grand} \\ \left| FA(x) - \sum_{\mu=0}^{n+m} G_\mu(x) \right| < \sigma, \text{ le nombre } m \text{ étant un nombre entier positif quelconque} \end{cases}$$

¹ De telles expressions ont été étudiées dans les deux notes déjà citées: *Om en generalisering af potensserien* et *Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion*, Tredje meddelandet.

et, par conséquent,

$$(48) \quad \left| \sum_{\mu=n+1}^{n+m} G_{\mu}(x) \right| < 2\sigma.$$

Nous avons donc obtenu le théorème suivant:

Théorème 2. Désignons par A l'étoile qui appartient aux éléments

$$F(a), F'(a), F^{(2)}(a), \dots$$

et par $F'A(x)$ la branche fonctionnelle correspondante qui appartient à ces mêmes éléments.

Cette branche $F'A(x)$ pourra toujours être représentée par une série

$$(46) \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} G_{\mu}(x)$$

où les $G_{\mu}(x)$ sont des polynômes de la forme

$$G_{\mu}(x) = \sum_{(\nu)} c_{\nu}^{(\mu)} F^{(\nu)}(a) \cdot (x - a)^{\nu},$$

chaque coefficient $c_{\nu}^{(\mu)}$ étant un nombre rationnel déterminé qui ne dépend que de ν et de μ .

La série

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} G_{\mu}(x)$$

est convergente pour chaque valeur de x à l'intérieur de A et elle est uniformément convergente pour chaque domaine à l'intérieur de A .

On aura partout à l'intérieur de A

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} G_{\mu}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$$

où $g_n(x)$ désigne le même polynôme que dans le théorème 1.

SUR LES PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE.

Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur

PAR

LEO KÖNIGSBERGER

à HEIDELBERG.

[Traduit de l'allemand par L. Laugel.]

Ce n'est qu'aujourd'hui, à mon retour d'un assez long voyage d'agrément, que je puis donner suite aux demandes amicales, que vous m'avez faites verbalement et par écrit, de vous communiquer les résultats essentiels des recherches que j'ai entreprises l'an dernier sur les principes de la mécanique. Je vais essayer, bien qu'assez rapidement, de mettre en évidence quelques points qui pourront peut-être inspirer en général de l'intérêt.

L'établissement de la loi de WEBER sur l'action entre points matériels électrisés avait exigé l'introduction de forces qui dépendent non seulement de la situation des points mais encore de leurs vitesses et de leurs accélérations, et KIRCHHOFF, HERTZ et autres ont à mainte reprise admis la possibilité de forces, définies par des fonctions des coordonnées et de leurs dérivées d'ordre quelconque prises par rapport au temps. C'est principalement la loi de WEBER qui, dans l'étude du potentiel cinétique, défini par l'expression $H = -T - U$, où T désigne la force vive de la matière pondérable et U la fonction des forces — ces mots pris dans leur sens habituel en mécanique — a conduit C. NEUMANN à soulever la question de savoir comment doit être formé U au moyen des coordonnées et de leurs dérivées premières, quand on admet que le principe de HAMILTON reste valable. Une méthode de nature essentiellement différente et d'une portée très grande en principe, est celle, introduite en mécanique par HELMHOLTZ, du traitement du potentiel cinétique comme fonction des coordonnées et de leurs dérivées premières, méthode qui ne

met pas immédiatement en évidence une séparation de l'énergie actuelle et de l'énergie potentielle, mais qui détermine d'une manière univoque la quantité d'énergie de l'ensemble du système, et qui fournit encore la fonction fondamentale qui a été l'origine des développements de la théorie des mouvements cachés établie par HELMHOLTZ et reprise par HERTZ.

Si l'on examine avec un peu plus d'attention les considérations exposées par C. NEUMANN, on est très rapidement conduit à des résultats beaucoup plus généraux, qui révèlent la source propre des théorèmes antérieurs, et qui de plus permettent aussi d'étendre les recherches de HELMHOLTZ à des forces appartenant à des potentiels cinétiques qui dépendent de dérivées d'ordre quelconque.

Après avoir, pour une fonction

$$R = f(t, x, y, z, \dots),$$

où x, y, z, \dots dépendent de t , développée la relation

$$\frac{\partial R^{(\rho)}}{\partial x^{(\lambda)}} = \frac{\rho(\rho-1)\dots(\rho-\lambda+1)}{1.2\dots\lambda} \frac{\partial R^{(\rho-\lambda)}}{\partial x}$$

et l'identité

$$\frac{\partial R^{(\rho)}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial R^{(\rho)}}{\partial x'} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial R^{(\rho)}}{\partial x''} + \dots + (-1)^\rho \frac{d^\rho}{dt^\rho} \frac{\partial R^{(\rho)}}{\partial x^{(\rho)}} = 0,$$

que l'on en tire, on obtient, pour chaque fonction

$$V = F(t, R_1, R_1', R_1'', \dots, R_1^{(\nu)}, R_2, R_2', \dots, R_2^{(\nu)}, \dots),$$

où R_1, R_2, \dots sont des fonctions de t et des μ grandeurs p_1, p_2, \dots, p_μ , qui elles-mêmes doivent encore être regardées comme fonctions de t , la relation

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial p_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial p_i'} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial V}{\partial p_i''} - \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial V}{\partial p_i^{(\nu)}} \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial R_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial R_1'} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial V}{\partial R_1''} - \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial V}{\partial R_1^{(\nu)}} \right) \frac{\partial R_1}{\partial p_i} \\ &+ \left(\frac{\partial V}{\partial R_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial R_2'} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial V}{\partial R_2''} - \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial V}{\partial R_2^{(\nu)}} \right) \frac{\partial R_2}{\partial p_i} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

sur laquelle reposent les recherches qui suivent.

Supposons maintenant que n points d'un système ayant pour coordonnées $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$ soient soumis aux conditions restrictives exprimées par les m équations linéaires homogènes par rapport aux déplacements virtuels

$$\begin{aligned} f_{\lambda 1} \delta x_1 + \varphi_{\lambda 1} \delta y_1 + \psi_{\lambda 1} \delta z_1 + f_{\lambda 2} \delta x_2 + \varphi_{\lambda 2} \delta y_2 + \psi_{\lambda 2} \delta z_2 + \dots \\ + f_{\lambda n} \delta x_n + \varphi_{\lambda n} \delta y_n + \psi_{\lambda n} \delta z_n = 0, \end{aligned} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, m)$$

et que, H désignant une fonction donnée de t , des $3n$ coordonnées et de leurs dérivées prises par rapport au temps jusqu'à l'ordre ν , les variables soient pendant le cours du temps t , variable indépendante, soumises au principe de d'Alembert généralisé; on aura:

$$\begin{aligned} \sum_1^n \left[\frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_k} + \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}} - Q_k \right] \delta x_k \\ + \sum_1^n \left[\frac{\partial H}{\partial y_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \dot{y}_k} + \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial y_k^{(\nu)}} - R_k \right] \delta y_k \\ + \sum_1^n \left[\frac{\partial H}{\partial z_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \dot{z}_k} + \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial z_k^{(\nu)}} - S_k \right] \delta z_k = 0, \end{aligned}$$

où Q_k, R_k, S_k sont des fonctions données du temps et des coordonnées, et où H , par analogie avec la mécanique, peut être nommé le potentiel cinétique. *D'où s'ensuit aisément la première forme des équations de Lagrange généralisées*

$$\frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_k} + \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}} - Q_k + \lambda_1 f_{1k} + \lambda_2 f_{2k} + \dots + \lambda_m f_{mk} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial y_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \dot{y}_k} + \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial y_k^{(\nu)}} - R_k + \lambda_1 \varphi_{1k} + \lambda_2 \varphi_{2k} + \dots + \lambda_m \varphi_{mk} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial z_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \dot{z}_k} + \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial z_k^{(\nu)}} - S_k + \lambda_1 \psi_{1k} + \lambda_2 \psi_{2k} + \dots + \lambda_m \psi_{mk} = 0,$$

tandis que le théorème auxiliaire précité fournit, sous l'hypothèse de l'inté-

grabilité des précédentes équations aux variations, la seconde forme des équations de Lagrange généralisées

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p_s'} + \dots + (-1)^{\nu} \frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} + P_s = 0 \quad (s=1, 2, \dots, n)$$

où l'on a posé

$$P_s = - \sum_1^n \left\{ Q_k \frac{\partial x_k}{\partial p_s} + R_k \frac{\partial y_k}{\partial p_s} + S_k \frac{\partial z_k}{\partial p_s} \right\}.$$

Maintenant nous pouvons donner une autre interprétation à ces équations. On nommera adjointe à une fonction

$$F(r_1, r_1', \dots, r_1^{(\nu)}, r_2, r_2', \dots, r_2^{(\nu)}, \dots, r_k, r_k', \dots, r_k^{(\nu)}),$$

où r_1, r_2, \dots, r_k dépendent d'une variable t , une autre fonction f formée au moyen de $r, \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial r'}, \dots, \frac{\partial F}{\partial r^{(\nu)}}$ et de leurs dérivées prises par rapport à t jusqu'à un ordre quelconque, quand celle-ci lors de la transformation des variables r_1, r_2, \dots, r_k en μ autres p_1, p_2, \dots, p_{μ} , jouit de la propriété que ladite fonction, formée au moyen de $p_s, \frac{\partial F}{\partial p_s}, \frac{\partial F}{\partial p_s'}, \dots, \frac{\partial F}{\partial p_s^{(\nu)}}$ et de leurs dérivées totales, est égale à la somme des projections des fonctions f , qui appartiennent à r_1, r_2, \dots, r_k prises sur la direction de p_s , et par conséquent vérifie l'équation

$$\begin{aligned} & f\left(p_s, p_s', \dots, \frac{\partial F}{\partial p_s}, \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial p_s}, \dots, \frac{\partial F}{\partial p_s'}, \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial p_s'}, \dots, \frac{\partial F}{\partial p_s^{(\nu)}}, \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial p_s^{(\nu)}}, \dots\right) \\ &= \sum_1^k f\left(r_\varepsilon, r_\varepsilon', \dots, \frac{\partial F}{\partial r_\varepsilon}, \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial r_\varepsilon}, \dots, \frac{\partial F}{\partial r_\varepsilon'}, \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial r_\varepsilon'}, \dots, \frac{\partial F}{\partial r_\varepsilon^{(\nu)}}, \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial r_\varepsilon^{(\nu)}}, \dots\right) \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial p_s}, \end{aligned}$$

en sorte que

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x_i'}, - \frac{\partial T}{\partial y_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial y_i'}, - \frac{\partial T}{\partial z_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial z_i'}$$

sont fonctions adjointes de la force vive.

Maintenant si l'on soulève en outre la question de savoir quelles sont toutes les fonctions adjointes, appartenant à chaque fonction F quelconque et

valables pour *chaque* choix *arbitraire* des transformations, on reconnaît qu'il existe toujours $\nu + 1$ et seulement $\nu + 1$ fonctions adjointes de la forme

$$\frac{\partial F}{\partial r^{(\nu-\lambda)}} - (\nu - \lambda + 1) \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial r^{(\nu-\lambda+1)}} + \frac{(\nu - \lambda + 2)(\nu - \lambda + 1)}{1 \cdot 2} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial F}{\partial r^{(\nu-\lambda+2)}} - \dots$$

$$+ (-1)^\nu \frac{\nu(\nu-1) \dots (\nu-\lambda+1)}{1 \cdot 2 \dots \lambda} \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial F}{\partial r^{(\nu)}}, \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots, \nu)$$

et, si l'on nomme, d'une manière tout à fait générale, F désignant le potentiel cinétique H — par analogie avec le moment de mouvement, introduit par HELMHOLTZ, $\frac{\partial H}{\partial p_s}$, quand H ne dépend que des dérivées premières — les ν expressions

$$\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu-\lambda)}} - (\nu - \lambda + 1) \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu-\lambda+1)}} + \dots$$

$$+ (-1)^\nu \frac{\nu(\nu-1) \dots (\nu-\lambda+1)}{1 \cdot 2 \dots \lambda} \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}, \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots, \nu-1)$$

les moments de mouvement, et cette expression pour $\lambda = \nu$ la force, on voit alors que la force — abstraction faite des moments — est l'unique fonction adjointe, appartenant à *chaque* potentiel cinétique dépendant des coordonnées et de leurs dérivées d'ordre quelconque, qui existe pour des conditions restrictives *arbitraires* imposées au système libre; en même temps les équations de Lagrange sous leur seconde forme peuvent être remplacées par le simple énoncé suivant: La force agissant sur la coordonnée p_s pendant le mouvement est égale à la somme des projections des forces agissant sur le système libre sur la direction de p_s .

La question suivante qui se présente alors est relative à la valabilité des principes de la mécanique pour la définition généralisée de force et pour les équations de Lagrange généralisées. On voit d'abord immédiatement que dans le cas où le potentiel cinétique H dépend d'une manière toute générale des coordonnées et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre ν inclus, le principe de Hamilton, représenté par l'équation

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(H + \sum_{\lambda=1}^{\nu} P_{\lambda} p_{\lambda} \right) dt = 0$$

est équivalent à la seconde forme des équations de Lagrange généralisées;

$$\begin{aligned}
 M = & \sum_1^n \frac{1}{\frac{\partial^2 H}{\partial x_k'^2}} \left| \frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial x_k'} + \dots + (-1)^v \frac{d^v}{dt^v} \frac{\partial H}{\partial x_k^{(v)}} - Q_k \right|^2 \\
 & + \sum_1^n \frac{1}{\frac{\partial^2 H}{\partial y_k^{(v)2}}} \left| \frac{\partial H}{\partial y_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial y_k'} + \dots + (-1)^v \frac{d^v}{dt^v} \frac{\partial H}{\partial y_k^{(v)}} - R_k \right|^2 \\
 & + \sum_1^n \frac{1}{\frac{\partial^2 H}{\partial z_k^{(v)2}}} \left| \frac{\partial H}{\partial z_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial z_k'} + \dots + (-1)^v \frac{d^v}{dt^v} \frac{\partial H}{\partial z_k^{(v)}} - S_k \right|^2
 \end{aligned}$$

prend une valeur minimum, pour les valeurs, comprises parmi toutes les valeurs de $x_k^{(2v)}, y_k^{(2v)}, z_k^{(2v)}$, — les valeurs

$$x_k, y_k, z_k, x_k', y_k', z_k', \dots, x_k^{(2v-1)}, y_k^{(2v-1)}, z_k^{(2v-1)}$$

étant conservées —, qui satisfont aux équations du mouvement de Lagrange, lorsque les quantités

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_k^{(v)2}}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y_k^{(v)2}}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial z_k^{(v)2}}$$

sont toutes négatives, et que les conditions données pour les coordonnées sont conservées pour les systèmes de valeurs comparés.

Le développement du principe de la moindre action généralisé rend nécessaire la séparation de la forme de Lagrange et de la forme de Jacobi, et j'obtiens la forme la plus générale de ce principe exprimée par l'équation

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^t \sum_1^n \left[p_s' \left[\frac{\partial H}{\partial p_s'} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p_s''} + \dots + (-1)^{v-1} \frac{d^{v-1}}{dt^{v-1}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(v)}} \right] \right. \\
 & \quad \left. + p_s'' \left[\frac{\partial H}{\partial p_s''} - \dots + (-1)^{v-2} \frac{d^{v-2}}{dt^{v-2}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(v)}} \right] + \dots + p_s^{(v)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(v)}} \right] dt \\
 = & - \int_{t_0}^t \partial E dt - \int_{t_0}^t \sum_1^n P_s \partial p_s dt + \left[\sum_1^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_s'} - \dots + (-1)^{v-1} \frac{d^{v-1}}{dt^{v-1}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(v)}} \right) \partial p_s \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{\partial H}{\partial p_s''} - \dots + (-1)^{v-2} \frac{d^{v-2}}{dt^{v-2}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(v)}} \right) \partial p_s' + \dots + \frac{\partial H}{\partial p_s^{(v)}} \partial p_s^{(v-1)} \right] \Big|_{t_0}^t,
 \end{aligned}$$

où l'on suppose que H ne contient pas explicitement le temps t , équation qui, dans le cas où le potentiel cinétique ne renferme que les dérivées premières des coordonnées, et où par conséquent $E = h - \int \sum_1^n P_s dp_s$, se transforme en

$$\partial \int_{t_0}^t \sum_1^n p'_s \frac{\partial H}{\partial p'_s} dt = - \int_{t_0}^t \partial E dt - \int_{t_0}^t \sum_1^n P_s \partial p_s dt + \left[\sum_1^n \frac{\partial H}{\partial p'_s} \partial p_s \right]_{t_0}^t,$$

et qui dans le cas où H désigne la fonction caractéristique de Hamilton, fournit le principe de la moindre action.

Il est alors facile de trouver la source des théorèmes qui, dans la mécanique habituelle définissent les deux principes qui restent encore; d'abord comme principe généralisé de la conservation des aires l'on a ce théorème: Lorsque le potentiel cinétique a la forme

$$H = \omega(x_k^2 + y_k^2, x_k'^2 + y_k'^2, \dots, x_k^{(\nu)^2} + y_k^{(\nu)^2}) \\ + \Omega(t, R_1, R_1', \dots, R_1^{(\nu)}, R_2, R_2', \dots, R_2^{(\nu)}, \dots),$$

où ω et Ω sont des fonctions quelconques des grandeurs entre parenthèse et de z_1, z_2, \dots, z_n , et où R_1, R_2, \dots désignent des fonctions de $t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ pour lesquelles on a

$$\sum_1^n (y_k \frac{\partial R_n}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial R_n}{\partial y_k}) = 0,$$

et lorsqu'en outre les forces extérieures aussi bien que les fonctions $f_{\mu k}, \varphi_{\mu k}$, qui définissent les contraintes du système, satisfont aux conditions

$$\sum_1^n (y_k Q_k - x_k R_k) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_1^n (y_k f_{\mu k} - x_k \varphi_{\mu k}) = 0,$$

on obtient alors comme intégrale des équations du mouvement l'équation différentielle du $(2\nu - 1)^{\text{ème}}$ ordre

$$\sum_1^n \sum_1^n (-1)^{\nu-1} \sum_0^{\nu-1} (-1)^{\nu-1} \left\{ y_k^{\nu-1} \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}} \frac{\partial \omega}{\partial x_k^{\nu-1}}, x_k^{\nu-1} \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}} \frac{\partial \omega}{\partial y_k^{\nu-1}} \right\} = 0,$$

qui pour le potentiel habituel se transforme en le théorème connu des aires, et qui peut aussi être aisément étendu au cas où dans le potentiel cinétique l'énergie actuelle et l'énergie potentielle ne sont pas encore séparées. Enfin nous obtenons le principe de la conservation du mouvement du centre de gravité, étendu à des potentiels cinétiques arbitraires sous la forme suivante:

Lorsque le potentiel cinétique a la forme

$$H = \omega(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2, x_k'^2 + y_k'^2 + z_k'^2, \dots, x_k^{(\nu)2} + y_k^{(\nu)2} + z_k^{(\nu)2}) \\ + \omega_1(t, x_\sigma - x_\sigma^{(\nu)}, \dots, x_\rho^{(\nu)} - x_\sigma^{(\nu)}, y_\rho - y_\sigma, \dots, y_\rho^{(\nu)} - y_\sigma^{(\nu)}, z_\rho - z_\sigma, \dots, z_\rho^{(\nu)} - z_\sigma^{(\nu)}),$$

et que ω est une fonction linéaire des arguments $x_k^{(r)2} + y_k^{(r)2} + z_k^{(r)2}$ à coefficients constants a_{kr} , entre les grandeurs

$$2(a_{1r}x_1 + a_{2r}x_2 + \dots + a_{nr}x_n) = A_r, \quad 2(a_{1r}y_1 + a_{2r}y_2 + \dots + a_{nr}y_n) = B_r, \\ 2(a_{1r}z_1 + a_{2r}z_2 + \dots + a_{nr}z_n) = C_r$$

ont lieu des relations

$$A_0 - A_1'' + A_2''' - \dots + (-1)^\nu A_\nu^{(2\nu)} - \sum_1^n Q_k = 0,$$

$$B_0 - B_1'' + B_2''' - \dots + (-1)^\nu B_\nu^{(2\nu)} - \sum_1^n R_k = 0,$$

$$C_0 - C_1'' + C_2''' - \dots + (-1)^\nu C_\nu^{(2\nu)} - \sum_1^n S_k = 0;$$

pour $a_{1r} = -\frac{m_1}{2}$, $a_{2r} = -\frac{m_2}{2}$, \dots , $a_{nr} = -\frac{m_n}{2}$, $A_r = -MA$, $B_r = -MB$, $C_r = -MC$, les équations différentielles du mouvement du centre de gravité sont

$$M\{-A + A'' - \dots + (-1)^\nu A^{(2\nu)}\} - \sum_1^n Q_k = 0,$$

$$M\{-B + B'' - \dots + (-1)^\nu B^{(2\nu)}\} - \sum_1^n R_k = 0,$$

$$M\{-C + C'' - \dots + (-1)^\nu C^{(2\nu)}\} - \sum_1^n S_k = 0,$$

et par conséquent

$$\bar{H} = -\frac{M}{2}\{A^2 + B^2 + C^2 + A'^2 + B'^2 + C'^2 + \dots + A^{(\nu)^2} + B^{(\nu)^2} + C^{(\nu)^2}\}$$

est le potentiel cinétique du mouvement du centre de gravité, lorsque la masse totale est concentrée en ce point et que les composantes de la force $\sum_1^n Q_k$,

$\sum_1^n R_k$, $\sum_1^n S_k$ agissent sur le point.

Après avoir établi les principes généralisés de la mécanique je me suis appliqué à une recherche purement analytique, afin de voir jusqu'à quel point sont liés à la forme que donne par hypothèse Helmholtz au potentiel cinétique, les théorèmes, énoncés dans son célèbre travail *die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung*, sur la relation entre les forces P_s d'une part, telles qu'elles sont données par les équations de Lagrange comme fonctions des coordonnées et de leur dérivées, et entre les accélérations, les vitesses et les coordonnées d'autre part. Dans l'hypothèse d'une composition arbitraire du potentiel cinétique, lorsque les dérivées s'étendent jusqu'à l'ordre ν , j'obtiens les relations suivantes tout à fait analogues

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma^{(2\nu)}} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s^{(2\nu)}} &= \\ \frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma^{(2\nu-1)}} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s^{(2\nu-1)}} &= (-1)^{\nu+1} 2 \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)} \partial p_\sigma^{(\nu-1)}} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_\sigma^{(\nu)} \partial p_s^{(\nu-1)}} \right\}, \\ \frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma^{(2\nu-1)}} + \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s^{(2\nu-1)}} &= 2\nu \frac{d}{dt} \frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma^{(2\nu)}} = 2\nu \frac{d}{dt} \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s^{(2\nu)}}, \\ \frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma^{(2\nu-2)}} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s^{(2\nu-2)}} &= \frac{2\nu-1}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma^{(2\nu-1)}} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s^{(2\nu-1)}} \right] \end{aligned}$$

etc. et enfin

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}}{\partial p_s'} - \frac{\partial \frac{\partial H}{\partial p_s}}{\partial p_\sigma'} \right] - \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\partial \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}}{\partial p_s''} - \frac{\partial \frac{\partial H}{\partial p_s}}{\partial p_\sigma''} \right] + \dots \\ &\quad - (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \left[\frac{\partial \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}}{\partial p_s^{(\nu)}} - \frac{\partial \frac{\partial H}{\partial p_s}}{\partial p_\sigma^{(\nu)}} \right]; \end{aligned}$$

après avoir ainsi démontré que les théorèmes de Helmholtz, dont il a donné d'importantes interprétations en Physique et en Mécanique, n'ont rien à faire avec le caractère que possède le potentiel cinétique de dépendre seulement des dérivées premières des coordonnées, je puis aborder la démonstration du théorème relatif au potentiel cinétique restreint, énoncé par lui sans preuve, et qui repose, ainsi qu'il le fait ressortir, sur la théorie des fonctions potentielles dans un espace à trois dimensions, théorème d'après lequel, lorsque les expressions de la force P_i satisfont aux équations de condition, il existe toujours un potentiel cinétique, au moyen duquel les forces peuvent s'exprimer sous la forme de Lagrange. En vue de simplifier l'exposition j'ai développé cette démonstration seulement pour des potentiels cinétiques au sens de Helmholtz et pour deux coordonnées indépendantes, mais on peut par la même voie en établir la légitimité pour des potentiels cinétiques de forme toute générale. En employant les relations précédentes entre P_i et les coordonnées, vitesses, etc., l'énoncé relatif à l'existence d'un potentiel cinétique peut être exprimé comme il suit: *Lorsque les expressions P_i sont des fonctions de $p_1, p_2, p'_1, p'_2, p''_1, p''_2$, linéaires par rapport aux dérivées secondes des coordonnées, telles que les trois équations de condition*

$$\frac{\partial P_i}{\partial p''_i} = \frac{\partial P_\sigma}{\partial p''_i}, \quad \frac{\partial P_i}{\partial p'_i} + \frac{\partial P_\sigma}{\partial p'_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial P_\sigma}{\partial p'_i}, \quad \frac{\partial P_i}{\partial p_i} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_i} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P_i}{\partial p'_i} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p'_i} \right)$$

soient satisfaites, il existe toujours une fonction H , ne renfermant pas t , des grandeurs p_1, p_2, p'_1, p'_2 , qui vérifie les deux équations différentielles

$$P_1 = -\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p'_1}, \quad P_2 = -\frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p'_2}.$$

La démonstration du théorème peut être effectuée en mettant P_i sous la forme

$$P_i = f_{0i}(p_1, p_2, p'_1, p'_2) + f_{1i}(p_1, p_2, p'_1, p'_2) p''_1 + f_{2i}(p_1, p_2, p'_1, p'_2) p''_2$$

et en tirant des équations de conditions ci-dessus les relations entre les dérivées des fonctions f_{0i}, f_{1i}, f_{2i} , à l'aide desquelles l'on intégrera les équations de Lagrange précédentes regardées comme équations aux dérivées partielles en H , et de la sorte l'on pourra établir, non seulement l'existence du potentiel cinétique, mais encore sa forme.

A cette recherche se rattache la question des transformations analytiques du potentiel cinétique. Dans son travail déjà cité Helmholtz a fait ressortir deux cas d'équations du mouvement où se présente une diminution dans le nombre des coordonnées, et cela non comme d'habitude parceque la liberté du mouvement du système est soumise à des restrictions, qui s'expriment par des équations entre les coordonnées, mais plutôt à cause de la propriété spéciale du potentiel cinétique et à cause de la nature des équations du mouvement de Lagrange. L'hypothèse, que le potentiel cinétique $H = -T - U$ ne renferme pas p_1, p_2, \dots, p_p et que les forces extérieures correspondantes s'évanouissent, permet à Helmholtz de conclure, qu'en éliminant p'_1, p'_2, \dots, p'_p entre les équations de Lagrange correspondantes, les $\mu - \rho = \sigma$ équations du mouvement restantes prennent, quand on a posé $p_{\rho+\sigma} = p_s$, la forme

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_s} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \dot{p}_s} = \mathfrak{P}_s \quad (s=1, 2, \dots, \sigma)$$

où

$$\mathfrak{H} = (H) - c_1(p'_1) - c_2(p'_2) - \dots - c_p(p'_p),$$

les grandeurs entre parenthèses désignant les valeurs que doivent prendre ces grandeurs après que l'on a exécuté la substitution et c_1, \dots, c_p étant des constantes d'intégration. Le potentiel cinétique \mathfrak{H} renferme ici aussi des termes du premier degré par rapport aux vitesses, et ce cas, par une analogie donnée par la mécanique des corps pondérables, ainsi que d'autres cas appartenant à la physique où le potentiel cinétique renferme aussi des termes linéaires par rapport aux vitesses, Helmholtz les nomme *cas à mouvements cachés*, cas sur lesquels lui aussi bien que HERTZ ont édifié une belle et vaste théorie. Outre ce cas Helmholtz en fait ressortir encore un, qui permet d'effectuer une élimination, à savoir où les forces extérieures P_1, P_2, \dots, P_p sont continuellement nulles et où dans le potentiel cinétique les dérivées premières des coordonnées p_1, p_2, \dots, p_p ne se présentent au second degré que multipliées entr'elles; il montre que les équations du mouvement restantes prennent encore la forme de Lagrange et que le potentiel cinétique représente alors une fonction arbitrairement compliquée des dérivées des coordonnées restantes, et il nomme ce cas le *problème incomplet*.

Ensuite j'attaque le problème de l'élimination des coordonnées entre les équations du mouvement de Lagrange d'une manière tout à fait générale en considérant ma forme généralisée de ces équations, mais, pour simplifier l'exposition, je suppose encore que le potentiel cinétique renferme seulement les dérivées premières des coordonnées. Je trouve d'abord que la condition nécessaire et suffisante pour que les équations du mouvement de Lagrange correspondant aux coordonnées p_1, \dots, p_ρ soient des dérivées exactes, prises par rapport au temps, de fonctions de toutes les coordonnées et des dérivées premières de celles-ci, ne renfermant pas les coordonnées p_1, \dots, p_ρ elles-mêmes, est que le potentiel cinétique ait la forme

$$H = p'_1 \bar{\omega}_1 + \dots + p'_\rho \bar{\omega}_\rho + \mathfrak{p}'_1 \int \left(\frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \mathfrak{p}_1} d\mathfrak{p}_1 + \dots + \frac{\partial \bar{\omega}_\rho}{\partial \mathfrak{p}_1} d\mathfrak{p}_\rho \right) + \dots \\ + \mathfrak{p}'_\sigma \int \left(\frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \mathfrak{p}_\sigma} d\mathfrak{p}_1 + \dots + \frac{\partial \bar{\omega}_\rho}{\partial \mathfrak{p}_\sigma} d\mathfrak{p}_\rho \right) + \Omega(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_\sigma, \mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_\rho),$$

où Ω est une fonction quelconque des grandeurs dans la parenthèse et où $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_\rho$ désignent des fonctions quelconques de $p_1, \dots, p_\rho, \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_\sigma$, qui ne sont soumises qu'à la seule condition

$$\frac{\partial \bar{\omega}_{r_1}}{\partial \mathfrak{p}'_{r_2}} = \frac{\partial \bar{\omega}_{r_2}}{\partial \mathfrak{p}'_{r_1}}.$$

Alors les σ équations du mouvement ultérieures, lorsque des ρ premières, qui prennent la forme

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{p}'_1} = h_1, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{p}'_2} = h_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{p}'_\rho} = h_\rho,$$

l'on tire les grandeurs $\mathfrak{p}'_1, \mathfrak{p}'_2, \dots, \mathfrak{p}'_\rho$ comme fonctions de $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_\sigma$, que l'on opère les substitutions, et que l'on pose

$$\mathfrak{H} = (\Omega) - h_1(\mathfrak{p}'_1) - h_2(\mathfrak{p}'_2) + \dots - h_\rho(\mathfrak{p}'_\rho),$$

se transforment de nouveau en la forme de Lagrange

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}'} = \mathfrak{F}.$$

D'où ce résultat: Dans le cas du potentiel cinétique dans la mécanique des

masses pondérables le cas du mouvement caché considéré par Helmholtz, pour lequel le potentiel cinétique doit être indépendant de certaines des coordonnées, est le cas unique où les équations de Lagrange correspondantes se transforment en dérivées exactes prises par rapport au temps et où — ce qui est alors toujours le cas — on peut effectuer une élimination des coordonnées telle que les équations du mouvement résultantes prennent encore la forme de Lagrange.

D'une manière analogue j'étudie tous les cas, dans lesquels une série d'équations du mouvement d'un système, où les forces extérieures sont nulles, jouit de cette propriété que l'on peut éliminer les coordonnées et leurs dérivées, et, par conséquent, sont aussi résolus tous les cas du mouvement caché généralisé et les problèmes incomplets, où l'on fait l'hypothèse de potentiels cinétiques qui ne dépendent que des coordonnées et de leurs dérivées premières, et cela d'ailleurs d'une manière arbitraire.

Maintenant pour traiter sur un exemple de la mécanique des masses pondérables le cas où certaines des équations du mouvement de Lagrange se transforment en dérivées exactes prises par rapport au temps, j'étudie d'abord le mouvement de trois points matériels m_1, m_2, m_3 , dont les coordonnées sont soumises à une équation de condition

$$z_1 = f(x_1, y_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3),$$

et dont les forces intérieures sont données par une fonction des forces

$$U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3).$$

J'obtiens ce théorème que: la condition nécessaire et suffisante pour que, dans le mouvement de trois points matériels, dont les coordonnées sont soumises à une équation de condition, parmi les huit équations du mouvement il y en ait deux qui se transforment en dérivées exactes prises par rapport au temps, est que l'équation de condition ait la forme

$$z_1 = ax_1 + by_1 + \omega,$$

où a et b sont des constantes et où ω ne dépend que de $x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$, tandis que la fonction des forces a la forme

$$U = (z_1 - ax_1 - by_1 - \omega) F_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3) \\ + F(z_1 - ax_1 - by_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3);$$

dans ce cas, les six équations du mouvement pour les coordonnées $x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ prennent encore la forme de Lagrange pour le potentiel cinétique donné par l'expression

$$\mathfrak{H} = -\frac{m_1}{2(1+a^2+b^2)} \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 + m_1 \frac{ac_1+bc_2}{1+a^2+b^2} \frac{d\omega}{dt} - \frac{3}{2} m_1 \frac{c_1^2(1+b^2) - 2abc_1c_2 + c_2^2(1+a^2)}{1+a^2+b^2} \\ - \frac{m_2}{2} (x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2) - \frac{m_3}{2} (x_3'^2 + y_3'^2 + z_3'^2) - F(\omega, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3).$$

Une application immédiate de ce théorème montre que:

Lorsque de trois points l'un est soumis par une liaison avec les deux autres à la condition que sa distance à un plan fixe reste toujours proportionnelle à la distance entre eux des deux autres points matériels, ces derniers s'attirant suivant la loi de Newton, le mouvement de ce point a lieu suivant la loi de Weber.

On obtient des théorèmes analogues dans le cas où il y a deux équations de condition entre les six coordonnées.

Après avoir résolu toutes ces questions, je me suis appliqué de nouveau à l'étude de la généralisation des principes mécaniques dans le cas du potentiel cinétique général, et, lorsque

$$\zeta = \int_{t_0}^t \left(H + \sum_1^{\mu} P_k p_k \right) dt$$

est défini comme fonction caractéristique, je trouve pour généralisation de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre de Hamilton, l'équation

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \sum_1^{\nu} p_i' \frac{\partial \zeta}{\partial p_i'} + \sum_1^{\mu} p_i'' \frac{\partial \zeta}{\partial p_i''} + \dots + \sum_1^{\mu} p_i^{(\nu-1)} \frac{\partial \zeta}{\partial p_i^{(\nu-1)}} \\ + \sum_1^{\mu} \omega_i \left(t, p_1, \dots, p_{\mu}, \dots, p_1^{(\nu-1)}, \dots, p_{\mu}^{(\nu-1)}, \frac{\partial \zeta}{\partial p_1^{(\nu-1)}}, \dots, \frac{\partial \zeta}{\partial p_{\mu}^{(\nu-1)}} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial p_i^{(\nu-1)}} \\ = H(t, p_1, \dots, p_{\mu}, \dots, p_1^{(\nu-1)}, \dots, p_{\mu}^{(\nu-1)}, \dots, \omega_1, \dots, \omega_{\mu}) + \sum_1^{\mu} P_i p_i$$

Mais le système complet d'équations différentielles de Hamilton trouve aussi une généralisation essentielle au moyen du théorème suivant:

Lorsque des équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_{\rho}'} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p_{\rho}''} + \dots + (-1)^{\nu-1} \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}} \frac{\partial H}{\partial p_{\rho}^{(\nu)}} &= p_{\rho 2\nu-1}, \\ \frac{\partial H}{\partial p_{\rho}''} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p_{\rho}'''} + \dots + (-1)^{\nu-2} \frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}} \frac{\partial H}{\partial p_{\rho}^{(\nu)}} &= p_{\rho 2\nu-2}, \\ &\dots \dots \dots \text{(pour } \rho = 1, 2, \dots, \mu) \\ \frac{\partial H}{\partial p_{\rho}^{(\nu-1)}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p_{\rho}^{(\nu)}} &= p_{\rho \nu+1}, \\ \frac{\partial H}{\partial p_{\rho}^{(\nu)}} &= p_{\rho \nu}, \end{aligned}$$

dont les $\nu-1$ premières sont respectivement linéaires en $p_{\rho}^{(2\nu-1)}$, $p_{\rho}^{(2\nu-2)}$, ..., $p_{\rho}^{(\nu+1)}$, l'on tire les $\mu\nu$ grandeurs $p_{\rho}^{(\nu)}$, $p_{\rho}^{(\nu+1)}$, ..., $p_{\rho}^{(2\nu-1)}$ exprimées au moyen de p_{ρ} , p_{ρ}' , ..., $p_{\rho}^{(\nu-1)}$, ..., $p_{\rho 2\nu-1}$, $p_{\rho 2\nu-2}$, ..., $p_{\rho \nu}$ et qu'on les porte dans l'expression de l'énergie, que l'on désignera par (E) , alors les équations du mouvement de Lagrange généralisées peuvent être remplacées par le système généralisé d'équations différentielles hamiltoniennes

$$\begin{aligned} \frac{dp_{s2\nu-1}}{dt} &= \frac{\partial(E)}{\partial p_s}, & \frac{dp_{s2\nu-2}}{dt} &= \frac{\partial(E)}{\partial p_s'}, & \dots, & \frac{dp_{s\nu}}{dt} &= \frac{\partial(E)}{\partial p_s^{(\nu-1)}}, \\ \frac{dp_s^{(\nu-1)}}{dt} &= -\frac{\partial(E)}{\partial p_{s\nu}}, & \frac{dp_s^{(\nu-2)}}{dt} &= -\frac{\partial(E)}{\partial p_{s\nu+1}}, & \dots, & \frac{dp_s}{dt} &= -\frac{\partial(E)}{\partial p_{s2\nu-1}}. \end{aligned}$$

Qu'il me soit permis, finalement, d'attirer l'attention sur le théorème suivant, provenant de mes recherches sur la nature des intégrales de ce système généralisé d'équations différentielles de Hamilton.

Si le potentiel cinétique est une fonction algébrique du temps, des coordonnées et de leurs dérivées prises par rapport au temps jusqu'à l'ordre ν inclus, et si le système généralisé d'équations différentielles de Hamilton possède une fonction intégrale algébrique, celle-ci est elle-même ou bien une

fonction rationnelle du potentiel cinétique, du temps, des coordonnées et de leurs dérivées prises par rapport au temps jusqu'à l'ordre $2\nu - 1$ inclus, ou bien c'est une fonction composée algébriquement de pareilles fonctions intégrales rationnelles.

Mais j'ai déjà trop longuement profité de votre patience. — Je serais très heureux si l'une ou l'autre des remarques faites dans les précédentes communications pouvait vous intéresser. — Pour l'instant veuillez etc. etc.

Signé: *Leo Königsberger.*

SUR LES PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE.

Extrait d'une seconde lettre adressée à l'éditeur

PAR

LEO KÖNIGSBERGER

à HEIDELBERG.

[Traduit par L. Laugel.]

Puisque vous attachez un certain intérêt à mes recherches sur la mécanique, je prends la liberté de vous communiquer encore les quelques résultats suivants, qui paraîtront prochainement dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin.

Si l'on nomme *potentiel* la fonction des forces correspondant à une force $f(r, r', r'', \dots, r^{(2\nu)})$, qui dépend de la distance et de ses dérivées prises par rapport au temps jusqu'à l'ordre 2ν inclus — à supposer qu'une telle fonction existe — lorsque cette fonction des forces W , dépendant de r et des ν premières dérivées et définie par l'équation

$$f(r, r', r'', \dots, r^{(2\nu)}) = \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial r'} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial W}{\partial r''} - \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial W}{\partial r^{(\nu)}},$$

renferme comme terme le plus élevé une expression de la forme

$$r^{(\nu)^\alpha \nu} r^{(\nu-1)^\alpha \nu-1} \dots r'^{\alpha_2} r'^{\alpha_1} \left(\frac{c}{r} + c_1 \right) \quad \text{ou} \quad r^{(\nu)^\alpha \nu} r^{(\nu-1)^\alpha \nu-1} \dots r'^{\alpha_2} r'^{\alpha_1} \left(\frac{c}{r^2} + c_1 r + c_2 \right),$$

selon que la grandeur

$$\varepsilon_1 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \dots + (-1)^{\nu-1} \alpha_\nu \pmod{2}$$

déterminée par les équations

$$\alpha_\nu = 2k_\nu + \varepsilon_\nu, \quad \alpha_{\nu-1} - \varepsilon_\nu = 2k_{\nu-1} + \varepsilon_{\nu-1}, \quad \dots, \quad \alpha_2 - \varepsilon_3 = 2k_2 + \varepsilon_2, \\ \alpha_1 - \varepsilon_2 = 2k_1 + \varepsilon_1,$$

où les grandeurs ε désignent les nombres 0 ou 1, a pour valeur 0 ou 1, alors l'équation de Laplace généralisée pour le potentiel général sera

$$\Delta_{00} \Delta_{10}^{\varepsilon_1} \Delta_{11}^{k_1} \Delta_{21}^{\varepsilon_2} \Delta_{22}^{k_2} \dots \Delta_{\nu-1, \nu-2}^{\varepsilon_{\nu-1}} \Delta_{\nu-1, \nu-1}^{k_{\nu-1}} \Delta_{\nu, \nu-1}^{\varepsilon_\nu} \Delta_{\nu\nu}^{k_\nu} W = 0$$

pour une masse quelconque et pour un point situé en dehors de celle-ci, où

$$\Delta_{\nu\lambda}'' 1''$$

désigne l'expression μ fois itérée

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^{(x)} \partial x^{(\lambda)}} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^{(x)} \partial y^{(\lambda)}} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^{(x)} \partial z^{(\lambda)}},$$

et l'on a par conséquent pour la loi de Weber

$$\Delta_{00} \Delta_{11} W = 0.$$

Ensuite pour obtenir pour des potentiels qui dépendent de la distance et de ses dérivées premières la loi de Poisson généralisée pour un point situé à l'intérieur de la masse, je développe le potentiel d'une sphère creuse dont les couches concentriques sont homogènes et de rayons R_0 et R_1 , et je trouve dans l'hypothèse de la loi de Weber pour le potentiel d'un point situé à l'extérieur de la sphère ou à l'intérieur de l'espace creux, l désignant la distance au centre de la sphère, v la vitesse du point, l' la projection de v sur la direction l , et σ la densité

$$W_a = M \left(\frac{1}{l} + \frac{l'^2}{k^2 l} \right) - \frac{4\pi}{3k^2} \frac{3l'^2 - v^2}{l^3} \int_{R_0}^{R_1} \sigma \rho^4 d\rho$$

et

$$W_i = 4\pi \int_{R_0}^{R_1} \sigma \rho d\rho + \frac{4\pi}{3k^2} v^2 \int_{R_0}^{R_1} \sigma \rho d\rho;$$

le potentiel pour un point situé dans l'espace creux est donc indépendant de la situation du point et de la direction de la vitesse et a la forme

$a + bv^2$, où a et b sont des constantes. Si le point est situé dans l'espace sphérique annulaire, l'on a

$$W_m = 4\pi \left(\frac{1}{l} + \frac{v^2}{k^2 l} \right) \int_{R_0}^l \sigma \rho^2 d\rho - \frac{4\pi}{3k^2} \frac{3l^2 - v^2}{l^2} \int_{R_0}^l \sigma \rho^4 d\rho \\ + 4\pi \int_l^{R_1} \sigma \rho d\rho + \frac{4\pi}{3k^2} v^2 \int_l^{R_1} \sigma \rho d\rho$$

et par conséquent pour une sphère complète homogène

$$W_m = 2\pi\sigma \left(R^2 - \frac{l^2}{3} \right) + \frac{8\pi\sigma}{15k^2} l^2 l^2 + \frac{2\pi\sigma}{3k} R^2 l^2 - \frac{2\pi\sigma}{5k^2} l^2 v^2.$$

D'où l'on conclut après une courte recherche, que l'équation de Poisson généralisée dans l'hypothèse de la loi de Weber est

$$\Delta_{00} \Delta_{11} W = - \frac{8\pi}{k^2} \sigma,$$

où σ désigne la densité de la masse attirante au point considéré.

Le mouvement d'un point compris dans l'espace annulaire sphérique, dans l'hypothèse de la loi de Weber, conduit à des intégrales hyperelliptiques simples.

Heidelberg le 5 janvier 1898.

QUELQUES REMARQUES SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES

PAR

JULIUS PETERSEN

À COPENHAGUE.

Soit $\varphi(z)$ une fonction uniforme, ne possédant aucun point essentiel à distance finie. Posons

$$(1) \quad \log \varphi(z) = \log R + \theta i,$$

R désignant le module et θ l'argument de la fonction; l'on a alors

$$\frac{\partial \log R}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial y}; \quad \frac{\partial \log R}{\partial y} = -\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial r} \frac{x}{r} - \frac{\partial R}{\partial \theta} \frac{y}{r^2} \right) &= \frac{\partial \theta}{\partial r} \frac{y}{r} + \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \frac{x}{r^2}, \\ \frac{1}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial r} \frac{y}{r} + \frac{\partial R}{\partial \theta} \frac{x}{r^2} \right) &= -\frac{\partial \theta}{\partial r} \frac{x}{r} + \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \frac{y}{r^2}, \end{aligned}$$

formules d'où l'on tire

$$(2) \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = -\frac{1}{Rr} \frac{\partial R}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \theta} = \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r};$$

$$(3) \quad d\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \log R}{\partial \theta} dr + r \frac{\partial \log R}{\partial r} d\theta.$$

Si l'on intègre cette dernière expression, en prenant pour chemin d'intégration une courbe fermée, l'on obtient, comme l'on sait, pour résultat $2\pi n$, où n désigne le nombre des zéros diminué de celui des infinis, respectivement situés dans la partie du plan limitée par la courbe. Si la courbe est une circonférence ayant l'origine pour centre, on a $dr = 0$, et

$$(4) \quad n = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial \log R}{\partial r} r d\theta.$$

Cette formule a une intéressante analogie avec la formule de GAUSS, qui détermine la quantité d'électricité contenue dans une partie de l'espace limitée par une surface géométrique, savoir :

$$E = \frac{1}{4\pi} \int N d\psi$$

où $d\psi$ désigne l'élément de surface et N la force normale. Si nous concevons qu'en tout zéro et en tout infini soit concentrée une masse 1 repoussant et attirant respectivement avec une force inversement proportionnelle à la distance, l'on aura pour un zéro la force normale

$$\frac{1}{\rho} \cos \varphi,$$

ρ désignant la distance et φ l'angle (r, ρ) . En multipliant par ds et en intégrant le long de la circonférence du cercle, l'on obtient pour

$$\int \frac{1}{\rho} \cos \varphi ds$$

la valeur 2π , lorsque le point est à l'intérieur du cercle, et la valeur zéro, lorsqu'il est à l'extérieur du cercle. L'on a ainsi

$$u = \frac{1}{2\pi} \int N ds$$

où N désigne la force normale totale ayant son origine en tous les zéros et infinis. Si l'on suppose que les zéros et infinis donnent naissance à un potentiel $\log R$, la force normale sera $\frac{\partial \log R}{\partial r}$ et nous retombons sur notre formule (4). Pour le cercle on peut mettre une courbe fermée quelconque.

De cette formule (4) l'on peut en déduire d'autres par voie d'intégration; pour plus de simplicité nous supposons qu'il n'y a pas d'infinis, c'est à dire que notre fonction transcendante est entière. En multipliant par $\frac{dr}{r}$ et en intégrant de 0 à r il vient

$$(5) \quad \int_0^r \frac{u dr}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \log \frac{R}{R_0} d\theta,$$

où R_0 est la valeur de R au centre du cercle. Désignons maintenant par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les modules des zéros situés à l'intérieur du cercle du rayon r , rangés par ordre de grandeur. Pour $0 < r < \alpha_1$, on a $n = 0$; pour $\alpha_1 < r < \alpha_2$, on a $n = 1, \dots$ etc., et alors

$$\int_0^r \frac{n}{r} dr = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dr}{r} + 2 \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{dr}{r} + \dots + n \int_{\alpha_n}^r \frac{dr}{r} = \log \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + 2 \log \frac{\alpha_3}{\alpha_2} + \dots + n \log \frac{r}{\alpha_n},$$

d'où

$$(6) \quad \log \frac{r^n}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{R}{R_0} d\theta,$$

où le second membre détermine la valeur moyenne de $\log \frac{R}{R_0}$ sur le cercle.

La formule nous montre que cette valeur est continue.¹

Posons

$$(7) \quad \frac{\log n}{\log \alpha_n} = \rho_n \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\alpha_n^{\rho_n}} = \frac{1}{n}.$$

Je supposerai encore que ρ_n a une limite ρ , ou, d'une manière plus précise que, ε désignant une grandeur positive qui peut devenir aussi petite que l'on veut, l'on peut toujours trouver une valeur de r telle que, pour cette valeur de r et toute valeur plus grande, on ait

$$\frac{1}{\alpha_1^\varepsilon} > \frac{1}{\alpha_n^\varepsilon} > \frac{1}{n^\varepsilon}.$$

L'on reconnaît que ρ est le nombre que M. BOREL appelle l'ordre de la fonction. La série

$$\sum \frac{1}{\alpha_n^\rho}$$

se trouvant sur la limite de convergence et divergence, le genre p de la fonction doit être le plus grand nombre entier contenu en ρ , si ρ est fractionnaire; si, au contraire, ρ est un nombre entier on aura $p = \rho - 1$ ou $p = \rho$. Dans les deux cas nous supposons que le genre est déterminé par les facteurs primaires de la fonction.

¹ Monsieur JENSEN m'a informé qu'il a déjà démontré cette formule par une autre voie et en a fait l'objet d'une communication à la Société mathématique de Copenhague.

Désignons par \overline{R} la plus grande valeur de R sur le cercle; de la formule (6) vient

$$(8) \quad \overline{R} > R_0 \frac{r^n}{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

En définissant ρ comme précédemment l'on peut, pour r suffisamment grand, écrire

$$a_1 a_2 \dots a_n = (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n)^{\frac{1}{\rho}} = \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{\rho}}; \quad n = r^n,$$

d'où

$$\overline{R} > e^{\frac{1}{\rho} r \rho}$$

où le facteur fini $\frac{1}{\rho}$ peut être omis. Lorsqu'une fonction croît comme e^{r^μ} , où μ doit être pris avec une définition analogue à celle de ρ , μ représente alors le nombre que M. BOREL nomme l'ordre apparent de la fonction. La formule trouvée montre qu'on a toujours

$$(9) \quad \mu \geq \rho.$$

D'après les recherches de MM. HADAMARD et BOREL, on a $\mu = \rho$ quand le genre est déterminé par les facteurs primaires, ce qui est toujours le cas lorsque μ est fractionnaire. Je vais en donner une démonstration nouvelle pour le cas où $p = 0$ et conséquemment $\rho \leq 1$.

On a

$$(10) \quad \overline{R} < R_0 \left(1 + \frac{r}{a_1}\right) \left(1 + \frac{r}{a_2}\right) \dots$$

Lorsque, dans le cercle de rayon r , il se présente n zéros, on a, pour $q > n$

$$1 + \frac{r}{a_q} \leq 1 + \frac{r^{q+n+\varepsilon}}{a_j^{q+n+\varepsilon}},$$

où ε désigne une petite grandeur positive qui s'évanouit pour $\rho = 1$. D'après un théorème connu, pour des valeurs positives b_1, b_2, \dots, b_m , on a

$$\sqrt[m]{b_1 \cdot b_2 \dots b_m} < \frac{1}{m} (b_1 + b_2 + \dots + b_m);$$

par conséquent

$$\left(1 + \frac{r}{a_{n+1}}\right) \left(1 + \frac{r}{a_{n+2}}\right) \dots \left(1 + \frac{r}{a_{n+m}}\right) < \left(1 + \frac{r^{\rho+\varepsilon}}{m} \sum_{n+1}^{n+m} \frac{1}{a_q^{\rho+\varepsilon}}\right)^m.$$

Si m croît indéfiniment, la somme au second membre aura une valeur finie que nous désignerons par k , et l'on a

$$\lim \left(1 + \frac{kr^{\rho+\varepsilon}}{m}\right)^m = e^{kr^{\rho+\varepsilon}}.$$

Pour r suffisamment grand, on a

$$\left(1 + \frac{r}{a_1}\right) \left(1 + \frac{r}{a_2}\right) \dots \left(1 + \frac{r}{a_n}\right) < \frac{(2r)^n}{a_1 a_2 \dots a_n} < e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

et (10) donne

$$\overline{R} < e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

c'est à dire

$$\mu \leq \rho,$$

et, par conséquent, en ayant égard à la formule (9) pour toute fonction de genre zéro

$$\mu = \rho.$$

Maintenant supposons que l'on ait $p > 0$, et soient α, β les racines de l'équation $x^{p+1} = 1$.

L'on a

$$\varphi(z) \varphi(\alpha z) \varphi(\beta z) \dots = \left(1 - \frac{z^{p+1}}{b_1^{p+1}}\right) \left(1 - \frac{z^{p+1}}{b_2^{p+1}}\right) \dots,$$

où b_1, b_2, \dots sont les zéros de $\varphi(z)$. Comme le produit est de genre zéro par rapport à z^{p+1} , on voit que pour la fonction

$$F(z) = \varphi(z) \varphi(\alpha z) \varphi(\beta z) \dots$$

on a $\mu = \rho$. Ce dernier nombre est le même pour $F(z)$ et $\varphi(z)$, mais je n'ai pas réussi à démontrer directement que les deux fonctions ont même ordre apparent (le nombre μ), quand le genre de $\varphi(z)$ est déterminé par les facteurs primaires. Si p n'est pas déterminé par ces facteurs, le produit doit toujours croître moins rapidement que $\varphi(z)$.

Je donnerai maintenant une seconde application de la formule (4):
D'après cette formule on a

$$\int_r^\infty \frac{n dr}{r^{\rho+1}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_r^\infty \frac{\partial \log R}{\partial r} \cdot \frac{dr}{r^\rho},$$

où l'on a écrit ρ au lieu de $\rho + \varepsilon$. L'on a ici

$$\int_r^\infty \frac{n dr}{r^{\rho+1}} = \frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{a_n^\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{n}{r^\rho},$$

où la série au second membre est convergente pour ε aussi petit que l'on veut. D'autre part, en intégrant par parties l'on a

$$\int_r^\infty \frac{\partial \log R}{\partial r} \frac{dr}{r^\rho} = \left[\frac{\log R}{r^\rho} \right]_r^\infty + \rho \int_r^\infty \log R \frac{dr}{r^{\rho+1}}.$$

Si l'on suppose que $\mu = \rho$,

$$\frac{\log R}{r^\rho}$$

sera égal à zéro pour $r = \infty$, d'où

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{a_n^\rho} = -\frac{n}{r^\rho} - \frac{\rho}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\log R}{r^\rho} d\theta + \frac{\rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_r^\infty \frac{\log R}{r^{\rho+2}} r dr d\theta,$$

ce qui fait voir que la valeur moyenne de

$$\frac{\log R}{r^{\rho+2+\varepsilon}}$$

sur l'anneau circulaire infini, multipliée par la surface, est finie pour une valeur de $\varepsilon > 0$, si petite qu'elle soit, mais devient infini pour $\varepsilon = 0$.

ÜBER FUNDAMENTALSYSTEME FÜR SYMMETRISCHE FUNKTIONEN

VON

KARL THEODOR VAHLEN

in KÖNIGSBERG I. Pr.

I.

Es seien x_1, x_2, \dots, x_n die Wurzeln der Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0,$$

und s_1, s_2, s_3, \dots die natürlichen Potenzsummen derselben.

Dann ist die Entwicklung bekannt:

$$1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = \prod_k (1 - x_k z) = e^{\sum_k \lg(1 - x_k z)} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

gleich

$$e^{-s_1 z - \frac{s_2 z^2}{2} - \frac{s_3 z^3}{3} - \dots} = 1 - s_1 z + \frac{s_2 + s_1^2}{2} z^2 + \left(-\frac{s_3}{3} + \frac{s_1 s_2}{2} - \frac{s_1^3}{6} \right) z^3 + \dots,$$

aus der durch Koeffizientenvergleichung folgt:

$$a_1 = -s_1,$$

$$a_2 = -\frac{s_2}{2} + \frac{s_1^2}{2},$$

$$a_3 = -\frac{s_3}{3} + \frac{s_1 s_2}{2} - \frac{s_1^3}{6}$$

II. S. W.

Da jede rationale symmetrische Funktion von x_1, x_2, \dots, x_n eine rationale Funktion der a_1, a_2, \dots, a_n ist, so folgt dasselbe für s_1, s_2, \dots, s_n oder:

Die n ersten Potenzsummen von x_1, x_2, \dots, x_n bilden ein Fundamentalsystem für symmetrische Funktionen von x_1, x_2, \dots, x_n .

II.

Wie die vorhergehende Entwicklung auf dem Additionstheorem der Exponentialfunktion, so beruht die folgende auf dem des hyperbolischen Tangens:

$$\operatorname{tgh}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\operatorname{tgh} \alpha_1 + \operatorname{tgh} \alpha_2}{1 + \operatorname{tgh} \alpha_1 \cdot \operatorname{tgh} \alpha_2},$$

woraus allgemein:

$$\operatorname{tgh}(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = \frac{S \operatorname{tgh} \alpha_1 + S \operatorname{tgh} \alpha_1 \cdot \operatorname{tgh} \alpha_2 \cdot \operatorname{tgh} \alpha_3 + \dots}{1 + S \operatorname{tgh} \alpha_1 \cdot \operatorname{tgh} \alpha_2 + \dots},$$

folgt; hier stehen im Zähler die combinatorischen Summen ungrader Ordnung, im Nenner diejenigen grader Ordnung.

Diesem Satz zufolge wird nämlich:

$$\frac{a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \dots}{1 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots} = - \operatorname{tgh} \sum_k \operatorname{arc} \operatorname{tgh} x_k z \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

also gleich $-\operatorname{tgh}\left(s_1 z + s_3 \frac{z^3}{3} + s_5 \frac{z^5}{5} + \dots\right)$. Daher muss diese scheinbar transscendente Funktion von z eine rationale Funktion n^{ter} Ordnung

$$\frac{a_1 z + a_3 z^3 + \dots}{1 + a_2 z^2 + \dots}$$

sein; woraus folgt, dass ihre Kettenbruchentwicklung:

$$-\operatorname{tgh}\left(s_1 z + s_3 \frac{z^3}{3} + s_5 \frac{z^5}{5} + \dots\right) = \frac{c_0 z}{1 + \frac{c_1 z^2}{1 + \frac{c_2 z^2}{1 + \dots}}}$$

spätestens mit $c_{n-1} z^2$ abbrechen muss.

Wir wollen zeigen, dass in diese Entwicklung nur die Potenzsummen $s_1, s_3, s_5, \dots, s_{2n-1}$ eintreten.

Multipliziert man mit $c_0 x$ und setzt $x = z^2$, so kommt:

$$\frac{c_0 z}{1 + \frac{c_1 z^2}{1 + \frac{c_2 z^2}{1 + \dots}}} = \frac{c_0 z}{1 + \frac{c_1 z^2}{1 + \frac{c_2 z^2}{1 + \dots}}} + z^{2n+1} \mathfrak{P}(z^2),$$

woraus hervorgeht, dass man die Entwicklung von

$$\operatorname{tgh}\left(s_1 z + s_3 \frac{z^3}{3} + s_5 \frac{z^5}{5} + \dots\right)$$

nach Potenzen von z nur bis z^{2n-1} zu verwenden braucht, so dass in den c_0, c_1, \dots, c_{n-1} nur die Potenzsummen $s_1, s_3, \dots, s_{2n-1}$ vorkommen.

Verwandelt man den Kettenbruch:

$$\frac{c_0 z}{1 + \frac{c_1 z^2}{1 + \dots}} \quad 1 + c_{n-1} z^2$$

in einen gewöhnlichen und vergleicht ihn mit $\frac{a_1 z + a_3 z^3 + \dots}{1 + a_2 z^2 + \dots}$, so ergeben sich die a_1, a_2, \dots, a_n als rationale Funktionen von c_0, c_1, \dots, c_{n-1} , also auch als rationale Funktionen von $s_1, s_3, \dots, s_{2n-1}$. Daher der Borchardt'sche Satz: ¹

Die n ersten Potenzsummen mit ungeradem Index bilden ein Fundamentalsystem für symmetrische Funktionen.

Wir suchen die explicite Darstellung der a_1, a_2, \dots, a_n durch die $s_1, s_3, \dots, s_{2n-1}$.

Die Entwicklung von

$$\frac{c_0 z}{1 + \frac{c_1 z^2}{1 + \dots}} \quad 1 + c_4 z^2$$

¹ C. W. BORCHARDT, *Über eine Eigenschaft der Potenzsummen ungerader Ordnung*. Monatsberichte der Berliner Akademie, Juni 1857, p. 301. Gesammelte Werke, herausgegeben von G. Hettner, p. 107—118.

in eine Potenzreihe hat die Form:

$$c_0 z - c_0 c_1 z^3 + (c_0 c_1 c_2 + c_0 c_1^2) z^5 + \dots (-1)^k (c_0 c_1 \dots c_k + g_k(c_0, c_1, \dots, c_{k-1})) z^{2k+1} \\ + g_{k+1}(c_0, c_1, \dots, c_k) z^{2k+3} + \dots$$

wo unter g_k, g_{k+1} ganze rationale Funktionen verstanden sind. Man beweist dies durch den Schluss von k auf $k+1$, indem man

$$\frac{c_k}{1 + c_{k+1} z^2} = c_k - c_k c_{k+1} z^2 + \dots$$

für c_k einsetzt. Durch Vergleichung mit

$$- \operatorname{tgh} \left(s_1 z + s_3 \frac{z^3}{3} + s_5 \frac{z^5}{5} + \dots \right) = S_1 z + S_3 z^3 + S_5 z^5 + \dots$$

wo S_{2k+1} rational und ganz von $s_1, s_3, \dots, s_{2k+1}$ und von s_{2k+1} nur linear abhängt, ergibt sich c_k als rationale Funktionen von $s_1, s_3, \dots, s_{2k+1}$, deren Zähler s_{2k+1} nur linear, deren Nenner s_{2k+1} gar nicht und s_{2k-1} nur linear enthält.

Die Rechnung ergibt z. B.:

$$c_0 = -s_1,$$

$$c_1 = \frac{1}{3} \frac{s_1^3 - s_1}{s_1},$$

$$c_2 = \frac{1}{15} \frac{s_1^5 - 5s_1^3 s_3 + 9s_1 s_5 - 5s_3^2}{s_1(s_1^3 - s_3)}.$$

Die Verwandlung von:

$$\frac{c_0 z}{1 + \frac{c_1 z^2}{1 + \frac{c_2 z^2}{1 + \dots}}} \quad \text{in} \quad \frac{a_1 z + a_3 z^3 + \dots}{1 + a_2 z^2 + \dots}$$

ergibt:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= c_0, \\
 a_2 &= S c_k, & (k=1, 2, \dots, n-1) \\
 a_3 &= S c_0 c_k, & (k=2, 3, \dots, n-1) \\
 a_4 &= S c_h c_k, & (h, k=1, 2, \dots, n-1) \\
 & & h < k-1 \\
 a_5 &= c_0 S c_h c_k, & (h, k=2, 3, \dots, n-1) \\
 & & h < k-1 \\
 & \dots \dots \dots \\
 a_n &= c_{n-1} c_{n-2} c_{n-3} \dots
 \end{aligned}$$

Hier sind unter den S combinatorische Summen mit Ausschluss der Sequenzen $c_1 c_2, c_2 c_3, \dots, c_{n-2} c_{n-1}$ zu verstehen.

Daraus folgt im Besonderen, dass a_n eine rationale Funktion von $s_1, s_2, \dots, s_{2n-1}$ ist, welche s_{2n-1} nur im Zähler und dort linear, und s_{2n-3} im Nenner linear enthält.

Wenn die Kettenbruchentwicklung von $\text{tgh}\left(s_1 z + s_2 \frac{z^2}{3} + \dots\right)$ wirklich erst mit c_{n-1} abbricht, so sind die a_1, a_2, \dots, a_n vollkommen bestimmte Funktionen von $s_1, s_3, \dots, s_{2n-1}$, d. h. das System:

$$\begin{aligned}
 x_1 + \dots + x_n &= s_1, \\
 x_1^3 + \dots + x_n^3 &= s_3, \\
 &\dots \dots \dots \\
 x_1^{2n-1} + \dots + x_n^{2n-1} &= s_{2n-1}
 \end{aligned}$$

ist eindeutig, durch ein Wurzelsystem x_1, x_2, \dots, x_n lösbar. Jede symmetrische Funktion der x_1, x_2, \dots, x_n , z. B. auch s_{2n+1} wird rationale Funktion von $s_1, s_3, \dots, s_{2n-1}$, also:

$$s_{2n+1} = \frac{Q_n(s_1, s_3, \dots, s_{2n-1})}{P_n(s_1, s_3, \dots, s_{2n-1})},$$

wo P_n und Q_n ganze rationale teilerfremde Funktionen von $s_1, s_3, \dots, s_{2n-1}$ sind. Wir wollen die irreduktible ganze Funktion:

$$s_{2n+1} P_n(s_1, s_3, \dots, s_{2n-1}) - Q_n(s_1, s_3, \dots, s_{2n-1})$$

von $s_1, s_2, \dots, s_{2n+1}$ mit:

$$R_{n+1}(s_1, s_2, \dots, s_{2n+1})$$

bezeichnen.

Dann folgt also aus dem Bestehen der $n + 1$ Gleichungen:

$$x_1 + \dots + x_n = s_1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_1^{2n+1} + \dots + x_n^{2n+1} = s_{2n+1}$$

die Gleichung:

$$R_{n+1}(s_1, s_2, \dots, s_{2n+1}) = 0.$$

Bricht aber der Kettenbruch schon mit $c_{n-k-1}z^2$ ab, so ist

$$\frac{\frac{c_0 z}{1 + \frac{c_1 z^2}{1 + \dots \frac{c_{n-k-1} z^2}{1 + \dots}}}}{1 + \frac{c_1 z^2}{1 + \dots \frac{c_{n-k-1} z^2}{1 + \dots}}} = \frac{a'_1 z + a'_2 z^3 + \dots}{1 + a'_2 z^2 + \dots}$$

eine gebrochene Funktion $n - k^{\text{ten}}$ Grades, also

$$\frac{\frac{c'_0 z}{1 + \frac{c'_1 z^2}{1 + \dots \frac{c'_{n-k-1} z^2}{1 + \dots}}}}{1 + \frac{c'_1 z^2}{1 + \dots \frac{c'_{n-k-1} z^2}{1 + \dots}}} = -1$$

eine Gleichung $n - k^{\text{ten}}$ Grades. Um dieselbe in eine Gleichung n^{ten} Grades zu verwandeln, erweitere man

$$\frac{a'_1 z + a'_2 z^3 + \dots}{1 + a'_2 z^2 + \dots}$$

mit dem unbestimmten Faktor:

$$1 + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z^4 + \dots + \alpha_{\left[\frac{k}{2}\right]} z^{2\left[\frac{k}{2}\right]}$$

und füge für ungrades k noch das Glied $a_n z^n$ mit $a_n = 0$ hinzu. Nuncmehr ergeben sich a_1, a_2, \dots, a_n als rationale Funktionen von s_1, s_2, \dots ,

s_{2n-1} und den $\left[\frac{k}{2}\right]$ unbestimmten Grössen $\alpha_1, \dots, \alpha_{\left[\frac{k}{2}\right]}$. Bezeichnet man die n Wurzeln der Gleichung:

$$(a'_1 z + a'_2 z^2 + \dots) \left(1 + \alpha_1 z^2 + \dots + \alpha_{\left[\frac{k}{2}\right]} z^{2\left[\frac{k}{2}\right]} \right) \\ + (1 + a'_2 z^2 + \dots) \left(1 + \alpha_1 z^2 + \dots + \alpha_{\left[\frac{k}{2}\right]} z^{2\left[\frac{k}{2}\right]} \right) = 0$$

mit $\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}$, so genügen also x_1, x_2, \dots, x_n den Gleichungen:

$$x_1 + \dots + x_n = s_1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_1^{2n-1} + \dots + x_n^{2n-1} = s_{2n-1};$$

es sind aber $\left[\frac{k}{2}\right]$ Paare conträgleicher Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_{2\left[\frac{k}{2}\right]}$, vorhanden, Wurzeln von:

$$z^{\left[\frac{k}{2}\right]} + \dots + \alpha_{\left[\frac{k}{2}\right]} = 0,$$

und $k - 2\left[\frac{k}{2}\right]$ Wurzeln Null, nämlich eine, x_k , oder keine. Daher bestehen die Gleichungen:

$$x_{k+1} + \dots + x_n = s_1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_{k+1}^{2n-1} + \dots + x_n^{2n-1} = s_{2n-1},$$

und es ist:

$$R_{n-k+1}(s_1, s_3, \dots, s_{2(n-k)+1}) = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$R_n(s_1, s_3, \dots, s_{2n-1}) = 0.$$

Für den Fall der Unbestimmtheit ist mindestens $k=2$, also mindestens:

$$R_n(s_1, s_3, \dots, s_{2n-1}) = 0 \quad \text{und} \quad R'_{n-1}(s_1, s_3, \dots, s_{2n-3}) = 0.$$

erfüllt ist, so dass bei beliebigem $x_1 = -x_2$ das Gleichungssystem besteht:

$$\begin{aligned} x_1 + \dots + x_n &= s_1, \\ \dots & \\ x_1^{2n-1} + \dots + x_n^{2n-1} &= s_{2n-1}. \end{aligned}$$

Also: Der Fall der Unbestimmtheit tritt dann und nur dann ein, wenn

$$R_n(s_1, s_2, \dots, s_{2n-1}) = 0$$

und

$$R_{n-1}(s_1, s_2, \dots, s_{2n-3}) = 0$$

sind.

Wir wollen der späteren Anwendungen wegen noch das Corollar aussprechen:

Wenn $R_n(s_1, \dots, s_{2n-1}) = 0$ ist, so tritt der Fall der Unbestimmtheit dann und nur dann ein, wenn noch $R_{n-1}(s_1, s_2, \dots, s_{2n-3}) = 0$ ist.

Es werde jetzt der ordinäre Fall

$$R_n(s_1, s_2, \dots, s_{2n-1}) \neq 0$$

betrachtet. Aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 + \dots + x_{k-1} + x_{k+1} + \dots + x_n &= s_1 - x_k, \\ \dots & \\ x_1^{2n-1} + \dots + x_{k-1}^{2n-1} + x_{k+1}^{2n-1} + \dots + x_n^{2n-1} &= s_{2n-1} - x_k^{2n-1} \end{aligned}$$

folgt:

$$R_n(s_1 - x_k, s_2 - x_k^2, \dots, s_{2n-1} - x_k^{2n-1}) = 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n,$$

d. h. die Gleichung

$$R_n(s_1 - x, s_2 - x^2, \dots, s_{2n-1} - x^{2n-1}) = 0$$

hat die n Wurzeln x_1, x_2, \dots, x_n . Sie hat keine weitere Wurzel; denn wäre etwa ξ_n eine solche, und $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ die zugehörige Lösung des Systems:

$$\begin{aligned} \xi_1 + \dots + \xi_{n-1} &= s_1 - \xi_n, \\ \dots & \\ \xi_1^{2n-1} + \dots + \xi_{n-1}^{2n-1} &= s_{2n-1} - \xi_n^{2n-1}, \end{aligned}$$

Demnach wird bis auf einen Zahlenfaktor:

$$a_n = \frac{R_n}{R_{n-1}}, \quad a_{n-1} = \frac{R_n^{(1)}}{R_{n-1}} \quad \text{u. s. w.}$$

Durch Verbindung mit

$$a_n = c_{n-1} c_{n-3} c_{n-5} \dots$$

folgt jetzt:

$$c_{n-1} c_{n-3} c_{n-5} \dots = \frac{R_n}{R_{n-1}}.$$

Natürlich ist ebenso allgemein:

$$c_{k-1} c_{k-3} c_{k-5} \dots = \frac{R_k}{R_{k-1}} \quad (k = n, n-1, \dots)$$

bis zu

$$c_3 c_1 = \frac{R_4}{R_3},$$

$$c_2 c_0 = \frac{R_3}{R_2},$$

$$c_1 = \frac{R_2}{R_1},$$

$$c_0 = \frac{R_1}{R_0},$$

wo $R_0 = 1$ zu setzen ist. Durch Division der Gleichungen:

$$c_{k-1} c_{k-3} c_{k-5} \dots = \frac{R_k}{R_{k-1}},$$

$$c_{k-3} c_{k-5} \dots = \frac{R_{k-2}}{R_{k-3}}$$

folgt:

$$c_{k-1} = \frac{R_k}{R_{k-1}} : \frac{R_{k-2}}{R_{k-3}}$$

bis auf einen Zahlenfaktor. Zu der Bestimmung desselben gehen wir nunmehr über. Ist p_n das Gewicht von R_n , so liefert $a_n R_{n-1} = R_n$ die Bestimmung:

$$p_n = n + p_{n-1} = n + (n-1) + p_{n-2} = \dots = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Wir nehmen R_n, R_{n-1}, \dots mit solchen Zahlenfaktoren multipliziert an, dass darin das höchste vorkommende Glied:

$$s_1^{\frac{n(n+1)}{2}}, s_1^{\frac{(n-1)n}{2}}, \dots$$

den Koeffizienten $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}, (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}, \dots$ besitzt. Dann sei

$$c_{k-1} = \lambda_{k-1} \frac{R_k}{R_{k-1}} : \frac{R_{k-2}}{R_{k-3}},$$

wo λ_{k-1} die zu bestimmenden Zahlenfaktoren sind. Also wird:

$$\frac{a_1 z + a_2 z^2 + \dots}{1 + a_2 z^2 + \dots} = \frac{\lambda_0 \frac{R_1}{R_0} z}{1 + \frac{\lambda_1 \frac{R_2}{R_1} z^2}{1 + \frac{\lambda_2 \frac{R_3}{R_2} : \frac{R_1}{R_0} z^2}{1 + \frac{\lambda_3 \frac{R_4}{R_3} : \frac{R_2}{R_1} z^2}{1 + \dots}}}} \cdot \frac{R_n}{R_{n-1}} : \frac{R_{n-2}}{R_{n-3}} z^2.$$

Setzen wir jetzt:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = -\frac{1}{n}$$

und gehen zur Grenze $n = \infty$ über, so wird

$$a_1 = -x_1 - x_2 - \dots - x_n = 1,$$

$$a_2 = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2},$$

$$a_3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 8 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{3}$$

u. s. w.

und $s_1 = -1, s_2 = 0, s_3 = 0$, u. s. w., also

$$R_0 = 1, \quad R_1 = 1, \quad R_2 = 1, \quad \text{u. s. w.}$$

Die obige Entwicklung wird:

$$\frac{z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots}{1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4} + \dots} = \frac{\lambda_0 z}{1 + \frac{\lambda_1 z^2}{1 + \frac{\lambda_2 z^2}{1 + \frac{\lambda_3 z^2}{1 + \dots}}}}$$

Vergleicht man dieselbe mit dem Lambertschen Kettenbruch:¹

¹ Es sei gestattet bei dieser Gelegenheit eine Herleitung der Lambertschen Formel zu veröffentlichen, welche mir vor längerer Zeit mein hochverehrter Lehrer LEOPOLD KRONECKER brieflich mitteilte.

»Sei

$$R_n = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{z^{2k}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2k} \cdot \frac{1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5) \dots (2k+2n+1)},$$

wo aber für $k=0$, wie gewöhnlich, an Stelle von $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2k$ nur 1 zu nehmen ist, so ist offenbar:

$$I. \quad R_{n-1} = (2n+1)R_n + z^2 R_{n+1} \text{ für } n = 1, 2, 3, \dots \text{ in inf.}$$

und für $n=0$ wird: $(2n+1)R_n + z^2 R_{n+1} = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$. Bezeichnet man dies mit R_{-1} so gilt also die Reduktionsformel I auch für $n=0$.

Deren successive Anwendung ergibt:

$$\frac{R_{-1}}{R_0} = 1 + \frac{z^2}{R_0}, \quad \frac{R_0}{R_1} = 3 + \frac{z^2}{R_1}, \quad \frac{R_1}{R_2} = 5 + \frac{z^2}{R_2}, \dots$$

also in der That:

$$\frac{R_{-1}}{R_0} = 1 + \frac{z^2}{3 + \frac{z^2}{5 + \frac{z^2}{7 + \frac{z^2}{9 + \dots}}}}$$

und da $R_{-1} = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$, $R_0 = \frac{1}{2z}(e^z - e^{-z})$ ist, so resultirt die Lambertsche Formel:

$$\frac{z(e^z + e^{-z})}{e^z - e^{-z}} = 1 + \frac{z^2}{3 + \frac{z^2}{5 + \frac{z^2}{7 + \dots}}}$$

auf welche auch jener Leibnitzsche Ausspruch: numero Deus impari gaudet Anwendung

$$\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{z}{1 + \frac{1 \cdot 3}{z^2}} = \frac{z}{1 + \frac{z^2}{3 + \frac{z^2}{5 + \frac{z^2}{7 + \dots}}}}$$

so ergibt sich:

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = \frac{1}{1 \cdot 3}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{3 \cdot 5}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{5 \cdot 7}, \dots$$

also:

$$\frac{a_1 z + a_3 z^3 + \dots}{1 + a_3 z^2 + \dots} = \frac{\frac{R_1}{R_0} z}{1 + \frac{\frac{R_2}{R_1} z^2}{3 + \frac{\frac{R_3}{R_2} \cdot \frac{R_1}{R_0} z^2}{5 + \frac{\frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{R_2}{R_1} z^2}{7 + \dots}}}}$$

Kürzt man diese Gleichung durch z und setzt $z^2 = x$, so erhält man die Entwicklung des Quotienten zweier beliebigen ganzen rationalen oder ganzen transcendenten Functionen, und für $a_2 = a_4 = a_6 = \dots = 0$ die Entwicklung einer beliebigen ganzen rationalen oder ganzen transcendenten Function in einen Kettenbruch.

Wir können der Kettenbruchentwicklung die Gestalt geben:

$$\frac{1 + a_2 z^2 + \dots}{a_1 + a_3 z^2 + \dots} = \frac{R_0}{R_1} + \frac{z^2}{3 \frac{R_1^2}{R_0 R_2} + \frac{z^2}{5 \frac{R_2^2}{R_1 R_3} + \dots}};$$

findet, und welche namentlich dadurch merkwürdig ist, dass daraus unmittelbar die Irrationalität von $\frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$ für jeden rationalen Werth von z hervorgeht.

6. Aug. 87.

KRONECKER.»

also dieselbe durch die Rekursionsformel:

$$f_{k-1}(z) = (2k-1) \frac{R_{k-1}^2}{R_{k-2} R_k} f_k(z) + z^2 f_{k+1}(z) \quad \left(\begin{smallmatrix} k=1, 2, \dots \\ R_{-1}=0 \end{smallmatrix} \right)$$

mit den Anfangsfunktionen:

$$f_0(z) = 1 + a_2 z^2 + \dots,$$

$$f_1(z) = a_1 + a_3 z^2 + \dots$$

darstellen. Für $z = 0$ folgt:

$$f_k(0) = \frac{1}{2k-1} \frac{R_{k-2} R_k}{R_{k-1}^2} f_{k-1}(0),$$

also wegen

$$f_0(0) = 1,$$

$$f_1(0) = \frac{R_1}{R_0},$$

$$f_2(0) = \frac{1}{1 \cdot 3} \cdot \frac{R_2}{R_1},$$

u. s. w. allgemein

$$f_k(0) = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)} \cdot \frac{R_k}{R_{k-1}}.$$

Umgekehrt sind hierdurch die Quotienten q_k in der Rekursionsformel:

$$f_{k-1}(z) = q_k f_k(z) + z^2 f_{k+1}(z)$$

und damit die Kettenbruchentwicklung vollkommen bestimmt.

Mit Berücksichtigung der Zahlenfaktoren wird jetzt:

$$c_k = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \cdot \frac{R_{k+1}}{R_k} : \frac{R_{k-1}}{R_{k-2}}$$

und

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \cdot \frac{R_n}{R_{n-1}}, \quad a_{n-1} = \frac{1}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} \cdot \frac{R_n^{(1)}}{R_{n-1}}, \quad \text{u. s. w.}$$

Nun ist s_{2n+1} eine ganze Funktion von a_1, a_2, \dots, a_n also wird s_{2n-1}

eine rationale Funktion von $s_1, s_2, \dots, s_{2n-1}$, deren Nenner eine Potenz von R_{n-1} ist. Mithin:

$$\mu_{n+1}R_{n+1} = s_{2n+1}R_{n-1}^{\gamma_{n-1}} - Q_n$$

wo μ_{n+1} ein Zahlenfaktor ist. Nun wird:

$$\gamma_{n-1} p_{n-1} + 2n + 1 = p_{n+1}$$

woraus

$$\gamma_{n-1} = \mathbf{I}$$

also

$$\mu_{n+1}R_{n+1} = s_{2n+1}R_{n-1} - Q_n$$

folgt.

Die Funktionen R_n haben noch eine andere einfache Bedeutung.

Setzen wir in $R_n(s_1, \dots, s_{2n-1})$ und $R_{n-1}(s_1, \dots, s_{2n-2})$ für $s_1, s_2, \dots, s_{2n-1}$ ihre Ausdrücke als ganze Funktionen von a_1, a_2, \dots, a_n ein, so erhalten wir zwei ganze Funktionen von a_1, a_2, \dots, a_n die wir mit $R'_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ und $R'_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ bezeichnen wollen und zwischen denen die Relation besteht:

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} R'_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_n R'_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Geben wir also $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ solche endlichen Werte, dass

$$R'_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0,$$

also die Gleichungen

$$x_1 + \dots + x_n = s_1,$$

$$\dots$$

$$x_1^{2n-1} + \dots + x_n^{2n-1} = s_{2n-1}.$$

erfüllbar, d. h. ein Wurzelpaar x_1, x_2 mit conträrgleichen Werten vorhanden; es verschwindet daher die Geminante:

$$P(x_h + x_k) = G_n(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

III.

Die Entwicklungen in I. und II. sind die beiden ersten Fälle allgemeinerer Entwicklungen, zu denen wir jetzt übergehen.

Wir bezeichnen mit ν eine beliebige ganze Zahl und definieren $\nu - 1$ dem arctg analoge Funktionen durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\varphi_1(z) &= z + \frac{z^{\nu+1}}{\nu+1} + \frac{z^{2\nu+1}}{2\nu+1} + \dots \\ \varphi_2(z) &= \frac{z^2}{2} + \frac{z^{\nu+2}}{\nu+2} + \frac{z^{2\nu+2}}{2\nu+2} + \dots \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi_{\nu-1}(z) &= \frac{z^{\nu-1}}{\nu-1} + \frac{z^{2\nu-1}}{2\nu-1} + \frac{z^{3\nu-1}}{3\nu-1} + \dots\end{aligned}$$

Für diese Funktionen ist offenbar:

$$\varepsilon \varphi_1(z) + \varepsilon^2 \varphi_2(z) + \dots + \varepsilon^{\nu-1} \varphi_{\nu-1}(z) = -\lg \frac{1 - \varepsilon z}{\sqrt{1 - z^\nu}},$$

wenn ε , wie auch im Folgenden jede beliebige ν^{te} Einheitswurzel bedeutet.

Wir definieren ferner ν dem Sinus und Cosinus analoge Funktionen von $\nu - 1$ Variablen durch die Gleichung:

$$e^{-\varepsilon u_1 - \varepsilon^2 u_2 - \dots - \varepsilon^{\nu-1} u_{\nu-1}}$$

$$= F_0(u_1, u_2, \dots, u_{\nu-1}) + \varepsilon F_1(u_1, u_2, \dots, u_{\nu-1}) + \dots + \varepsilon^{\nu-1} F_{\nu-1}(u_1, u_2, \dots, u_{\nu-1}).$$

Setzt man hierin:

$$\begin{aligned}u_1 &= \sum_{k=1}^n \varphi_1(x_k z) = s_1 z + s_{\nu+1} \frac{z^{\nu+1}}{\nu+1} + s_{2\nu+1} \frac{z^{2\nu+1}}{2\nu+1} + \dots \\ u_2 &= \sum_{k=1}^n \varphi_2(x_k z) = s_2 \frac{z^2}{2} + s_{\nu+2} \frac{z^{\nu+2}}{2\nu+2} + s_{2\nu+2} \frac{z^{2\nu+2}}{2\nu+2} + \dots \\ &\dots \dots \dots \\ u_{\nu-1} &= \sum_{k=1}^n \varphi_{\nu-1}(x_k z) = s_{\nu-1} \frac{z^{\nu-1}}{\nu-1} + s_{2\nu-1} \frac{z^{2\nu-1}}{2\nu-1} + s_{3\nu-1} \frac{z^{3\nu-1}}{3\nu-1} + \dots\end{aligned}$$

ein, so kommt links:

$$\frac{\sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{\sqrt{1-x_k^2 z^2}}}{(1+a_{\nu} z^{\nu}+a_{2\nu} z^{2\nu}+\dots)+\varepsilon(a_1 z+a_{\nu+1} z^{\nu+1}+\dots)+\dots+\varepsilon^{\nu-1}(a_{\nu-1} z^{\nu-1}+a_{2\nu-1} z^{2\nu-1}+\dots)}$$

und rechts:

$$F_0'(z) + \varepsilon F_1'(z) + \dots + \varepsilon^{\nu-1} F_{\nu-1}'(z),$$

wenn man zur Abkürzung:

$$F_h \left(\sum_{k=1}^{\nu} \zeta_1(x_k z), \sum_{k=1}^{\nu} \zeta_2(x_k z), \dots, \sum_{k=1}^{\nu} \zeta_{\nu-1}(x_k z) \right) = F_h(z)$$

für $h = 0, \dots, \nu - 1$ setzt. Daraus folgt, dass die ν ganzen transcendenten Funktionen:

$$F_0(z), F_1(z), \dots, F_{\nu-1}(z)$$

den ν ganzen rationalen Funktionen:

$$f_0(z) = 1 + a_{\nu} z^{\nu} + \dots, \quad f_1(z) = a_1 z + a_{\nu+1} z^{\nu+1} + \dots, \quad \dots, \\ f_{\nu-1}(z) = a_{\nu-1} z^{\nu-1} + a_{2\nu-1} z^{2\nu-1} + \dots$$

proportional sind.

Zur Ermittlung der rationalen Verhältnisse der ν transcendenten Funktionen $F_0(z), \dots, F_{\nu-1}(z)$ wenden wir den verallgemeinerten Kettenbruchalgorithmus in einer etwas andern als der üblichen Form an.

Wir setzen allgemein:

$$\frac{F_h(z)}{F_h(0)} = \varphi_h(z), \quad \frac{\varphi_h(z)}{\varphi_h(0)} = \psi_h(z) \quad (h=0, \dots, \nu-1)$$

und bilden die Entwicklung:

$$\psi_0'(z) = \psi_1'(z) + c_{\nu-1} \psi_{\nu}'(z) z^{\nu}, \\ \psi_1'(z) = \psi_2'(z) + c_{\nu} \psi_{\nu+1}'(z) z^{\nu},$$

u. s. w., wo die Koeffizienten $c_{\nu-1}, c_{\nu}, \dots$ so gewählt werden, dass stets

so ergibt sich also:

$$\begin{aligned} S_1^{(\nu)}(c_{\nu-1}, \dots, c_{n-1}) &= a_\nu, \\ c_0 S_1^{(\nu)}(c_\nu, \dots, c_{n-1}) &= a_{\nu+1}, \\ c_1 S_1^{(\nu)}(c_{\nu+1}, \dots, c_{n-1}) &= a_{\nu+2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

u. s. w. bis zu

$$c_{n-1} c_{n-\nu-1} c_{n-2\nu-1} c_{n-3\nu-1} \dots = a_n.$$

Wir wollen die natürliche Zahlenreihe nach Entfernung der Vielfachen von ν bezeichnen mit $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$, so dass

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_2 = 2, \quad \nu_3 = 3, \quad \dots, \quad \nu_{\nu-1} = \nu - 1, \quad \nu_\nu = \nu + 1, \quad \nu_{\nu+1} = \nu + 2, \quad \dots$$

Ferner wollen wir jede ganze rationale Funktion von $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \dots, s_{\nu_k}$, die linear in s_{ν_k} ist, kurz mit $\{\nu_k\}$ bezeichnen. Dann ist z. B.

$$a_h = \{h\} \quad \text{für } h = 1, 2, \dots, \nu - 1.$$

Dann werden offenbar:

$$\begin{aligned} Q_0(z) &= F_0(z) = 1 + \{\nu - 1\} z^\nu + \{2\nu - 1\} z^{2\nu} + \dots, \\ Q_1(z) &= \frac{F_1(z)}{a_1 z} = 1 + \frac{\{\nu + 1\}}{\{1\}} z^\nu + \frac{\{2\nu + 1\}}{\{1\}} z^{2\nu} + \dots, \\ Q_2(z) &= \frac{F_2(z)}{a_2 z^2} = 1 + \frac{\{\nu + 2\}}{\{2\}} z^\nu + \frac{\{2\nu + 2\}}{\{2\}} z^{2\nu} + \dots, \\ &\dots \\ Q_{\nu-1}(z) &= \frac{F_{\nu-1}(z)}{a_{\nu-1} z^{\nu-1}} = 1 + \frac{\{2\nu - 1\}}{\{\nu - 1\}} z^\nu + \frac{\{3\nu - 1\}}{\{\nu - 1\}} z^{2\nu} + \dots \end{aligned}$$

Wir behaupten, dass allgemein für $0 < r' < \nu$:

$$Q_{(m'-1)(\nu-1)+r'}(z) = 1 + \frac{\{m'\nu + r'\}}{\{(m'-1)\nu + r'\}} z^\nu + \frac{\{(m'+1)\nu + r'\}}{\{(m'-1)\nu + r'\}} z^{2\nu} + \dots$$

und:

$$c_{m'(\nu-1)+r'-1} = \frac{\{m'\nu + r'\}}{\{(m'-1)\nu + r'\}}$$

und beweisen dies durch den Schluss von $m' - 1$ auf m' . Die Gleichung:

$$\psi_{(m'-1)(\nu-1)+r'-1}^*(z) = \psi_{(m'-1)(\nu-1)+r'}^* + c_{m'(\nu-1)+r'-1} \psi_{m'(\nu-1)+r'}^*(z) z^\nu$$

ergiebt in der That:

$$C_{m'(\nu-1)+r'-1} = \frac{\{m'\nu + r'\}}{\{(m' - 1)\nu + r'\}}$$

und

$$\psi_{m'(\nu-1)+r'}(z) = 1 + \frac{\{(m' + 1)\nu + r'\}}{\{m'\nu + r'\}} z^\nu + \dots,$$

wenn das Entsprechende für

$$\psi_{(m'-1)(\nu-1)+r'-1}^*(z) \quad \text{und} \quad \psi_{(m'-1)(\nu-1)+r'}^*(z)$$

vorausgesetzt wird.

Aus der Gleichung für c , der wir auch die Form geben können:

$$c_{k-1} = \frac{\{\nu_k\}}{\{\nu_{k-\nu+1}\}}$$

folgt, dass die Grössen c_0, c_1, \dots, c_{n-1} , also auch a_1, a_2, \dots, a_n rationale Funktionen von $s_{y_1}, s_{y_2}, \dots, s_{y_n}$ sind, also der Satz:

Von denjenigen Potenzsummen, deren Indices nicht Multipla einer gegebenen ganzen Zahl sind, bilden die n ersten ein Fundamentalsystem.

Für a_n erhält man insbesondere noch:

$$a_n = \frac{\{v_n\}}{\{v_{n-\nu+1}\}}.$$

In allgemeinen ist, nach dem Vorhergehenden, das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1^{\nu_1} + \dots + x_n^{\nu_1} &= s_{\nu_1}, \\ . &. \\ x_1^{\nu_n} + \dots + x_n^{\nu_n} &= s_{\nu_n}. \end{aligned}$$

durch ein einziges Wurzelsystem x_1, x_2, \dots, x_n zu erfüllen. Jede sym-

sind $\left[\frac{k}{\nu} \right]$ ν -tupel vorhanden, z. B. x_1, x_2, \dots, x_ν , für welche $x_h = \varepsilon^h x_1$ ($h = 1, 2, \dots, \nu - 1$), also

$$x_1^{\nu_1} + \dots + x_\nu^{\nu_1} = 0,$$

$$x_1^{\nu_2} + \dots + x_\nu^{\nu_2} = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_1^{\nu_n} + \dots + x_\nu^{\nu_n} = 0$$

und $k - \nu \left[\frac{k}{\nu} \right]$ Wurzeln Null, so dass für die übrigen $n - k$ die Gleichungen bestehen:

$$x_{k+1}^{\nu_1} + \dots + x_n^{\nu_1} = s_{\nu_1},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_{k+1}^{\nu_n} + \dots + x_n^{\nu_n} = s_{\nu_n}.$$

Also ist:

$$R_n = 0, \quad R_{n-1} = 0, \quad \dots, \quad R_{n-k+1} = 0.$$

Da für den Fall der Unbestimmtheit $k \geq \nu$ sein muss, so ist mindestens:

$$R_n = 0, \quad R_{n-1} = 0, \quad \dots, \quad R_{n-\nu+1} = 0.$$

Umgekehrt beweist man wie unter II. dass, wenn diese ν Grössen verschwinden, die Gleichungen:

$$x_{\nu+1}^{\nu_1} + \dots + x_n^{\nu_1} = s_{\nu_1},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_{\nu+1}^{\nu_n} + \dots + x_n^{\nu_n} = s_{\nu_n}$$

erfüllbar sind, also der Fall der Unbestimmtheit eintritt. Also:

Für das Eintreten des Falles der Unbestimmtheit ist nothwendig und hinreichend dass die ν Grössen $R_n, R_{n-1}, \dots, R_{n-\nu+1}$ verschwinden.

Daraus folgt, beiläufig bemerkt, dass das System $(R_n, R_{n-1}, R_{n-2}, \dots, R_{n-\nu+1})$ äquivalent ist dem System der $\nu - 1$ symmetrischen Produkte:

$$H(x_1^h + \dots + x_\nu^h) \quad (h = 1, \dots, \nu - 1)$$

welches hier an die Stelle der Geminanten $H(x_1 + x_2)$ tritt.

Wir sprechen noch das Corollar aus:

Wenn $R_n = 0, \dots, R_{n-\nu+2} = 0$, so tritt der Fall der Unbestimmtheit dann und nur dann ein, wenn auch noch $R_{n-\nu+1} = 0$ ist.

Die Gleichung:

$$R_n(s_{\nu_1} - x^{\nu_1}, \dots, s_{\nu_n} - x^{\nu_n}) = 0$$

ist — man beweist dies wie früher — für $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ erfüllt und für keinen weiteren Wert von x . Die linke Seite derselben kann, wegen $a_n = \frac{\{\nu_n\}}{\{\nu_{n-\nu+1}\}}$ und $R_n = \{\nu_n\}$ keine Potenz der Gleichung $a_n + a_{n-1}x + \dots + x^n = 0$ sein.

Setzt man also:

$$R_n(s_{\nu_1} - x^{\nu_1}, \dots, s_{\nu_n} - x^{\nu_n}) = R_n(s_{\nu_1}, \dots, s_{\nu_n}) + \dots + R_n^{(n)}(s_{\nu_1}, \dots, s_{\nu_n})x^n,$$

so ist:

$$a_n = \frac{R}{R^{(n)}}, \quad a_{n-1} = \frac{R^{(1)}}{R^{(n)}}, \quad \text{u. s. w.}$$

Nun muss im Fall der Unbestimmtheit jedenfalls a_n unbestimmt, also $R_n = 0$ und $R_n^{(n)} = 0$ werden. Also, da $R_n^{(n)} = \{\nu_{n-\nu+1}\}$ wird, folgt:

Wenn $R_n = 0, \dots, R_{n-\nu+2} = 0$ ist, so tritt der Fall der Unbestimmtheit dann und nur dann ein, wenn auch $R_n^{(n)} = 0$ ist.

Durch Vergleichung mit dem entsprechenden früheren Resultat bezüglich $R_{n-\nu+1}$, und wegen $R_{n-\nu+1} = \{\nu_{n-\nu+1}\}$ und $R_n^{(n)} = \{\nu_{n-\nu+1}\}$ folgt jetzt, dass $R_n^{(n)} = R_{n-\nu+1}$ ist, bis auf einen Zahlenfaktor.

Also wird:

$$a_n = c_{n-1}c_{n-\nu-1}c_{n-2\nu-1} \dots = \frac{R_n}{R_{n-\nu+1}}$$

und allgemein

$$c_{k-1}c_{k-\nu-1}c_{k-2\nu-1} \dots = \frac{R_k}{R_{k-\nu+1}}$$

woraus

$$c_{k-1} = \frac{R_k}{R_{k-\nu+1}} : \frac{R_{k-\nu}}{R_{k-2\nu+1}}$$

folgt, bis auf einen Zahlenfaktor.

Ferner ergibt sich $s_{\nu+1}$ als ganze Funktion von $a_n = \frac{R}{R_{n-\nu+1}}$,
 $a_{n-1} = \frac{R_n^{(1)}}{R_{n-\nu+1}}, \dots$, also als rationale Funktion von $s_{\nu_1}, \dots, s_{\nu_n}$, deren
 Nenner eine Potenz von $R_{n-\nu+1}$ ist. Daher

$$R_{n+1} = s_{\nu+1} R_{n-\nu+1}' - Q_n.$$

Ist p_n das Gewicht von R_n , so folgt aus

$$a_n R_{n-\nu+1} = R_n$$

dass

$$\begin{aligned} p_n &= n + p_{n-\nu+1} = n + (n - \nu + 1) + (n - 2(\nu - 1)) + \dots \\ &\quad + (n - (m' - 1)(\nu - 1)) + p_{n-m'(\nu-1)} \end{aligned}$$

ist; ist

$$n = m'(\nu - 1) + r' \quad (r' < \nu - 1)$$

so ist

$$p_{n-m'(\nu-1)} = n - m'(\nu - 1)$$

also

$$p_n = n + (n - (\nu - 1)) + (n - 2(\nu - 1)) + \dots + (n - m'(\nu - 1)).$$

Nunmehr folgt aus:

$$p_{n+1} = \nu_{n+1} + r_{n-\nu+1} p_{n-\nu+1}$$

dass

$$r_{n-\nu+1} = \frac{-\nu_{n+1} + (n+1) + (n+1-(\nu-1)) + \dots + (n+1-m'(\nu-1))}{(n-(\nu-1)) + \dots + (n-m'(\nu-1))}$$

ist; für

$$r' < \nu - 2 \quad \text{ist} \quad \nu_{n+1} = m'\nu + r' + 1$$

und für

$$r' = \nu - 2 \quad \text{ist} \quad \nu_{n+1} = (m' + 1)\nu.$$

Demnach beträgt die Differenz des Zählers und Nenners von $r_{n-\nu+1}$ im
 ersten Fall:

$$-(m'\nu + r' + 1) + (n+1) + m' = 0$$

und im zweiten Fall:

$$-(m' + 1)\nu + (n + 1) + m' = 0.$$

Also ist $\gamma_{n-\nu+1} = 1$ und

$$R_{n+1} = s_{\nu-1} R_{n-\nu+1} - Q_n$$

bis auf einen Zahlenfaktor.

Wir hatten die Kettenbruchentwicklung:

$$q_{k-1}(z) = q_k(z) + z^{\nu} c_{k+\nu-2} q_{k+\nu-1}(z),$$

die an die Funktionen

$$q_h(z) = \frac{\phi_h(z)}{\phi_h(0)} \quad (h=0, 1, \dots, \nu-1)$$

anknüpfte. Wir wollen derselben eine andere Form geben, indem wir von

$$\phi_h(z) = \frac{F^h(z)}{z^h} \quad (h=0, 1, \dots, \nu-1)$$

ausgehen und die Funktionen: $\phi_\nu(z)$, $\phi_{\nu+1}(z)$, ... durch die Recursionsformel definiren:

$$\phi_{k-1}(z) = q_k \phi_k(z) + z^{\nu} \phi_{k+\nu-1}(z).$$

Dann giebt die Vergleichung mit:

$$\frac{\phi_{k-1}(z)}{\phi_{k-1}(0)} = \frac{\phi_k(z)}{\phi_k(0)} + z^{\nu} c_{k+\nu-2} \frac{\phi_{k+\nu-1}(z)}{\phi_{k+\nu-1}(0)}$$

daß

$$q_k = \frac{\phi_{k-1}(0)}{\phi_k(0)}$$

und

$$c_{k-1} = \frac{\phi_k(0)}{\phi_{k-\nu}(0)}.$$

Setzt man das letztere Resultat in die Form:

$$\phi_k(0) \cdot \frac{R_{k-\nu+1}}{R_k} = \phi_{k-\nu}(0) \cdot \frac{R_k}{R_{k-\nu-1}}$$

und berücksichtigt die Anfangswerte:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_1 = R_1 = \phi_1(o), \\ c_1 &= a_2 = R_2 = \phi_2(o), \\ &\dots \dots \dots \\ c_{\nu-2} &= a_{\nu-1} = R_{\nu-1} = \phi_{\nu-1}(o), \end{aligned}$$

so ergibt sich allgemein:

$$\phi_k(o) = \frac{R_k}{R_{k-\nu+1}}$$

womit auch $q_k = \frac{R_{k-1}}{R_{k-\nu}} : \frac{R_k}{R_{k-\nu+1}}$ und damit die Kettenbruchentwicklung bestimmt ist. Hier ist $R_0 = 1$, $R_{-1} = 1$, $R_{-2} = 1$, u. s. w. zu setzen.

Es bleibt die Bestimmung der Zahlenfaktoren. Nehmen wir die R_k mit einem solchen Zahlenfaktor multipliziert an dass darin $s_1^{\nu k}$ den Koeffizienten $(-1)^{\nu k}$ hat, so werde

$$q_k = \lambda_k \cdot \frac{R_{k-1}}{R_{k-\nu}} : \frac{R_k}{R_{k-\nu+1}},$$

wo λ_k die zu bestimmenden Zahlenfaktoren sind.

Setzen wir jetzt:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = -\frac{1}{n}$$

und dann $n = \infty$, so werden alle $R_k = 1$, und:

$$\begin{aligned} \phi_0(z) &= 1 + \frac{z^\nu}{1} + \frac{z^{2\nu}}{2\nu} + \dots \\ \phi_1(z) &= \frac{1}{1} + \frac{z^\nu}{\nu+1} + \frac{z^{2\nu}}{2\nu+1} + \dots \\ &\dots \dots \dots \\ \phi_{\nu-1}(z) &= \frac{1}{(\nu-1)} + \frac{z^\nu}{(2\nu-1)} + \frac{z^{2\nu}}{(3\nu-1)} + \dots \end{aligned}$$

und durch die Formel:

$$\phi_{k-1}(z) = \lambda_k \phi_k(z) + z^\nu \phi_{k+\nu-1}(z) \quad (k=1, 2, \dots)$$

werden sowohl die Zahlen λ_k , als auch die Funktionen:

$\phi_\nu(z)$, $\phi_{\nu+1}(z)$, $\phi_{\nu+2}(z)$, u. s. w. vollständig bestimmt.

Man findet nämlich, wegen $\nu_{h(\nu-1)+k} = \nu_k = h\nu$:

$$\phi_k(z) = \frac{1}{\nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \dots \cdot \nu_k} + \frac{z^\nu}{\nu \nu_\nu \dots \nu_{\nu-1+k}} + \frac{z^{2\nu}}{2\nu \nu_{2\nu} \dots \nu_{2\nu-1+k}} + \frac{z^{3\nu}}{3\nu \nu_{3\nu} \dots \nu_{3\nu-1+k}} + \dots$$

und

$$\lambda_k = \nu_k;$$

daraus folgt im allgemeinen Falle:

$$\phi_k(0) = \frac{1}{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k} \frac{R_k}{R_{k-(\nu-1)}},$$

wodurch auch

$$q_k = \nu_k \frac{R_{k-1}}{R_{\nu-1}} \cdot \frac{R_k}{R_{k-\nu+1}}$$

und c_k bestimmt sind. Aus $a_n = \phi_n(0)$ folgt noch

$$a_n = \frac{1}{\nu_1 \dots \nu_\nu} \frac{R_n}{R_{n-\nu+1}}.$$

Die Aufgabe die Grössen a_1, a_2, \dots, a_n als rationale Funktionen der $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \dots, s_{\nu_n}$ anzugeben, ist durch die vorstehenden Entwicklungen vollständig und in einfacher Weise gelöst.

Königsberg Pr. im Oktober 1898.

ÜBER DIE INVARIANTEN
 LINEARER UND QUADRATISCHER BINÄRER DIFFERENTIALFORMEN
 UND IHRE ANWENDUNG AUF DIE DEFORMATION DER FLÄCHEN

VON

GERHARD HESSENBERG

in CHARLOTTENBURG-BERLIN.

In der vorliegenden Arbeit habe ich versucht, die Hauptformeln der allgemeinen Flächentheorie, unter specieller Beachtung des Biegungsproblems, einerseits in möglichst algebraischer und formal abgekürzter Weise, andererseits so herzuleiten, dass die Invarianz der für allgemeine Coordinaten gültigen Formeln unmittelbar in die Augen springt.

Zu diesem Zwecke ist zunächst durch Anwendung der Begriffe der Co- und Contragredienz das Nachrechnen von Transformationen vermieden. Sodann ist durch Einführung einer der Differentiation verwandten Operation, die ich cogrediente Differentiation nenne, erreicht worden, dass die cogredienten Differentiale irgend welcher Grössen bei Coordinatentransformationen dieselben Substitutionen erleiden, wie diese Grössen selbst.

Mit den in den ersten vier Abschnitten gewonnenen Hilfsmitteln ergeben sich im Abschnitt V die Eigenschaften der gebräuchlichen Differentialparameter. Abschnitt VII giebt einen Überblick über die vielgebrauchten orthogonalen Systeme, die von zwei Parametern abhängen. Sodann folgt im Abschnitt VIII die Herleitung der Differentialgleichung

$$\Delta_{22} z = K(1 - \Delta_1 z),$$

in IX die der Codazzischen Formeln und der Gaussischen Relation, in X die der Weingartenschen Differentialgleichung, aus der sich die bisher bekannten Classen aufeinander abwickelbarer Flächen bestimmen lassen.¹

Im folgenden Abschnitt wird eine eigenartige Singularität der letztgenannten Differentialgleichung untersucht, auf die inzwischen auch Hr. WEINGARTEN selbst unter Bezugnahme auf vorliegende Arbeit aufmerksam gemacht hat.²

Unter Umständen liefert nämlich die in Rede stehende Differentialgleichung nicht alle Biegungen der gegebenen Fläche. Ich zeige, dass die Differentialgleichung auf unendlich viele Arten so aufgestellt werden kann, dass eine beliebig vorgeschriebene Biegung durch ihre Integration nicht gefunden wird. Andererseits lässt sich für jede Fläche diese Singularität vermeiden. Ich leite ferner das Kriterium für das Eintreten derselben mit Hülfe einer im Abschnitt VI geführten Untersuchung her und zeige, dass die Bestimmung der nicht gefundenen Biegungen auf eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung führt.

In letzten Abschnitt sind einige specielle Beispiele hierzu untersucht.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, den Hrn. WEINGARTEN und KNOBLAUCH für ihr Interesse an der vorliegenden Arbeit und nützliche Ratschläge bei der Ausarbeitung meinen Dank auszusprechen.

I.

§ 1. In den nachfolgenden Untersuchungen bezeichnet abkürzungsweise $\xi, x, \xi_{(i)}$ oder $x_{(i)}$ das System der n Grössen $\xi_\lambda, x_\lambda, \xi_{i,\lambda}$ oder $x_{i,\lambda}$, $\lambda = 1, 2 \dots n$. Von zwei Systemen, die mit entsprechenden Buchstaben des griechischen und lateinischen Alphabets bezeichnet sind, soll angenommen werden, dass sie *contragredient* sind, d. h., dass bei linearer Transformation des einen das andere die inverse und transponierte Substitution

¹ WEINGARTEN, *Mémoire sur la déformation des surfaces*, Preisschrift der Pariser Akademie, Acta math. Bd. 20, p. 159 ff. Die Citate beziehen sich auf die Publication in den »Mémoires présentés par divers savants etc.« Bd. XXXII.

DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*. Bd. IV, letztes Capitel.

RICCI, *Della equazione fondamentale di Weingarten*. Atti dell'Istituto Veneto dei scienze, lettere ed arti, T. VIII. S. VII. 1896—97.

² Note sur Theorie der Deformation der Flächen. Acta math. 22, pag. 193 ff.

erleidet. Damit die inverse Substitution existiert, darf natürlich die Substitutionsdeterminante nicht verschwinden.

Die Bedeutung des Begriffes der Contragredienz liegt in folgenden Sätzen, die aus der Theorie der linearen Transformationen bekannt sind:

I. Sind die Systeme ξ und x contragredient, so ist der Ausdruck $\sum_{\lambda} \xi_{\lambda} x_{\lambda}$ invariant.

II. Ist $\sum x_{\lambda} \xi_{\lambda}$ bei linearen Transformationen der ξ_{λ} invariant, und können die ξ_{λ} n Wertesysteme annehmen, deren Determinante nicht verschwindet, so sind die Systeme ξ und x contragredient.

Der Ausdruck $\sum_{\lambda} x_{\lambda} \xi_{\lambda}$ soll mit (x, ξ) bezeichnet werden.

Das Wort »invariant« gebrauche ich ausschliesslich im Sinne von »absolut invariant« und denke mir unter T eine Funktion, die die Eigenschaft besitzt, bei linearer Transformation der Variablen ξ sich mit der Substitutionsdeterminante zu multiplicieren. Durch Multiplication mit einer Potenz von T kann jede Invariante im weiteren Sinne in eine absolute verwandelt werden. Über T wird an geeigneter Stelle verfügt werden.

Aus n cogredienten Systemen $\xi_{(i)}$ und n ihnen contragredienten $x_{(i)}$ bildet man die Invarianten $T|\xi_{i,\lambda}|$ und $T^{-1}|x_{i,\lambda}|$, ($i, \lambda = 1, 2, \dots, n$). Da sie lineare Formen jedes der Systeme sind, erhält man aus (II) den Satz:

III. Bildet man aus $(n - 1)$ den ξ cogredienten (bezw. contragredienten) Systemen die Determinanten $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades, so ergeben diese (bei geeigneter Wahl der Vorzeichen) mit T (bezw. T^{-1}) multipliciert ein den ξ contragredientes (bezw. cogredientes) System.

§ 2. ξ und ξ^* seien zwei Systeme von n bzw. m Variablen; x und x^* seien ihnen contragredient. Erfahren ξ und ξ^* die Substitutionen

$$(I) \quad \xi_{\lambda} = \sum_{\rho} s_{\lambda\rho} \xi'_{\rho}, \quad \xi^*_{\lambda} = \sum_{\rho} s^*_{\lambda\rho} \xi'^*_{\rho},$$

so ist

$$(I_a) \quad x'_{\rho} = \sum_{\lambda} s_{\lambda\rho} x_{\lambda}, \quad x'^*_{\rho} = \sum_{\lambda} s^*_{\lambda\rho} x^*_{\lambda}.$$

Das System der nm Grössen $\xi_{\lambda} \xi^*_{\mu}$ werde mit $\xi \xi^*$ bezeichnet.¹ Es wird linear transformiert durch

$$(2) \quad \xi_{\lambda} \xi^*_{\mu} = \sum_{\rho, \sigma} s_{\lambda\rho} s^*_{\mu\sigma} \xi'_{\rho} \xi'^*_{\sigma}$$

¹ $\xi \xi^*$ ist im allgemeinen von $\xi^* \xi$ verschieden!

und das System xx^* durch

$$(2_a) \quad x'_\rho x''_\sigma = \sum_{\lambda, \mu} s_{\lambda\rho} s_{\mu\sigma}^* x_\lambda x_\mu^*,$$

Die Determinanten von (2) und (2_a) haben nach einem Satz von KRONECKER¹ den Wert $|s_{\lambda\rho}|^m \cdot |s_{\mu\sigma}^*|^n$, sind also nicht null. Daraus folgt:

IV. Ist ξ zu x , ξ^* zu x^* contragredient, so ist auch $\xi\xi^*$ zu xx^* contragredient.

Denn da die Determinante von (2) und (2_a) nicht null ist, ist (2_a) die inverse und transponierte Substitution von (2).

A bezeichne das Coefficientensystem der bilinearen Form

$$\sum a_{\lambda\mu} \xi_\lambda \xi_\mu^*,$$

Es speciell das der Grössen $c_{\lambda\mu}$, wo $c_{\lambda\mu}$ die Null oder Einheit bedeutet, jenachdem λ von μ verschieden oder gleich μ ist. Das System $\xi\xi^*$ kann nm Wertsysteme annehmen, deren Determinante nicht null ist, z. B. für $\xi_{i,\lambda} = \xi_{i,\lambda}^* = c_{i\lambda}$. Mithin ist A dem System $\xi\xi^*$ contragredient. Ist B das Coefficientensystem der Form

$$\sum \beta_{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu^*,$$

so sind ebenso die $\beta_{\lambda\mu}$ den $x_\lambda x_\mu^*$ contragredient, also nach IV auch den $a_{\lambda\mu}$. Man erhält damit den Satz:

V. Sind $\sum a_{\lambda\mu} \xi_\lambda \xi_\mu^*$ und $\sum \beta_{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu^*$ zwei Contravarianten, so ist der Ausdruck $\sum_{\lambda, \mu} a_{\lambda\mu} \beta_{\lambda\mu}$ invariant.

Er werde künftig mit (A, B) bezeichnet, also consequenterweise die Formen selbst mit

$$(A, \xi\xi^*) \text{ und } (B, xx^*),$$

wonach auch

$$(3) \quad (xx^*, \xi\xi^*) = (x, \xi)(x^*, \xi^*).$$

Ist $n = m$, so ist das System A quadratisch, und seine Determinante multipliciert sich mit den Substitutionsdeterminanten der ξ und ξ^* . Haben

¹ Siehe HENSEL, Über die Darstellung der Determinante eines Systems, welches aus zwei andern componiert ist. Acta mathematica, 14, pag. 317—319.

wir nur die zwei Sorten ξ und x von Variablen, so giebt es drei Typen von Formen:

$$(\mathcal{A}, \xi\eta), (\mathcal{B}, xy), (\mathcal{C}, x\eta)$$

mit den Invarianten

$$Da = T^{-2} |a_{\lambda\mu}|; \quad D\beta = T^2 |\beta_{\lambda\mu}|; \quad Dc = |c_{\lambda\mu}|.$$

Die Formen des Typus \mathcal{C} heissen Zwischenformen; zu ihnen gehört \mathcal{C} . Als

$$\sum c_{\lambda\mu} \xi_\lambda \eta_\mu$$

aufgefasst ist sie zu \mathcal{C} contravariant und bildet mit \mathcal{C} die Invariante

$$(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \sum_{\lambda, \mu} c_{\lambda\mu} c_{\lambda\mu} = \sum_{\lambda} c_{\lambda\lambda},$$

die auch mit $M\mathcal{C}$ bezeichnet werden soll.

§ 3. Betrachtet man $(\mathcal{A}, \xi\xi')$ als lineare Form der ξ' , so ergibt sich der Satz:

VI. Die Grössen ${}^a x_\mu = \sum_{\lambda} a_{\lambda\mu} \xi_\lambda$ sind den ξ' contragredient.

Setzt man sie daher in die Form \mathcal{B} ein, so erhält man den neuen invarianten Ausdruck

$$(\mathcal{B}, x \cdot {}^a x) = \sum_{\lambda, \mu, \nu} \beta_{\lambda\mu} x_\lambda \cdot a_{\nu\mu} \xi_\nu,$$

der eine Zwischenform mit den Coefficienten

$$c_{\lambda\nu} = \sum_{\mu} \beta_{\lambda\mu} a_{\nu\mu}$$

darstellt. Es ist

$$(4) \quad M\mathcal{C} = \sum_{\lambda, \mu} a_{\lambda\mu} \beta_{\lambda\mu} = (\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

Setzt man

$$a_{\lambda\mu} = - {}^* a_{\mu\lambda},$$

so wird

$$(\mathcal{A}, \xi\xi') = - (\mathcal{A}, \xi' \xi)$$

und nach der soeben eingeführten Bezeichnung

$$\sum_{\mu} a_{\lambda\mu} \xi'_\mu = - {}^a x_\lambda,$$

$$(5) \quad (\mathcal{A}, \xi\xi') = ({}^a x, \xi') = - ({}^a x, \xi).$$

Die analoge Bezeichnung soll auf die Contravarianten von A zunächst *nicht* angewandt werden.

Werden irgend welche cogredienten Systeme ξ, η oder A, B zu dem cogredienten System der Grössen $h\xi_\lambda + k\eta_\lambda$ oder $ha_{\lambda\mu} + kb_{\lambda\mu}$ vereinigt (vorausgesetzt, dass h und k Invarianten sind), so soll das neu entstandene System mit $h\xi + k\eta$ oder $hA + kB$ bezeichnet werden. Da die eingeführten Ausdrücke mit Ausnahme von Da in den auftretenden Systemen linear sind, ist

$$(6) \quad \begin{cases} (hA + kB, F) = h(A, F) + k(B, F), \\ ({}^a(hx + ky), \zeta) = h({}^ax, \zeta) + k({}^ay, \zeta), \\ ({}^{ha+kb}x, \eta) = h({}^ax, \eta) + k({}^bx, \eta). \end{cases}$$

II.

§ 4. Wenn n unabhängige Variable u_λ in irgend einer Weise durch n andere, ebenfalls unabhängige, u'_λ so ausgedrückt werden, dass weder zwischen den u_λ noch zwischen den u'_λ eine Beziehung entsteht, so werden die Differentiale du_λ durch die du'_λ linear ausgedrückt, und die Determinante der linearen Substitution der Differentiale verschwindet nicht identisch.

Für ein bestimmtes Wertesystem der u_λ können die du_λ beliebige Werte durchlaufen. Man kann daher beliebig viele von einander unabhängig variierende Systeme $d_1u_\lambda, d_2u_\lambda$ von Differentialen annehmen. Denkt man sich z. B. die u_λ als Funktionen von mehreren Gruppen von je n unabhängigen Parametern, so erfüllen die in Bezug auf die einzelnen Gruppen gebildeten Differentialsysteme die gestellte Anforderung.

Bei dieser speciellen Annahme sind (unter Voraussetzung der Stetigkeit der zweiten Ableitungen) die in Bezug auf die einzelnen Gruppen von Parametern ausgeführten Differentiationen vertauschbar. Es sollen auch im folgenden durch das Zeichen d nur solche Differentiationen bezeichnet werden, für die das Gesetz der Vertauschbarkeit erfüllt ist. Die anderen Systeme von Differentialen zählen dann unter die allgemein zu betrachtenden Systeme, die den Differentialen cogredient sind.

§ 5: Nunmehr sei $(A, d_1 u d_2 u) = \sum_{\lambda, \mu} a_{\lambda \mu} d_1 u_\lambda d_2 u_\mu$ eine bilineare *symmetrische* Form der Differentiale. Ihre Determinante sei nicht identisch null, und für T werde eine zweite Wurzel aus derselben gewählt, so dass

$$Da = 1$$

wird.

Nun ist:

$$d_3(A, d_1 u d_2 u) = \sum a_{\lambda \mu} d_3 d_1 u_\lambda d_2 u_\mu + \sum a_{\lambda \mu} d_1 u_\lambda d_3 d_2 u_\mu + \sum d_3 a_{\lambda \mu} d_1 u_\lambda d_2 u_\mu$$

ein invarianter Ausdruck. Von den Summen der rechten Seite ist die erste symmetrisch in Bezug auf die Differentiationen d_1 und d_3 . Bezeichnet man sie daher vorübergehend mit A_2 , so ist die zweite gleich A_1 . Setzt man noch S_3 für die dritte, so ist

$$d_3(A, d_1 u d_2 u) = A_1 + A_2 + S_3,$$

also

$$d_2(A, d_3 u d_1 u) = A_3 + A_1 + S_2$$

und

$$d_1(A, d_2 u d_3 u) = A_2 + A_3 + S_1.$$

Um die zweiten Differentiale $d_1 d_2 u_\lambda$ gesondert zu betrachten, löse man nach A_3 auf:

$$(7) \quad \frac{1}{2} \{ d_1(A, d_2 u d_3 u) + d_2(A, d_3 u d_1 u) - d_3(A, d_1 u d_2 u) \} \\ = A_3 + \frac{1}{2} (S_1 + S_2 - S_3).$$

Das zweite Glied der rechten Seite ist eine trilineare Form der $d_\sigma u_\lambda$. Der Coefficient von $d_1 u_\rho d_2 u_\sigma d_3 u_\mu$ ist

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial a_{\rho \mu}}{\partial u_\sigma} + \frac{\partial a_{\sigma \mu}}{\partial u_\rho} - \frac{\partial a_{\rho \sigma}}{\partial u_\mu} \right] = \left[\rho \sigma \right]_{\mu}$$

in CHRISTOFFELS Bezeichnung. Dadurch wird die rechte Seite von (7) zu

$$(8) \quad \sum_{\mu} d_3 u_\mu \cdot \left[\sum_{\lambda} a_{\lambda \mu} d_1 u_\lambda + \sum_{\rho, \sigma} \left[\rho \sigma \right]_{\mu} d_1 u_\rho d_2 u_\sigma \right],$$

und da dieser Ausdruck wegen (7) invariant ist, sind die Coefficienten

der $d_3 u_\mu$ in ihm den Differentialen contragredient. Setzt man noch mit CHRISTOFFEL

$$\left[\begin{smallmatrix} \rho \sigma \\ \lambda \mu \end{smallmatrix} \right] = \sum_{\lambda} a_{\lambda \mu} \left[\begin{smallmatrix} \rho \sigma \\ \lambda \end{smallmatrix} \right],$$

so wird aus (8)

$$(8') \quad \sum_{\lambda, \mu} a_{\lambda \mu} \left[d_2 d_1 u_\lambda + \sum_{\rho \sigma} \left[\begin{smallmatrix} \rho \sigma \\ \lambda \end{smallmatrix} \right] d_1 u_\rho d_2 u_\sigma \right] d_3 u_\mu.$$

Führt man die Abkürzungen

$$\sum_{\sigma} \left[\begin{smallmatrix} \rho \sigma \\ \lambda \end{smallmatrix} \right] d_i u_\sigma = \left[\begin{smallmatrix} \rho \\ \lambda \end{smallmatrix} \right]_i$$

$$\text{und } d_i \zeta_\lambda + \sum_{\lambda} \left[\begin{smallmatrix} \lambda \\ \rho \end{smallmatrix} \right]_i \zeta_\rho = \partial_i \zeta_\lambda \text{ ein,}$$

so wird der Ausdruck in der eckigen Klammer in (8') zu

$$(9) \quad \partial_2 d_1 u_\lambda = \partial_1 d_2 u_\lambda,$$

und diese Grössen sind infolge der Invarianz von (8') den du_λ cogredient.

§ 6. Die Abkürzung ∂ bedeutet nicht, wie d , eine auf jede Grösse anwendbare Operation, sondern ist wie ein dem Buchstaben ζ beigefügter Index aufzufassen. $\partial \zeta_\lambda$ steht für $(\partial \zeta)_\lambda$, und das System $\partial \zeta$ ist aus dem System ζ gebildet. Ferner soll die in (9) gebrauchte Bezeichnung ∂ nur unter dem Vorbehalt gelten, dass die ζ_λ den Differentialen du_λ cogredient sind. Für andere Systeme von Grössen wird das Zeichen ∂ in anderem Sinne gebraucht werden. Es gilt dann folgende Verallgemeinerung des eben Bewiesenen:

VII. Sind die Grössen ζ_λ den Differentialen du_λ cogredient, so gilt das gleiche von den Ausdrücken $\partial \zeta_\lambda$.

Drückt man nämlich in dem invarianten Gebilde

$$d \sum_{\lambda} x_{\lambda} \zeta_{\lambda} = \sum_{\lambda} dx_{\lambda} \zeta_{\lambda} + \sum_{\lambda} x_{\lambda} d\zeta_{\lambda}$$

$d\zeta$ durch $\partial \zeta_\lambda$ aus, so erhält man:

$$(10) \quad d \sum_{\lambda} x_{\lambda} \zeta_{\lambda} = \sum_{\lambda} \partial x_{\lambda} \cdot \zeta_{\lambda} + \sum_{\lambda} x_{\lambda} \cdot \partial \zeta_{\lambda},$$

wo

$$\partial x_\lambda = dx_\lambda - \sum_\rho \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \rho \end{matrix} \right\} x_\rho$$

gesetzt ist. Wählt man für die ζ_λ Differentiale, so ist nach dem zuletzt bewiesenen die zweite Summe der rechten Seite in (10) für sich invariant, also auch die erste, d. h.:

VIII. Sind die Grössen x_λ den Differentialen du_λ contragredient, so gilt das gleiche von den Grössen ∂x_λ .

Hiernach ist aber $\sum \partial x_\lambda \cdot \zeta_\lambda$ überhaupt invariant, damit auch $\sum x_\lambda \partial \zeta_\lambda^*$, woraus VII folgt. Ich will demgemäss die $\partial \zeta^*$ und ∂x als »cogrediente Differentiale« der ζ und x bezeichnen.

§ 7. Nachdem erst die Existenz cogredienter Differentiale erwiesen ist, kann man die Theorie derselben auf allgemeinsten Grundlage aufbauen. Ich beschränke mich aber auf bilineare Formen.

Es mögen Grössen $\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \lambda \end{matrix} \right\}$ und $\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \lambda \end{matrix} \right\}^*$ von der Beschaffenheit existieren, dass die Differentialausdrücke

$$\partial \zeta_\lambda = d\zeta_\lambda + \sum_\rho \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \lambda \end{matrix} \right\} \zeta_\rho \quad \text{und} \quad \partial \zeta_\lambda^* = d\zeta_\lambda^* + \sum_\rho \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \lambda \end{matrix} \right\}^* \zeta_\rho^*$$

den ζ_λ bzw. ζ_λ^* cogredient seien. Setzt man dann, wie soeben geschehen,

$$d \sum x_\lambda \zeta_\lambda = \sum x_\lambda \partial \zeta_\lambda^* + \sum \zeta_\lambda \partial x_\lambda,$$

so findet man, dass die Ausdrücke

$$\partial x_\lambda = dx_\lambda - \sum_\rho \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \rho \end{matrix} \right\} x_\rho$$

den x_λ cogredient sind. Das entsprechende gilt für die gesternten Grössen. Nunmehr sind die Grössen

$$\zeta_\lambda \partial \zeta_\mu^* \quad \text{und} \quad \partial \zeta_\lambda^* \cdot \zeta_\mu,$$

also auch

$$\zeta_\lambda \partial \zeta_\mu^* + \partial \zeta_\lambda^* \zeta_\mu$$

den $\zeta_\lambda \zeta_\mu$ cogredient. Sie seien mit $\partial(\zeta_\lambda \zeta_\mu^*)$ bezeichnet. Sie sind nach IV den ebenso gebildeten $\partial(x_\lambda x_\mu^*)$ contragredient.

Setzt man $\zeta_\lambda \zeta_\mu^* = \beta_{\lambda\mu}$, $x_\lambda x_\mu^* = a_{\lambda\mu}$, so wird:

$$\partial\beta_{\lambda\mu} = d\beta_{\lambda\mu} + \sum_{\rho} \left[\begin{smallmatrix} \rho \\ \lambda \end{smallmatrix} \right] \beta_{\rho\mu} + \sum_{\rho} \left[\begin{smallmatrix} \rho \\ \mu \end{smallmatrix} \right] \beta_{\lambda\rho},$$

$$\partial a_{\lambda\mu} = da_{\lambda\mu} - \sum_{\rho} \left[\begin{smallmatrix} \lambda \\ \rho \end{smallmatrix} \right] a_{\rho\mu} - \sum_{\rho} \left[\begin{smallmatrix} \mu \\ \rho \end{smallmatrix} \right] a_{\lambda\rho}.$$

Die Bezeichnung sei allgemein beibehalten für irgend welche den $\zeta_\lambda \zeta_\mu^*$ co- bzw. contragrediente Grössen. Dann ist identisch

$$\sum a_{\lambda\mu} \partial\beta_{\lambda\mu} + \sum \partial a_{\lambda\mu} \cdot \beta_{\lambda\mu} = d\sum a_{\lambda\mu} \beta_{\lambda\mu},$$

also speciell

$$d\sum a_{\lambda\mu} \zeta_\lambda \zeta_\mu^* = \sum a_{\lambda\mu} \zeta_\lambda \partial\zeta_\mu^* + \sum a_{\lambda\mu} \partial\zeta_\lambda \cdot \zeta_\mu^* + \sum \partial a_{\lambda\mu} \zeta_\lambda \zeta_\mu^*.$$

Da die beiden ersten Summen der rechten Seite nach Voraussetzung invariant sind, ist es auch die dritte, und man erhält daher den Satz:

IX. Die Grössen $\partial a_{\lambda\mu}$ bzw. $\partial\beta_{\lambda\mu}$ sind den $a_{\lambda\mu}$ bzw. $\beta_{\lambda\mu}$ cogredient.

§ 8. Es sei $\sum f_\lambda \xi_\lambda = 0$ irgend eine Identität, in der die ξ_λ unbestimmte Grössen sind. Dann ist auch $\sum f_\lambda \partial\xi_\lambda = 0$ und durch Differentiation der Identität folgt eine Gleichung von der Form $\sum \partial f_\lambda \cdot \xi_\lambda = 0$, so dass die Differentiation nach den ξ_λ einfach unterbleiben konnte.

Zum Beispiel folgt aus der Identität:

$$\sum_{\mu} {}^a z_{\mu} \zeta_{\mu}^* = \sum_{\lambda, \mu} a_{\lambda\mu} \zeta_{\lambda} \zeta_{\mu}^*,$$

sofort:

$$\sum \partial {}^a z_{\mu} \zeta_{\mu}^* = \sum \partial a_{\lambda\mu} \zeta_{\lambda} \zeta_{\mu}^* + \sum a_{\lambda\mu} \partial \zeta_{\lambda} \zeta_{\mu}^*,$$

d. h.

$$\partial {}^a z_{\mu} = \partial^a z_{\mu} + {}^a \partial z_{\mu},$$

wenn ${}^a \partial z_{\mu}$ aus den $\partial \zeta_{\lambda}$ ebenso gebildet ist, wie ${}^a z_{\mu}$ aus den ζ_{λ} .

Das Zeichen ∂ befolgt also, soweit diese Untersuchungen reichen, dieselben algebraischen Gesetze, wie das Zeichen d .

§ 9. In dem speciellen Fall, den wir betrachten, haben wir drei Typen von Formen, für die

$$\partial a_{\lambda\mu} = da_{\lambda\mu} - \sum_{\rho} \left[\begin{smallmatrix} \lambda \\ \rho \end{smallmatrix} \right] a_{\rho\mu} - \sum_{\rho'} \left[\begin{smallmatrix} \mu \\ \rho' \end{smallmatrix} \right] a_{\lambda\rho'},$$

$$\partial \beta_{\lambda\mu} = d\beta_{\lambda\mu} + \sum_{\rho} \left[\begin{smallmatrix} \rho' \\ \lambda \end{smallmatrix} \right] \beta_{\rho'\mu} + \sum_{\rho'} \left[\begin{smallmatrix} \rho' \\ \mu \end{smallmatrix} \right] \beta_{\lambda\rho'},$$

$$\partial \zeta_{\lambda\mu} = d\zeta_{\lambda\mu} + \sum_{\rho} \left[\begin{smallmatrix} \rho' \\ \lambda \end{smallmatrix} \right] \zeta_{\rho'\mu} - \sum_{\rho} \left[\begin{smallmatrix} \mu \\ \rho \end{smallmatrix} \right] \zeta_{\lambda\rho},$$

zu setzen ist.

Verstehen wir unter den $a_{\lambda\mu}$ wieder die Coefficienten der Form, aus der die Christoffelschen Ausdrücke gebildet sind, so ist nach § 5

$$d_3(A, d_1 u d_2 u) = (A, \partial_3 d_1 u d_2 u) + (A, d_1 u \partial_3 d_2 u)$$

also $\partial a_{\lambda\mu} = 0$, wie auch durch Ausrechnen der Christoffelschen Ausdrücke unmittelbar nachzuweisen ist. Es ist daher allgemein

$$d(A, \xi\eta) = (A, \partial\xi\eta) + (A, \xi\partial\eta)$$

und

$$\partial^a x_\mu = {}^a \partial x_\mu.$$

Die Gleichungen $\partial a_{\lambda\mu} = 0$ bestimmen zugleich die Christoffelschen Ausdrücke eindeutig, so dass allgemein geführte Untersuchungen durch die Annahmen

$$Da = 1, \partial a_{\lambda\mu} = 0$$

auf die specielle Form der $a_{\lambda\mu}$ bezogen werden.

III.

§ 10. Im Falle $n = 2$ folgt aus Satz IV:

Ist das System η zu ξ cogredient, so sind die Grössen

$$y_1 = -T\eta_2, \quad y_2 = +T\eta_1$$

den ξ contragredient, und umgekehrt.

Es sollen daher mit entsprechenden Buchstaben des griechischen und lateinischen Alphabetes nur noch solche System ξ und x bezeichnet werden, zwischen denen die Relationen

$$(A) \quad T\xi_\lambda = (-1)^l x_l$$

bestehen. Darin bedeutet λ, l eine Permutation von $1, 2$.

Damit entstehen zugleich die Identitäten:

$$(11) \quad x_1 \eta_1 + x_2 \eta_2 = T^{-1}(x_1 y_2 - y_1 x_2) = T(\xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2) = -(\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2),$$

$$(12) \quad \sum a_{\lambda\mu} \xi_\lambda \eta_\mu = \sum a_{\mu\lambda} x_\lambda \eta_\mu = \sum a_{lm} x_l y_m,$$

wenn in (12)

$$(B) \quad T a_{\mu\lambda} = a_{\lambda\mu} (-1)^l; \quad T^2 a_{lm} = a_{lm} (-1)^{l+m}$$

gesetzt ist. Aus (B) folgt sofort weiter:

$$(13) \quad \sum_{\lambda, \mu} a_{\lambda\mu} \beta_{\lambda\mu} = \sum a_{lm} b_{lm};$$

und ist umgekehrt

$$\beta_{\lambda\mu} = \xi_\lambda \eta_\mu,$$

so folgt auch

$$b_{lm} = x_l y_m.$$

Ferner wird:

$$(14) \quad \frac{1}{2}(A, A) = Da = Da = Da, \quad M\mathfrak{A} = T^{-1}(a_{12} - a_{21}) = T(\alpha_{12} - \alpha_{21}).$$

§ 11. Da zu jedem System von Grössen ein contragredientes gehört, kann folgende Freiheit der Bezeichnung festgesetzt werden:

Dient ein Buchstabe zur abkürzungsweisen Bezeichnung eines Systems, so darf er auch zur Bezeichnung der durch (A) oder (B) damit verbundenen Systeme verwandt werden.

Bedeutet A das System $a_{\lambda\mu}$, B das System $\beta_{\lambda\mu}$, so können demnach die acquirivalenten Ausdrücke (13) mit

$$(A, B), (A, B), (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \text{ etc.}$$

bezeichnet werdet.

Für (12) kann ebenso

$$(A, xy), (A, \xi y), (\mathfrak{A}, \xi \eta) \text{ etc.}$$

geschrieben werden, für die vier äquivalenten Ausdrücke (11) sowohl

$$(x, y), (x, \eta) \text{ wie } (\xi, y) \text{ oder } (\xi, \eta).$$

Es wird sich zeigen, dass von den durch (B) verbundenen Systemen immer das mit lateinischen Buchstaben bezeichnete gegeben ist, ausgenommen \mathfrak{E} . Von zwei durch (A) verknüpften kann ξ oder x gegeben sein. Das andere ist dann von T abhängig und ändert sich, wenn über T anderweitig verfügt wird. Wird T durch P ersetzt, so ist für ξ zu schreiben $\frac{T}{P}\xi$, wenn x gegeben, dagegen für x $\frac{P}{T}x$, wenn ξ gegeben ist.

§ 12. Die Abkürzungen (A, B) , (x, y) befolgen nachstehende Relationen:

$$(15) \quad \begin{cases} (A, B) = (B, A); & (A, A) = 2Da; \\ (x, y) = -(y, x); & (x, x) = 0; \\ (A, xy) = -(A, yx) = ({}^ax, y) = (x, {}^ay). \end{cases}$$

Die Form $(A, {}^bxy)$ soll auch mit (AB, xy) bezeichnet werden. Nach (15) ist dann:

$$(16) \quad (B, x^ay) = ({}^bx, {}^ay) = ({}^{ab}x, y) = ({}^*AB, xy).$$

In § 3, (4) war gezeigt, dass

$$(16') \quad M({}^*AB) = (A, B)$$

ist. Aus der Vertauschbarkeit von A mit B und aus

$$(17) \quad (A, B) = ({}^*A, {}^*B), \quad {}^{**}A = A$$

ergibt sich übrigens:

$$(16'') \quad M({}^*AB) = M({}^*BA) = M(B{}^*A) = M(A{}^*B).$$

Nach dem Multiplicationstheorem der Determinanten besteht zwischen vier Systemen $p_{(i)}, x_{(i)}$ ($i = 1, 2$) die Identität:

$$(18) \quad [(p_{(i)}, r_{(i)})] = (p_{(1)}, p_{(2)})(r_{(1)}, r_{(2)}),$$

wofür auch geschrieben werden kann:

$$(18') \quad (p_{(1)}, p_{(2)})(r, y) = (r, p_{(2)})(p_{(1)}, y) - (r, p_{(1)})(p_{(2)}, y).$$

Ist $(p_{(1)}, p_{(2)}) = 0$, so ist demnach

$$(p_{(1)}, x) = f \cdot (p_{(2)}, x),$$

wo f von x unabhängig ist.

So ergibt sich aus $({}^ax, y) = -(x, {}^ay)$, wenn x für y gesetzt wird:

$$({}^ax + {}^ax, x) = 0,$$

d. h. nach dem eben bewiesenen:

$$({}^ax, y) + ({}^ax, y) = f \cdot (x, y).$$

f ist von y und aus Symmetriegründen auch von x unabhängig. Durch einfaches Ausrechnen erkennt man $f = MA$ und mithin

$$(19) \quad (A, xy) - (A, yx) = MA(x, y).$$

Nach (3) und (18) ist daher speciell

$$(20) \quad M(pq) = (p, q)$$

und andererseits nach (16), wenn in (19) aAB für A gesetzt wird,

$$(21) \quad ({}^ax, {}^by) + ({}^bx, {}^ay) = (A, B)(x, y).$$

Setzt man $a = b$, so folgt

$$(21') \quad ({}^ax, {}^ay) = Da(x, y).$$

Schreibt man daraufhin in (18) ap für p , so ergibt sich:

$$(22) \quad |(A, p_{(i)}r_{(k)})| = Da(p_{(1)}, p_{(2)})(r_{(1)}, r_{(2)}).$$

Diese Formel kann auch folgendermassen geschrieben werden:

$$(22') \quad (A, pr)(A, xy) = Da(p, x)(r, y) - ({}^ap, y)({}^ar, x).$$

Im Falle $Da = 0$ ist also die bilineare Form das Produkt zweier Linearfaktoren. Die Umkehrung folgt aus (22) wegen (3).

§ 13. Ist A eine symmetrische Form, so ist

$$({}^a r, x) = - ({}^a r, x).$$

(22') ergibt daher:

$$(23') \quad (A, pp)(A, xx) = Da \cdot (p, x)^2 + ({}^a p, x)^2,$$

oder kurz:

$$(A, pp) \cdot A = Da \cdot pp + {}^a p {}^a p.$$

Setzt man dies in (B, A) ein und entwickelt, so entsteht:

$$(23) \quad (A, pp)(B, A) = Da(B, pp) + (B, {}^a p {}^a p),$$

eine vielgebrauchte Formel.

Will man zwei symmetrische Formen A und B auf die Normalform

$$A = p_{(1)}^2 + p_{(2)}^2,$$

$$B = \lambda_1 p_{(1)}^2 + \lambda_2 p_{(2)}^2$$

bringen, so muss $p_{(2)}$ sowohl durch ${}^a p_{(1)}$ wie ${}^b p_{(1)}$ teilbar sein, wie aus (23') folgt. Mithin ist $({}^a p_{(1)}, {}^b p_{(1)}) = 0$, d. h.

$$(AB, p_{(1)} p_{(1)}) = 0.$$

Ist umgekehrt $(AB, pp) = 0$, so ist

$$p_{(1)} = \frac{\sqrt{Da} \cdot p}{\sqrt{(A, pp)}}; \quad p_{(2)} = \frac{{}^a p}{\sqrt{(A, pp)}}.$$

Übrigens wird

$$(A, A) : (A, B) : (B, B) = 2 : (\lambda_1 + \lambda_2) : 2\lambda_1\lambda_2.$$

λ_1 und λ_2 sind also die Wurzeln von

$$Da \cdot \lambda^2 - (A, B)\lambda + Db = 0.$$

IV.

§ 14. Es sei wieder A die symmetrische Form, die zur Bildung der $\partial \xi$ und ∂x diene. Es soll bewiesen werden, dass die vier Grössen $\partial \xi$

und ∂x die Relationen (A) erfüllen oder, was dasselbe besagt, dass für beliebige y

$$(\partial \xi, y) = (\partial x, y)$$

ist. Aus den Identitäten

$$\sum \xi_\lambda x_\lambda = 0, \quad \sum a_{\lambda\mu} \xi_\lambda \xi_\mu = \sum a_{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu$$

folgt nämlich durch Differentiation:

$$\sum \partial \xi_\lambda x_\lambda = - \sum \xi_\lambda \partial x_\lambda \quad \text{oder} \quad (\partial \xi, x) = (\partial x, x)$$

und

$$\sum a_{\lambda\mu} \xi_\lambda \partial \xi_\mu = \sum a_{\lambda\mu} x_\lambda \partial x_\mu \quad \text{oder} \quad (\partial \xi, {}^a x) = (\partial x, {}^a x).$$

Setzt man jetzt in (18') für $p_{(1)}$ ${}^a x$, für $p_{(2)}$ x , für r einmal $\partial \xi$, einmal ∂x , so folgt, da $({}^a x, x)$ nicht *identisch* null ist:

$$(\partial \xi, y) = (\partial x, y),$$

w. z. b. w.

Aus (12) ergibt sich damit durch Differentiation unmittelbar, dass auch die Systeme $\partial b_{\lambda\mu}$, $\partial \beta_{\lambda\mu}$ und $\partial b_{\lambda\mu}$ durch (B) verknüpft sind.

In der linearen Form

$$(\partial p, x)$$

sind die ∂p_λ linear von den du_λ abhängig. Es sei daher

$$(\partial p, x) = (P, x du)$$

gesetzt, worin

$$p_{\nu'} = \frac{\partial p_{\nu'}}{\partial u_{\nu}} - \sum_{\rho} \left[\frac{\partial p_{\nu'}}{\partial u_{\rho}} \right] p_{\rho}.$$

Hiernach und nach (19) ist

$$(\partial_2 p, d_1 u) - (\partial_1 p, d_2 u) = MP(d_1 u, d_2 u) \quad \text{und} \quad MP = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial p_1}{\partial u_2} - \frac{\partial p_2}{\partial u_1} \right).$$

P ist also dann und nur dann eine symmetrische Form, wenn (p, du) ein exaktes Differential ist. Als Invariante der Form p sei daher MP auch mit

$$I_p$$

bezeichnet, weil $I_p = 0$ die Integrabilitätsbedingung von p ist.

Ist φ eine Funktion von u_1 und u_2 , so ist

$$(24) \quad I(\varphi p) = \varphi \cdot Ip + \left(p, \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right).$$

§ 15. Man kann die Frage aufwerfen, ob zwei Operationen ∂_1 und ∂_2 vertauschbar sind. Sie ist zu verneinen. Sicher ist jedenfalls, dass in den Ausdrücken

$$\partial_2 \partial_1 \xi, \quad \partial_1 \partial_2 \xi,$$

die zweiten Differentiale der ξ sich wegheben. Führt man aber in der Identität

$$d_1 d_2(x, y) = d_2 d_1(x, y)$$

die Differentiation mittelst der ∂ aus, so bleibt

$$(25'') \quad (\partial_2 \partial_1 x - \partial_1 \partial_2 x, y) = (\partial_2 \partial_1 y - \partial_1 \partial_2 y, x),$$

woraus folgt, dass $\partial_2 \partial_1 x - \partial_1 \partial_2 x$ auch die ersten Differentiale der x nicht enthält, mithin trilinear in $x, d_1 u$ und $d_2 u$ ist. Das gleiche ergibt sich aus der Identität

$$d_2 d_1(A, xy) = d_1 d_2(A, xy),$$

die zu

$$(25''') \quad (A, (\partial_2 \partial_1 x - \partial_1 \partial_2 x)y) = - (A, (\partial_2 \partial_1 y - \partial_1 \partial_2 y)x)$$

wird. Die linke Seite dieser Gleichung ist eine bilineare Form in x, y , etwa (C, xy) , und die letzte Gleichung sagt aus, dass

$$(C, xy) = - (C, yx),$$

also nach (19)

$$(C, xy) = f \cdot (x, y)$$

ist. Offenbar ist f wieder bilinear und alternierend in $d_1 u, d_2 u$,

$$f = K_a \cdot (d_1 u, d_2 u),$$

und K_a hängt nur noch von den Coefficienten von A ab. Man bezeichnet K_a als die *Gauss'sche Invariante* oder in Rücksicht auf ihre geometrische Bedeutung nach BIANCHI kürzer als *Krümmung* von A . Nur wenn sie

null ist, ist identisch $\partial_1 \partial_2 = \partial_2 \partial_1$. Die beiden Identitäten (25'') und (25''') können jetzt durch

$$(25') \quad (\partial_2 \partial_1 x - \partial_1 \partial_2 x, y) = -K_a(A, xy)(d_1 u, d_2 u),$$

$$(25) \quad (A, (\partial_2 \partial_1 x - \partial_1 \partial_2 x) y) = K_a(x, y)(d_1 u, d_2 u)$$

ersetzt werden.

Man gelangt zu K_a noch auf einem zweiten Weg, der zugleich erkennen lässt, dass K_a nur für spezielle Formen verschwindet. Es sei (A, xx) in lineare Faktoren zerlegt:

$$(26) \quad (A, xx) = (a_{(1)}, x)(a_{(2)}, x).$$

Schreibt man $x + \lambda y$ für x und vergleicht die Coefficienten von λ , so kommt:

$$(26') \quad 2(A, xy) = (a_{(1)}, x)(a_{(2)}, y) + (a_{(2)}, x)(a_{(1)}, y).$$

Nach (22) ist

$$[(A, a_{(i)} a_{(k)})] = (a_{(1)}, a_{(2)})^2, \quad (i, k = 1, 2)$$

und durch Ausrechnen der linken Seite nach (26) und (26') folgt

$$(a_{(1)}, a_{(2)})^2 = -4, \quad (a_{(1)}, a_{(2)}) = 2i,$$

wobei i eine zweite Wurzel aus -1 .

Differenziert man (26), so fallen nach (26') die mit ∂x behafteten Glieder fort und es bleibt

$$(\partial a_{(1)}, x)(a_{(2)}, x) + (\partial a_{(2)}, x)(a_{(1)}, x) = 0.$$

Also muss $(\partial a_{(i)}, x)$ durch $(a_{(i)}, x)$ teilbar sein. Der Quotient ist eine lineare Form der du , mithin

$$(27) \quad (\partial a_{(1)}, x) = (a_{(1)}, x)(p, du); \quad (\partial a_{(2)}, x) = -(a_{(2)}, x)(p, du).$$

Es sei (A, xx) auf irgend eine andere Weise in zwei Faktoren $b_{(1)}$ und $b_{(2)}$ zerlegt. Bei passender Bezeichnung ist dann:

$$(b_{(1)}, x) = (a_{(1)}, x)e^v, \quad b_{(2)}x = (a_{(2)}, x)e^{-v}$$

und andererseits

$$(\partial b_{(1)}, x) = (b_{(1)}, x)(q, du).$$

Nach der ersten Beziehung ist aber

$$(\partial b_{(1)}, x) = d(b_{(1)}, x) - (b_{(1)}, \partial x) = e^e[(\partial a_{(1)}, x) + d\varphi \cdot (a_{(1)}, x)],$$

d. h. nach (27)

$$= (b_{(1)}, x)[(p, du) + d\varphi],$$

also

$$(q, du) = (p, du) + d\varphi.$$

Ist also A und p gegeben, so findet man $a_{(1)}$ und $a_{(2)}$ durch eine Quadratur.

Offenbar darf aber p nicht willkürlich gewählt sein. Notwendig und hinreichend dafür, dass $d\varphi = (q, du) - (p, du)$ ein exaktes Differential ist, ist die Integrabilitätsbedingung:

$$Ip = Iq.$$

Ip ist also eine Invariante von A , da es von der Wahl der Faktorenzerlegung unabhängig ist.

Durch Differentiation folgt aus der ersten der Gleichungen (27), da sich die mit ∂x behafteten Glieder wegheben und $\partial a_{(1)}$ durch $a_{(1)}$ ausgedrückt werden kann:

$$(\partial_2 \partial_1 a_{(1)}, x) = (a_{(1)}, x)[(p, d_1 u)(p, d_2 u) + (p, \partial_2 d_1 u) + (\partial_2 p, d_1 u)],$$

also

$$\begin{aligned} (\partial_2 \partial_1 a_{(1)} - \partial_1 \partial_2 a_{(1)}, x) &= (a_{(1)}, x)[(P, d_1 u d_2 u) - (P, d_2 u d_1 u)] \\ &= Ip(a_{(1)}, x)(d_1 u, d_2 u). \end{aligned}$$

Die linke Seite ist nach (25') gleich $-K_a(A, a_{(1)}x)(d_1 u, d_2 u)$ und $(A, a_{(1)}x)$ nach (26') gleich $-i(a_{(1)}x)$. Demnach bleibt

$$Ip = iK_a.$$

§ 16. Nach (20) ist $(p, a_{(1)}) = -Ia_{(1)}$ und ebenso $(p, a_{(2)}) = +Ia_{(2)}$. Damit wird nach (18'):

$$2i(p, x) = Ia_{(1)}(a_{(2)}, x) + Ia_{(2)}(a_{(1)}, x).$$

Sind also $(a_{(1)}, du)$ und $(a_{(2)}, du)$ exakte Differentiale, so ist p und damit $K_a = 0$. Und umgekehrt, ist $K_a = 0$, so darf $p = 0$ gewählt werden, und es existieren zwei Linearfaktoren, die der Bedingung

$$Ia_{(1)} \cdot a_{(2)} + Ia_{(2)} \cdot a_{(1)} = 0$$

genügen, aus der $Ia_{(1)} = Ia_{(2)} = 0$ folgt. Man erhält damit den bekannten Satz:

X. *Die Krümmung einer Form A verschwindet dann und nur dann, wenn diese Form das Produkt zweier exakten Differentiale ist.*

Um das Auftreten des Imaginären zu vermeiden, setze man:

$$a_{(1)} = p_{(1)} - ip_{(2)}, \quad a_{(2)} = p_{(1)} + ip_{(2)}, \quad p = ip_{(3)}.$$

Dadurch wird

$$(28) \quad (A, xy) = (p_{(1)}, x)(p_{(1)}, y) + (p_{(2)}, x)(p_{(2)}, y), \quad (p_{(1)}, p_{(2)}) = 1,$$

$$(28') \quad (\partial p_{(1)}, x) = (p_{(2)}, x)(p_{(3)}, du), \quad (\partial p_{(2)}, x) = -(p_{(1)}, x)(p_{(3)}, du),$$

$$(28'') \quad Ip_{(1)} = (p_{(2)}, p_{(3)}), \quad Ip_{(2)} = (p_{(3)}, p_{(1)}), \quad Ip_{(3)} = K_a.$$

Es gilt also folgender Satz:

XI. *Ist $Da = 1$, $p_{(3)}$ eine lineare Form und $Ip_{(3)} = K_a$, so existieren Paare $p_{(1)}, p_{(2)}$ von linearen Formen, welche folgende Relationen erfüllen:*

$$A = p_{(1)}^2 + p_{(2)}^2, \quad (p_{(1)}, p_{(2)}) = 1, \quad Ip_{(1)} = (p_{(2)}, p_{(3)}), \quad Ip_{(2)} = (p_{(3)}, p_{(1)}),$$

und alle diese Paare lassen sich durch eine Quadratur bestimmen.

In den Gleichungen (28'') ist eine Beziehung auf A nur durch das im Nenner stehende T enthalten. Schreibt man in der dritten noch $(p_{(1)}, p_{(2)})K$ für K_a , so gelten alle drei unabhängig davon, welches T zur Bildung der Invarianten benutzt wird. Daher kann man weiterhin folgenden Satz aussprechen:

XII. *Die drei Gleichungen*

$$(C) \quad Ip_{(1)} = (p_{(2)}, p_{(3)}); \quad Ip_{(2)} = (p_{(3)}, p_{(1)}); \quad Ip_{(3)} = K(p_{(1)}, p_{(2)})$$

sagen aus, dass die Form $p_{(1)}^2 + p_{(2)}^2$ die Krümmung K besitzt.

§ 17. Ist $DA = 1$, so ist nach (28):

$$(p_{(1)}, p_{(2)})^2 = 1,$$

also bei passender Bezeichnung

$$(p_{(1)}, p_{(2)}) = 1.$$

Damit wird

$$(A, p_{(1)}x) = -(p_{(2)}, x),$$

$$(A, p_{(1)}p_{(1)}) = 1.$$

Die letztere Bedingung ist nach (23') hinreichend dafür, dass $A - p_{(1)}^2$ ein vollständiges Quadrat wird. Die Form

$$(29) \quad (p_{(1)}, x) = \frac{(z, x)}{\sqrt{(A, zz)}}$$

genügt ihr identisch, wenn z eine beliebige lineare Form, nur kein Teiler von A ist. Ist \bar{z} von z linear abhängig, also $\bar{z} = f \cdot z$, so ist

$$\frac{(\bar{z}, x)}{\sqrt{(A, \bar{z}z)}} = \frac{(z, x)}{\sqrt{(A, zz)}}.$$

Durchläuft also z alle linearen, von einander unabhängigen Formen, ausschliesslich der beiden Teiler von A , so ergibt (29) alle Formen $p_{(1)}$, für die $(A, p_{(1)}p_{(1)}) = 1$ ist, und jede nur einmal. Aus (29) folgt weiter:

$$(29') \quad (p_{(2)}, x) = -(A, p_{(1)}x) = -(A, zz)^{-\frac{1}{2}}(A, zx).$$

Durch Differentiation folgt weiter aus $(p_{(1)}, z) = 0$:

$$(\partial p_{(1)}, z) = (\partial z, p_{(1)}) = (A, zz)^{-\frac{1}{2}}(\partial z, z).$$

Nun ist $(\partial p_{(1)}, z) = (p_{(2)}, z)(p_{(3)}, du)$ und $(p_{(2)}, z)$ nach (28') gleich $-(A, zz)^{\frac{1}{2}}$. Schreibt man noch x für du , so folgt:

$$(29'') \quad (p_{(3)}, x) = -(A, zz)^{-1}(Z, zx).$$

Die Ausdrücke (29 bis 29'') erfüllen also die Gleichungen (28 bis 28'') identisch. Sie enthalten drei verschiedene Linearformen, nämlich z , az und

z . Will man ausser z nur noch *eine*, zunächst willkürliche Form r benutzen, so hat man (18') anzuwenden und erhält:

$$(29''') \quad \begin{cases} (p_{(3)}, x) \cdot \sqrt{(A, zz)}(z, r) = -(A, zr)(z, x) + (A, zz)(r, x), \\ (p_{(3)}, x) \cdot (A, zz)(z, r) = -(Z, zr)(z, x) + (Z, zz)(r, x). \end{cases}$$

V.

§ 18. Wenn die lineare Form (p, du) ein exaktes Differential dp ist, so nennt man ihre Invarianten mit A »Differentialparameter von p «. Für einige derselben hat man besondere Bezeichnungen eingeführt, und zwar:

$$(A, pp) = \Delta_1 p; \quad (A, P) = \Delta_2 p; \quad \frac{1}{2}(P, P) = \Delta_2 p. {}^1$$

In Analogie hierzu kann man noch

$$(P, pp) = \Delta_{12} p$$

setzen. Es ist dies dieselbe Invariante, die Hr. WEINGARTEN in der Preisschrift ² mit I_p bezeichnet hat.

Ist gleichzeitig $(q, du) = dq$, so setzt man noch

$$(A, pq) = \Delta(p, q); {}^3 \quad (p, q) = \theta(p, q). {}^4$$

Nach (22) ist

$$(30) \quad \Delta_1 p \Delta_1 q - \Delta^2(p, q) = \theta^2(p, q).$$

Für $\Delta_2 p$ hat man die Darstellung

$$\Delta_2 p = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial u_2} \left[\frac{1}{T} \left(a_{11} \frac{\partial p}{\partial u_2} - a_{12} \frac{\partial p}{\partial u_1} \right) \right] - \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial u_1} \left[\frac{1}{T} \left(a_{12} \frac{\partial p}{\partial u_2} - a_{22} \frac{\partial p}{\partial u_1} \right) \right].$$

Dieselbe ergibt sich aus unsern Entwicklungen folgendermassen:

¹ Bei DARBOUX — σp , bei WEINGARTEN, *Preisschrift*, θp .

² pag. 20, Gleich. 15.

³ Bei den Italienischen Mathematikern $\nabla(p, q)$.

⁴ DARBOUX, l. c.

Es ist $\delta^a p = {}^a \delta p$, also

$$(\delta^a p, x) = (\delta p, {}^a x) = (P^* A, x du)$$

und damit nach (16')

$$I({}^a p) = M(P^* A) = (A, P),$$

w. z. b. w.

Für $\Delta_{22} p$ giebt BIANCHI¹ ohne Beweis die Formel

$$(31) \quad 4\Delta_{22} p \Delta_1 p = 2\Delta_2 p \Delta(p, \Delta_1 p) - \Delta_1 \Delta_1 p.$$

Man hat aber

$$d(A, pp) = 2(A, p \delta p) = -2(\delta p, {}^a p) = -2(P, {}^a p du).$$

Setzt man für du $p, {}^a p$ oder ${}^r p$, so folgt:

$$(32') \quad \left(\frac{\partial}{\partial u}(A, pp), p \right) = -2(P, {}^a p p),$$

$$(32'') \quad \left(A, \frac{\partial}{\partial u}(A, pp)p \right) = 2(P, {}^a p {}^a p),$$

$$(32''') \quad \left(P, p \frac{\partial}{\partial u}(A, pp) \right) = 2(P, {}^a p {}^r p) = 2({}^r {}^a p, {}^r p) = (P, P)(A, pp).$$

Aus (32'') folgt zunächst nach (23)

$$(32) \quad \frac{1}{2} \Delta(p, \Delta_1 p) = \Delta_1 p \Delta_2 p - \Delta_{12} p.$$

Ferner hat man nach (22), da P eine symmetrische Form ist,

$$(P, {}^a p {}^a p)(P, pp) - (P, {}^a p p)^2 = (A, pp)^2 \frac{1}{2} (P, P),$$

oder nach (32'') und (32')

$$\frac{1}{2} \Delta(p, \Delta_1 p) \Delta_{12} p - \frac{1}{4} \theta^2(p, \Delta_1 p) = \Delta_1^2 p \cdot \Delta_{22} p.$$

Hierin hat man nur θ und Δ_{12} nach (30) und (32) auszudrücken, um (31) zu erhalten.

Unter der Annahme $(p, du) = dp$ lautet noch (32'''):

$$\left(P, \frac{\partial p}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Delta_1 p}{\partial u} \right) = 2\Delta_{22} p \Delta_1 p$$

¹ *Lezioni di geometria differenziale*, Kap. II, Gleich. (26').

und, wenn man die linke Seite ausschreibt,

$$(33) \quad 2\Delta_{22}p\Delta_1p \\ = \frac{1}{T^2} \left[p_{11} \frac{\partial p}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \Delta_1 p}{\partial u_2} - p_{12} \left(\frac{\partial p}{\partial u_1} \frac{\partial \Delta_1 p}{\partial u_2} + \frac{\partial p}{\partial u_2} \frac{\partial \Delta_1 p}{\partial u_1} \right) + p_{22} \frac{\partial p}{\partial u_1} \frac{\partial \Delta_1 p}{\partial u_1} \right].$$

Diese Formel scheint bisher noch nicht angegeben worden zu sein.

§ 19. In den Ausdrücken (29—29''') hatte z die Repräsentanten der Classen abhängiger linearer Formen zu durchlaufen, ausschliesslich der beiden Teiler von A . Diese Beschränkung bedarf kaum der Erwähnung, weil in diesem Falle die Formeln durch das Verschwinden von (A, zz) bedeutungslos werden.

Man kann aber als Repräsentant irgend einer Klasse linear abhängiger Formen stets ein exaktes Differential wählen und demnach z alle reelle linear unabhängigen Differentiale dz durchlaufen lassen. Dabei durchläuft z selbst alle von einander unabhängige Funktionen zweier Variablen; r sollte irgend eine von z unabhängige Covariante von z sein. Setzen wir fest, dass r ein exaktes Differential $d\sigma$ ist, so ist σ eine von z unabhängige Invariante von z . Die einfachste Invariante von z ist $\Delta_1 z$. Wählen wir daher, vorausgesetzt, dass $\Delta_1 z$ keine Funktion von z allein ist, $(r, du) = d\Delta_1 z$, so gehen die Formeln (29) und (29''') unter Beachtung von (32''') über in folgende:

$$(D) \quad \begin{cases} (p_{(1)}, du) = \frac{dz}{\sqrt{\Delta_1 z}}, \\ (p_{(2)}, du) = \frac{-\Delta(z, \Delta_1 z) dz + \Delta_1 z d\Delta_1 z}{\theta(z, \Delta_1 z) \cdot \sqrt{\Delta_1 z}}, \\ (p_{(3)}, du) = \frac{-2\Delta_{22} z \Delta_1 z dz + \Delta_{12} z d\Delta_1 z}{\theta(z, \Delta_1 z) \cdot \Delta_1 z}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke werden auch dann bedeutungslos, wenn $\Delta_1 z$ eine Funktion von z allein ist, d. h. sie stellen alle Formen p_1, p_2, p_3 dar, die den Relationen (28 bis 28'') genügen, ausgeschlossen den Fall, dass (p_1, du) ein exaktes Differential ist.

Aus den Sätzen X und XI folgt nun, dass man alle Tripel von Formen, die die Bedingungen (C) erfüllen, herstellen kann, indem man sich alle Formen der Krümmung K angeschrieben denkt und sie in all-

gemeinster Weise als Summen zweier Quadrate, $p_{(1)}^2 + p_{(2)}^2$, darstellt, wobei $(p_{(1)}, p_{(2)}) = 1$ zu nehmen ist. Dann genügen nämlich $p_{(1)}, p_{(2)}$ und

$$p_{(3)} = -Ip_{(1)} \cdot p_{(1)} - Ip_{(2)} \cdot p_{(2)}$$

den Relationen (C).

Die Formen der Krümmung K ordnen sich aber in Schaaren äquivalenter Formen, d. h. solcher Formen, die durch Transformation der Veränderlichen in einander übergehen. Zu jeder solchen Schaar gehört die Gruppe der Substitutionen, die die Formen der Schaar und damit die zugehörigen Tripel $p_{(1)}, p_{(2)}, p_{(3)}$ in einander überführen. Infolge ihrer Invarianz stellen mithin (unter der Beschränkung $Ip_{(1)} \geq 0$) die Gleichungen (D) sämtliche zu einer Schaar gehörigen Tripel $p_{(1)}, p_{(2)}, p_{(3)}$ dar.

Hier tritt nun ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Falle eines veränderlichen und eines constanten K auf. Im ersten Fall giebt es unter den Formen der Krümmung K unendlich viele Schaaren, aus jeder Klasse (d. h. Gesamtheit äquivalenter Formen) ausschliesslich der Klassen constanter Krümmung eine, und die zu einer solchen Schaar gehörige Substitutionengruppe umfasst niemals die Gesamtheit aller Substitutionen.

Ist dagegen K eine Constante, so besteht die Gesamtheit aller Formen der Krümmung K aus einer einzigen Schaar, da diese Formen eine Klasse bilden. Die zugehörige Substitutionsgruppe umfasst daher alle Substitutionen. *Im Falle $K = \text{const.}$, und nur in diesem, stellen also die Formeln (D) alle Formen dar, welche die Relationen (C) und $Ip_{(1)} \geq 0$ erfüllen.*

VI.

§ 20. In dem singulären Fall $Ip_{(1)} = 0$ muss sich naturgemäss der gleiche Unterschied zwischen veränderlichem und constantem K geltend machen. Befriedigt man durch den Ansatz

$$(34) \quad (p_{(1)}, du) = dp, \quad (p_{(2)}, du) = \lambda dt, \quad (p_{(3)}, du) = \mu dt$$

die Gleichung $Ip_{(1)} = (p_{(2)}, p_{(3)}) = 0$ identisch, so folgt aus den beiden andern

$$\theta(t, \lambda) = \mu \theta(t, p); \quad \theta(t, \mu) = -\lambda K \theta(t, p).$$

Also sind t, p unabhängige Funktionen. Führt man sie als neue Variable ein, so folgt:

$$(34') \quad \frac{\partial \lambda}{\partial p} = \mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial p} = -K\lambda,$$

also:

$$(35) \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2} + K\lambda = 0.$$

Ist K nicht constant, so ist es als Funktion von u_1, u_2 gegeben. Wählt man für λ irgend eine Funktion von p und t , nur so, dass $\frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2}$ nicht constant ist, so ist (35) eine Beziehung zwischen p, t und u_1, u_2 . Bestimmt man noch p, t als Funktionen von u_1, u_2 so, dass diese Beziehung identisch erfüllt ist, so sind die Formen (34) für $\mu = \frac{\partial \lambda}{\partial p}$ den Relationen (C) unterworfen.

Ist dagegen K eine Constante, so ist (35) eine Differentialgleichung für λ , und es folgt aus ihr, wenn $K \geq 0$:

$$\lambda = a \cos kp + b \sin kp, \quad \text{wo} \quad k = \sqrt{K},$$

und a und b von t abhängen können. Jenachdem $a^2 + b^2 \geq 0$ oder $= 0$ ist, kann $\lambda = f(t) \cos k(p - p_0)$ oder $\lambda = f(t) e^{ikp}$ gesetzt werden. Indem noch für $\int f(t) dt$ t geschrieben und (34') beachtet wird, erhält man folgende identische Darstellung der Formen $p_{(1)}, p_{(2)}, p_{(3)}$, im Falle $K = \text{const.} \geq 0$, $I p_{(1)} = 0$:

$$(D') \quad \begin{cases} p_{(1)} = dp, & p_{(2)} = \cos k(p - p_0) \cdot dt, & p_{(3)} = -k \sin k(p - p_0) \cdot dt, \\ \text{oder} & p_0 = p_0(t), \\ p_{(1)} = dp, & p_{(2)} = e^{iup} dt, & p_{(3)} = ike^{iup} dt, \quad i = \pm \sqrt{-1}. \end{cases}$$

Der Fall $K = 0$ bietet keine principiellen Schwierigkeiten. Der Vollständigkeit wegen sei angeführt, dass entweder

$$\text{oder} \quad p_{(1)} = dp, \quad p_{(2)} = (p - f(t)) dt, \quad p_{(3)} = dt,$$

$$p_{(1)} = dp, \quad p_{(2)} = dt, \quad p_{(3)} = 0 \text{ ist.}$$

VII.

§ 21. Die Relationen (C) treten bei der Betrachtung orthogonaler Systeme, die von zwei oder mehr Veränderlichen abhängen, wieder auf. Sei $(X_i^{(\lambda)})$ ein orthogonales System. Componiert man es mit dem System seiner Differentiale, $(dX_i^{(\lambda)})$, so erhält man die unendlich kleinen Grössen

$$\rho_{ik} = \sum_{\lambda} dX_i^{(\lambda)} X_k^{(\lambda)}.$$

Infolge der Orthogonalitätsbedingungen

$$\sum_k X_k^{(\lambda)} X_k^{(\mu)} = \delta_{\lambda\mu}$$

ist

$$(36) \quad dX_i^{(\lambda)} = \sum_k \rho_{ik} X_k^{(\lambda)},$$

und aus der anderen Reihe,

$$\sum_{\lambda} X_i^{(\lambda)} X_k^{(\lambda)} = \delta_{ik},$$

folgt durch Differenzieren:

$$(37) \quad \rho_{ik} + \rho_{ki} = 0.$$

Es bietet sich auf verschiedenen Gebieten die Aufgabe, wenn die ρ_{ik} (als lineare Formen der Differentiale der Variablen) gegeben sind, die $X_i^{(\lambda)}$ aus den Differentialgleichungen (36) zu bestimmen. Dabei gilt der Satz:

XIII. *Giebt es ein orthogonales System, welches den Gleichungen (36) genügt, so giebt es für jedes (orthogonale) System von Anfangswerthen ein solches und nur eines.*

Genügt nämlich das System $(Y_i^{(\lambda)})$ den Gleichungen (36), so folgt für die Grössen $X_i^{(\lambda)} = \sum_{\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_i^{(\mu)}$, wenn die $\alpha_{\lambda\mu}$ constant sind:

$$dX_i^{(\lambda)} = \sum_{\mu} \alpha_{\lambda\mu} dY_i^{(\mu)} = \sum_{\mu, k} \alpha_{\lambda\mu} \rho_{ik} Y_k^{(\mu)} = \sum_k \rho_{ik} X_k^{(\lambda)},$$

und wenn umgekehrt die Systeme $(X_i^{(\lambda)})$ und $(Y_i^{(\lambda)})$ beide (36) erfüllen, so ist:

$$\sum_i (X_i^{(\lambda)} dY_i^{(\mu)} + dX_i^{(\lambda)} Y_i^{(\mu)}) = \sum_{i, k} \rho_{ik} X_i^{(\lambda)} Y_k^{(\mu)} + \sum_{i, k} \rho_{ik} X_k^{(\lambda)} Y_i^{(\mu)} = 0,$$

also

$$\sum_i X_i^{(\lambda)} Y_i^{(\mu)} = \alpha_{\lambda\mu},$$

wo $\alpha_{\lambda\mu}$ constant ist. Da das System $(\alpha_{\lambda\mu})$ aus den orthogonalen $(X_i^{(\lambda)})$ und $(Y_i^{(\mu)})$ zusammengesetzt ist, ist es selbst orthogonal. Somit erhält man aus einem particulären Integral von (36) das allgemeine durch Composition mit einem willkürlichen constanten Orthogonalsystem. Damit ist Satz XIII ausgesprochen.

§ 22. Wenn das System $X_i^{(\lambda)}$ von zwei unabhängigen Variablen u_1, u_2 abhängt, so erfordert das Bestehen der Gleichungen (36) das Erfülltsein der Integrabilitätsbedingungen für die $dX_i^{(\lambda)}$. Die ρ_{ik} sollen als lineare Formen der du_k mit $(r_{(ik)}, du)$ bezeichnet werden. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_k I(X_k^{(\lambda)} r_{(ik)}) &= \sum_k X_k^{(\lambda)} I r_{(ik)} + \sum_k \left(r_{(ik)}, \frac{\partial}{\partial u} X_k^{(\lambda)} \right) \\ &= \sum_k X_k^{(\lambda)} \{ I r_{(ik)} + \sum_l (r_{(il)}, r_{(ik)}) \} = 0, \end{aligned}$$

d. h.

$$I r_{(ik)} + \sum_l (r_{(il)}, r_{(ik)}) = 0.$$

Die Betrachtung werde jetzt auf ein dreireihiges Orthogonalsystem beschränkt und

$$(37') \quad r_{(23)} = -r_{(32)} = r_{(1)}, \quad r_{(31)} = -r_{(13)} = r_{(2)}, \quad r_{(12)} = -r_{(21)} = r_{(3)}$$

gesetzt. Dadurch werden die Integrabilitätsbedingungen zu

$$(C'') \quad I r_{(1)} = (r_{(2)}, r_{(3)}); \quad I r_{(2)} = (r_{(3)}, r_{(1)}); \quad I r_{(3)} = (r_{(1)}, r_{(2)}).$$

Sind die beiden Seiten der drei Gleichungen für sich null, so lassen sich die Gleichungen (36) auf den Fall einer unabhängigen Veränderlichen zurückführen und sind dann, wie später zu zeigen ist, stets integrabel.

Unter Ausschluss dieses Falles werde angenommen, dass $(r_{(2)}, r_{(3)})$ nicht null sei. Dann ist $r_{(1)}$ vermittelt der beiden letzten der Gleichungen (C'') nach (18') durch $r_{(2)}, r_{(3)}$ eindeutig bestimmt.

Existiert also ein orthogonales System, welches die beiden Gleichungen

$$(36') \quad -\sum_\lambda X_\lambda^{(1)} dX_\lambda^{(2)} = (r_{(2)}, du), \quad \sum_\lambda X_\lambda^{(1)} dX_\lambda^{(3)} = (r_{(3)}, du)$$

erfüllt, so ist auch

$$(36'') \quad \sum_{\lambda} X_3^{(\lambda)} dX_2^{(\lambda)} = (r_{(1)}, du)$$

und damit allgemein (36) befriedigt.

Setzt man aber $r_{(3)} = -p_{(1)}$, $r_{(2)} = p_{(2)}$, $r_{(1)} = p_{(3)}$, so sagen die Gleichungen (C') nach Satz XII aus, dass die quadratische Form $r_{(2)}^2 + r_{(3)}^2$ die Krümmung 1 besitzt. Nach einem Satz des Hrn. WEINGARTEN¹ existieren also drei Funktionen $X_1^{(1)}$, $X_1^{(2)}$, $X_1^{(3)}$ welche die beiden Bedingungen

$$(38) \quad \sum_{\lambda} X_1^{(\lambda)} X_1^{(\lambda)} = 1,$$

$$(39) \quad \sum_{\lambda} dX_1^{(\lambda)} dX_1^{(\lambda)} = (r_{(2)}, du)^2 + (r_{(3)}, du)^2$$

erfüllen. Infolge der Unabhängigkeit von $r_{(2)}$ und $r_{(3)}$ kann man aber

$$(40) \quad dX_1^{(\lambda)} = X_2^{(\lambda)}(r_{(3)}, du) - X_3^{(\lambda)}(r_{(2)}, du)$$

setzen, wobei nach (18')

$$(40') \quad X_2^{(\lambda)} : X_3^{(\lambda)} : 1 = \left(\frac{\partial X_1^{(\lambda)}}{\partial u}, r_{(2)} \right) : \left(\frac{\partial X_1^{(\lambda)}}{\partial u}, r_{(3)} \right) : (r_{(2)}, r_{(3)}).$$

Die so definierten Grössen $X_2^{(\lambda)}$, $X_3^{(\lambda)}$ erfüllen mit $X_1^{(\lambda)}$ identisch die Orthogonalitätsbedingungen, wie man z. B. erkennt, wenn man (40) auf (39) und die aus (38) folgende Gleichung $\sum_{\lambda} X_1^{(\lambda)} dX_1^{(\lambda)} = 0$ anwendet und beachtet, dass die Coefficienten der $r_{(i)}$ einzeln verschwinden müssen.

Aus (40) ergibt sich dann aber unmittelbar (36'), also genügt dieses System den Gleichungen (36), d. h.:

XIV. Die Bedingungen (C') sind notwendig und hinreichend für die Existenz orthogonaler Systeme, die den Gleichungen (36) genügen.

§ 23. Die Bestimmung der Grössen $X_1^{(\lambda)}$ erfordert nach dem erwähnten Satz des Hrn. WEINGARTEN die Integration zweier gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Man kann dies noch auf andere Weise erkennen. Die Differential-

¹ Crelles Journal, Bd. 94 und 95.

gleichungen (36) lauten ausgeschrieben, unter Weglassung des oberen Index:

$$dX_1 = (r_{(3)}, du)X_2 - (r_{(2)}, du)X_3;$$

$$dX_2 = (r_{(1)}, du)X_3 - (r_{(3)}, du)X_1;$$

$$dX_3 = (r_{(2)}, du)X_1 - (r_{(1)}, du)X_2.$$

Setzt man, um die Gleichung $\sum X_i^2 = 1$ identisch zu befriedigen,

$$X_1 = \frac{x+y}{x-y}, \quad X_2 = \frac{1-xy}{x-y}, \quad X_3 = \frac{1+xy}{i(x-y)},$$

so erhält man nach einiger Rechnung statt der drei angeschriebenen Gleichungen die eine Riccatische, der x und y genügen:

$$(41) \quad dx = \frac{i}{2} \{ (r_{(2)} - ir_{(3)}, du) + 2(r_{(1)}, du)x - (r_{(2)} + ir_{(3)}, du)x^2 \}.$$

Hängen die $r_{(i)}$ nur von einer Variablen ab, so sind für die Integrabilität von (41) keine weiteren Bedingungen erforderlich. Im Falle zweier unabhängiger Veränderlichen zerfällt die Gleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen nach je einer der Variablen, und diese kann man (als Riccatische) leicht in bekannter Weise auf lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung zurückführen.

§ 24. Bezeichnet man die Form $r_{(2)}^2 + r_{(3)}^2$ mit G_1 und wählt T so, dass $(r_{(2)}, r_{(3)}) = 1$ wird, so ist $(G_1, xr_{(3)}) = (r_{(2)}, x)$, also nach (40') auch $X_2^{(i)} = (G_1, \frac{\partial X_1^{(i)}}{\partial u} r_{(3)})$. Führt man also mittelst der Formeln (D)

$$r_{(3)} = -p_{(1)} = -\frac{dz}{\sqrt{\Delta_1 z}}$$

ein, so wird nach (40') und (D):

$$(E) \quad \begin{cases} X_2^{(i)} = -\frac{\Delta(z, X_1^{(i)})}{\sqrt{\Delta_1 z}}, & X_3^{(i)} = -\frac{\theta(z, X_1^{(i)})}{\sqrt{\Delta_1 z}}; \\ r_{(3)} = -\frac{dz}{\sqrt{\Delta_1 z}}, \\ r_{(2)} = \frac{-\Delta(z, \Delta_1 z) dz + \Delta_1 z d\Delta_1 z}{\theta(z, \Delta_1 z) \sqrt{\Delta_1 z}}, \\ r_{(1)} = \frac{-2\Delta_2 z \Delta_1 z dz + \Delta_1 z^2 d\Delta_1 z}{\theta(z, \Delta_1 z) \cdot \Delta_1 z}, \end{cases}$$

wobei die Differentialparameter aus der Form G_1 gebildet sind. Wenn

$$\sum_k dX_1^{(k)} dX_1^{(k)} = (G_1, du du)$$

ist, so genügen die X_i'' identisch den Orthogonalitätsbedingungen, die r den Relationen (C') und die dX_i'' den Gleichungen (36). Jedes orthogonale System, in welchem weder $Ir_{(1)}$ noch $Ir_{(3)}$ verschwindet, ist durch die Formeln (E) darstellbar. Alle von z abhängigen Funktionen liefern, in (E) eingesetzt, dasselbe orthogonale System.

VIII.

§ 25. Die Aufgabe, alle Biegungen einer gegebenen Fläche zu bestimmen, führt auf die andere, eine quadratische Differentialform von nicht verschwindender Discriminante als Summe dreier Quadrate exakter Differentiale darzustellen.

Hat man überhaupt (A, xx) als Summe dreier Quadrate dargestellt:

$$(A, xy) = \sum_i (a_{(i)}, x)(a_{(i)}, y), \quad (i = 1, 2, 3)$$

und ist T^2 wieder die Discriminante von A , so ist

$$2 = (A, A) = \sum_{i,k} (a_{(i)}, a_{(k)})^2.$$

Bezeichnet man die drei Grössen $(a_{(2)}, a_{(3)})$, $(a_{(3)}, a_{(1)})$, $(a_{(1)}, a_{(2)})$ beziehungsweise mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ so wird daraus

$$\sum_i \alpha_i^2 = 1$$

und damit

$$(A, a_{(i)} a_{(k)}) = c_{ik} - \alpha_i \alpha_k.$$

Ferner ist nach (18')

$$(42) \quad \sum_i \alpha_i (a_{(i)}, p) = 0,$$

und dies ist zugleich die einzige lineare Relation, die zwischen den Formen $a_{(i)}$ bestehen kann.

Endlich ist noch

$$(43) \quad \sum_i (A, a_{(i)} p)(a_{(i)}, x) = - \sum_i (a_{(i)}, {}^a p)(a_{(i)}, x) = - (A, {}^a p x) = (p, x)$$

also

$$(43') \quad \sum_i (A, a_{(i)} p)(A, a_{(i)} q) = (A, pq).$$

Mit (42) folgt aus (43) für ein beliebiges h :

$$(44) \quad \sum_i [(A, a_{(i)} p) + h \cdot \alpha_i](a_{(i)}, x) = (p, x),$$

und dies ist die allgemeinste Darstellung von p durch $a_{(1)}, a_{(2)}, a_{(3)}$.§ 26. Ist nun A speziell als Summe der Quadrate dreier exakten Differentiale

$$dz_i = (z_{(i)}, du)$$

dargestellt, so ist $A - z_{(1)}^2 = z_{(2)}^2 + z_{(3)}^2$ eine Form der Krümmung null; und umgekehrt: ist die Krümmung von $A - z_{(1)}^2$ null, so kann man durch eine Quadratur zwei Differentiale dz_2 und dz_3 bestimmen, so dass

$$A - z_{(1)}^2 = z_{(2)}^2 + z_{(3)}^2$$

wird.

Um die Krümmung von $A - z_{(1)}^2$ zu berechnen, sei, wie in (29),

$$z_{(1)} \cdot (A, z_{(1)} z_{(1)})^{-\frac{1}{2}} = p_{(1)}$$

gesetzt, was im allgemeinen, und, wenn Realität verlangt wird, stets möglich ist. Dadurch wird für $z = z_{(1)}$, $\zeta = \zeta_1 = \sqrt{1 - (A, zz)}$:

$$(A, xx) = (p_{(1)}, x)^2 + (p_{(2)}, x)^2, \quad (p_{(1)}, p_{(2)}) = 1,$$

$$(A, xx) - (z, x)^2 = (q_{(1)}, x)^2 + (q_{(2)}, x)^2, \quad (q_{(1)}, q_{(2)}) = \zeta,$$

wobei

$$q_{(1)} = \zeta \cdot p_{(1)} = \zeta \cdot \frac{z}{\sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad q_{(2)} = p_{(2)}.$$

Nunmehr ist nach (24)

$$Ip_{(1)} = \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \left(z, \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right), \quad Iq_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \left(z, \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right),$$

weil ja (z, du) ein exaktes Differential sein soll. Mithin ist

$$Iq_{(1)} = \frac{1}{\zeta} Ip_{(1)},$$

und daraus nach (C), weil $q_{(2)} = p_{(2)}$:

$$q_{(3)} = \frac{1}{\zeta} p_{(3)} \quad \text{und} \quad Iq_{(3)} = \frac{1}{\zeta} K_a - \frac{1}{\zeta^2} \left(p_{(3)}, \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right).$$

Es war

$$(A, zz) = 1 - \zeta^2;$$

somit ist $\frac{\partial(A, zz)}{\partial u} = -2\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial u}$ und nach (29'') und (32''')

$$\left(p_{(3)}, \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right) = \frac{1}{2\zeta \cdot (A, zz)} \left(Z, \zeta \frac{\partial(A, zz)}{\partial u} \right) = \frac{\Delta_{21} \zeta}{\zeta}.$$

Wir erhalten mithin für die Krümmung von $A - dz^2$ den Ausdruck

$$\{K_a(1 - \Delta_1 z) - \Delta_{22} z\} (1 - \Delta_1 z)^{-2}$$

und damit den bekannten Satz:

XV. Genügt z der Differentialgleichung

$$(F) \quad \Delta_{22} z = K_a (1 - \Delta_1 z),$$

und ist $\Delta_1 z \geq 1$, so kann man durch Quadraturen zwei Funktionen x, y bestimmen, derart dass $(A, du du) = dx^2 + dy^2 + dz^2$ wird.

Ist $\Delta_1 z = 1$, so ist nach (33) $\Delta_{22} z = 0$ und (F) erfüllt. Andererseits ist die Discriminante von $A - dz^2$ null, d. h.

$$(A, du du) = dz^2 + (p, du du),$$

wo p nur im Falle $K_a = 0$ ein exaktes Differential sein kann. Die Differentialgleichung besitzt also Integrale, die zu dem Deformationsproblem in keinerlei Beziehung stehen. Ausserdem werden die Funktionen x und y nur dann reell, wenn $\Delta_1 z < 1$ ist. Nach irgend welchen bekannten Methoden ist die Gleichung nur in dem fast trivialen Fall $K_a = 0$ zu integrieren.

IX.

§ 27. Differentiiert man beide Seiten der Gleichung

$$(A, xy) = \sum_i (z_{(i)}, x) (z_{(i)}, y), \quad (i = 1, 2, 3)$$

drückt $\partial z_{(i)}$ durch Z_i aus und schreibt p für du , so kommt:

$$\sum_i (Z_i, xp)(z_{(i)}, y) + \sum_i (Z_i, yp)(z_{(i)}, x) = 0.$$

Vertauscht man p, x, y , so folgt aus der Symmetrie der Formen Z_i :

$$\sum_i (Z_i, xy)(z_{(i)}, p) = 0.$$

Da die Gleichung (42) die einzige lineare Relation zwischen den Formen $a_{(i)}$ ist, muss

$$(45) \quad (Z_i, xy) = -\zeta_i(C, xy) \quad \text{oder} \quad (\partial z_{(i)}, x) = -\zeta_i(C, x du)$$

sein, wobei auch C eine symmetrische Form ist. Sie wird in der Flächentheorie als *zweite Fundamentalform* bezeichnet und lässt sich als:

$$(45') \quad (C, x du) = \sum_i d\zeta_i^e(z_{(i)}, x) = -\sum_i \zeta_i(Z_i, x du)$$

darstellen.

Das Differential $d\zeta_i$ sei mit $(\bar{z}_{(i)}, du)$ bezeichnet. Damit ist

$$(\bar{z}_{(1)}, du) = (\partial z_{(2)}, z_{(3)}) + (z_{(2)}, \partial z_{(3)}) = -\zeta_2(C, z_{(1)} du) + \zeta_3(C, z_{(2)} du).$$

Drückt man die ζ_i durch die $z_{(i)}$ aus und beachtet $(z_{(i)}, z_{(i)}) = 0$, so wird:

$$(\bar{z}_{(1)}, du) = -\sum_{i=1}^3 (z_{(i)}, z_{(1)})(C, z_{(i)} du) = \sum_{i=1}^3 (z_{(i)}, z_{(1)})(z_{(i)}, {}^e du) = (A, z_{(1)} {}^e du),$$

also allgemein:

$$(46) \quad (\bar{z}_{(i)}, x) = -(z_{(i)}, {}^e x).$$

Hieraus ergibt sich nach (23) und (43'):

$$\sum (\bar{z}_{(i)}, x)^2 = (A, {}^e x x) = (A, C)(C, x x) - Dc(A, x x).$$

Diese Form, welche das Quadrat des Linienelementes der Gauss'schen Kugel darstellt, sei mit $(G, x x)$ bezeichnet. Man findet leicht:

$$\frac{1}{2}(G, G) = Dg = (Dc)^2.$$

Dc sei mit K bezeichnet und der Fall $K=0$ von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen. Dann ist mit A und C auch G bekannt, und die

Bestimmung der ζ_i erfordert die Integration der im VII^{ten} Capitel erwähnten Riccatischen Gleichung. Hiermit hat man auch die Formen $z_{(i)}$; denn aus (46) folgt, indem man cax für x setzt:

$$(46') \quad (z_{(i)}, x) = -K^{-1}(\bar{z}_{(i)}, {}^cax) = -K^{-1}(A, \bar{z}_{(i)}x).$$

Diese Ausdrücke erfüllen identisch die Forderung

$$\sum z_{(i)}^2 = A.$$

§ 28. Die angegebenen Schritte sind dann und nur dann ausführbar, wenn die Ausdrücke (46') integrabel sind und $K_g = 1$ ist. Um die Bedingungen dafür aufzustellen, führe ich neben den in bezug auf A auch die in bezug auf G gebildeten Invarianten ein und unterscheide sie durch einen Strich ' von den ersten. Da $Dg = K^2$, kann $T' = KT$ gewählt werden.

Zunächst folgt aus (46'), indem man für x links Kx , rechts $-{}^cax$ einsetzt:

$$K^2(z_{(i)}, x) = (A, {}^c\bar{z}_{(i)}{}^cax) = (G, \bar{z}_{(i)}{}^cax).$$

Von den Systemen $z_{(i)}$, $\bar{z}_{(i)}$, A , G und C sind die mit *lateinischen* Buchstaben zu schreibenden Coefficienten von der speciellen Wahl von T unabhängig definiert. Daraus ergibt sich, dass auch $(z_{(i)}, x) = \sum_k z_{i,k} \xi_k$ T nicht enthält, während in $(G, \bar{z}_i{}^cax)$ T^2 im Nenner steht (cf. § 10 und 11). Daher lautet die letzte Gleichung, mit $T' = TK$ in Bezug auf G gebildet:

$$(46'') \quad (z_{(i)}, x)' = (G, \bar{z}_{(i)}{}^cax)'.$$

Die Integrabilitätsbedingung von $z_{(i)}$ ist erfüllt, wenn $(\partial' z_{(i)}, x)$ eine symmetrische Form in x und du ist. Nun ist $\partial' G = 0$, also

$$(46''') \quad (\partial' z_{(i)}, x)' = (G, \partial' \bar{z}_{(i)}{}^cax)' + (G, \bar{z}_{(i)} \partial' {}^cax)'.$$

Aus der Definitionsgleichung von G ,

$$\sum (\bar{z}_{(i)}, x)^2 = (G, xx),$$

kann aber genau wie in § 27, Gl. (45, 45'), geschlossen werden, dass

$$(\partial' \bar{z}_{(i)}, x)' = -\zeta'_i(B, xdu)'$$

sein muss, wenn

$$\zeta'_1 = (\bar{z}_{(2)}, \bar{z}_{(3)})' = \frac{1}{K} (\bar{z}_{(2)}, \bar{z}_{(3)}) \quad \text{u. s. f. und} \quad (B, xdu)' = \sum_i d\zeta'_i(\bar{z}_{(i)}, x)'.$$

Nun ist nach (46)

$$(\bar{z}_{(2)}, \bar{z}_{(3)}) = ({}^{ca}z_{(2)}, {}^{ca}z_{(3)}) = K(z_{(2)}, z_{(3)}),$$

also allgemein $\zeta'_i = \zeta_i$, d. h. $B = G$ und

$$(\partial' \bar{z}_{(i)}, x)' = -\zeta'_i(G, xdu)'.$$

Damit wird die erste Form der rechten Seite in (46''') zu

$$-(\partial' \bar{z}_{(i)}, {}^g x)' = \zeta'_i(G, {}^g xdu)' = -\zeta'_i(C, xdu)',$$

jedenfalls also symmetrisch in Bezug auf x und du , und es bleibt dieselbe Bedingung noch für $(G, \bar{z}_{(i)} {}^{gc} x)' = -(\partial' C, {}^g \bar{z}_{(i)} x)'$ zu erfüllen. Da unter den drei Formen ${}^g \bar{z}_{(i)}$ zwei linear unabhängige sind, kann ein beliebiges System y für ${}^g \bar{z}_{(i)}$ gesetzt werden, so dass endlich die Integrabilität der Ausdrücke (46'') durch folgende Identität bedingt wird:

$$(G) \quad (\partial'_1 C, y d_2 u)' = (\partial'_2 C, y d_1 u)'.$$

§ 29. Um K_g zu berechnen bringt man am besten die drei Formen A, C, G auf die gemeinsame Normalform. Man überzeugt sich leicht, dass dabei

$$A = p_{(1)}^2 + p_{(2)}^2, \quad (p_{(1)}, p_{(2)}) = 1,$$

$$C = \lambda_1 p_{(1)}^2 + \lambda_2 p_{(2)}^2,$$

$$G = \lambda_1^2 p_{(1)}^2 + \lambda_2^2 p_{(2)}^2$$

wird. Es ist nämlich nach § 13

$$(A, C) = \lambda_1 + \lambda_2, \quad K = \lambda_1 \lambda_2,$$

womit sich aus

$$G = (A, C)C - KA$$

der gewünschte Ausdruck für G ergibt.

Setzt man noch

$$q_{(1)} = \lambda_1 p_{(1)}, \quad q_{(2)} = \lambda_2 p_{(2)},$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{\mu_1'}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\mu_2'},$$

so wird

$$G = q_{(1)}^2 + q_{(2)}^2, \quad (q_{(1)} q_{(2)})' = 1, \quad C = \mu_1 q_{(1)}^2 + \mu_2 q_{(2)}^2, \quad A = \mu_1^2 q_{(1)}^2 + \mu_2^2 q_{(2)}^2.$$

Die algebraische Beziehung zwischen den drei Formen A, C, G ist also symmetrisch in Bezug auf A und G .

Zunächst ergibt sich, wenn (28') auf $q_{(1)}, q_{(2)}$ angewandt wird, aus

$$(C, xy)' = \sum_{\rho=1}^2 (p_{(\rho)}, y)' (q_{(\rho)}, x)':$$

$$(\delta' C, xy)' = \left\{ \sum_{\rho} (\delta' p_{(\rho)}, y)' (q_{(\rho)}, x)' \right\} + (q_{(3)}, du)' \{ (p_{(1)}, y)' (q_{(2)}, x)' - (p_{(2)}, y)' (q_{(1)}, x)' \},$$

also

$$(\delta'_2 C, x d_1 u)' - (\delta'_1 C, x d_2 u)' =$$

$$(d_1 u, d_2 u)' \left[\left\{ \sum_{\rho} I' p_{(\rho)} \cdot (q_{(\rho)}, x)' \right\} + (p_{(1)}, q_{(3)})' (q_{(2)}, x)' - (p_{(2)}, q_{(3)})' (q_{(1)}, x)' \right].$$

Da dieser Ausdruck nach (G) null ist, müssen die Coefficienten von $q_{(1)}$ und $q_{(2)}$ einzeln verschwinden. Beachtet man dabei, dass $p_{(\rho)} = \mu_{\rho} q_{(\rho)}$ und

$$(q_{(2)}, q_{(3)})' = I' q_{(1)}, \quad (q_{(3)}, q_{(1)})' = I' q_{(2)}$$

ist, so kommt:

$$I' p_{(1)} = \mu_2 I' q_{(1)}, \quad I' p_{(2)} = \mu_1 I' q_{(2)},$$

oder, da

$$(47) \quad I p = K \cdot I' p \text{ ist:}$$

$$I p_{(1)} = \lambda_1 I' q_{(1)}, \quad I p_{(2)} = \lambda_2 I' q_{(2)},$$

d. h. nach (28'') und (18')

$$(G') \quad p_{(3)} = q_{(3)}.$$

Da diese Bedingung mit (G) gleichbedeutend, andererseits aber vollkommen symmetrisch in Bezug auf die Formen A und G ist, gilt (G) auch, wenn die Operation δ' durch δ ersetzt wird. Die Formel (G) ist identisch mit den sogenannten Codazzischen Formeln.

Nach (G') ist nunmehr

$$Ip_{(3)} = Iq_{(3)},$$

d. h. nach (47):

$$K_a = K_g \cdot K,^1$$

woraus sich, da $K_g = 1$ sein soll, die Gauss'sche Relation

$$K = K_a$$

ergibt.

Damit erhält man folgenden Satz:

XVI. Zu jedem Tripel von Funktionen z_1, z_2, z_3 , welche die Bedingung

$$dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^2 = (A, du du), \quad (K_a \geq 0)$$

erfüllen, gehört eine symmetrische Form C , welche den Relationen

$$Dc = K_a,$$

$$(\partial_2 C, x d_1 u) - (\partial_1 C, x d_2 u) = 0$$

genügt, und umgekehrt. Die Bestimmung der dz_i aus A und C erfordert die Integration einer totalen Riccati'schen Differentialgleichung.

X.

§ 30. Wenn man A auf zwei verschiedene Weisen als Summe dreier Quadrate dargestellt hat:

$$(A, xx) = \sum_i (a_{(i)}, x)^2 = \sum_\lambda (z_{(\lambda)}, x)^2,$$

so existiert ein und nur ein orthogonales System der Determinante $+1$, welches die Bedingungen

$$(4S) \quad \tilde{z}_{(\lambda)} = \sum_i a_{(i)} X_i^{(\lambda)}$$

erfüllt. Nach (44) muss dabei

$$X_i^{(\lambda)} = (A, a_{(i)} z_{(\lambda)}) + h_\lambda \alpha_i$$

¹ WEINGARTEN, Festschrift der techn. Hochschule zu Berlin, 1884; pag. 25, Gleich. 13.

und aus Symmetriegründen (weil auch $a_{(i)} = \sum_{\lambda} X_i^{(\lambda)} z_{(\lambda)}$ ist)

$$h_{\lambda} = h \cdot \beta_{\lambda}$$

sein. Die Orthogonalitätsbedingungen reduzieren sich nach (42) und (43') auf

$$h^2 = 1,$$

und man rechnet leicht nach, dass h der Wert der Determinante des Orthogonalsystems ist.

Umgekehrt folgt aus den Orthogonalitätsbedingungen wieder: $\sum z_i^2 = \sum a_{(i)}^2$, so dass durch den Ansatz (48) die Forderung $\sum z_{(\lambda)}^2 = A$ in allgemeiner Weise identisch befriedigt ist. Damit führt das Deformationsproblem auf die Aufgabe, alle orthogonalen Systeme zu bestimmen, für die die Formen $z_{(\lambda)}$ in (48) exakte Differentiale dz_{λ} werden.

Die Integrabilitätsbedingungen der $z_{(\lambda)}$ werden unter Einführung der Formen $r_{(ik)}$ des siebenten Kapitels zu

$$Ia_{(i)} + \sum_k (a_{(k)}, r_{(ik)}) = 0, \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

oder ausgeschrieben:

$$(49) \quad Ia_{(1)} = (a_{(2)}, r_{(3)}) - (a_{(3)}, r_{(2)}); \quad Ia_{(2)} = (a_{(3)}, r_{(1)}) - (a_{(1)}, r_{(3)});$$

$$Ia_{(3)} = (a_{(1)}, r_{(2)}) - (a_{(2)}, r_{(1)}).^1$$

Ausser diesen algebraischen Gleichungen unterliegen die Formen $r_{(i)}$ noch den Gleichungen (C'). Und umgekehrt, wenn drei Formen $r_{(i)}$ den Gleichungen (C') und (49) genügen, so existieren orthogonale Systeme, die (36) erfüllen, und für alle diese Systeme sind die Formen

$$(z_{(\lambda)}, du) = \sum_i (a_{(i)}, du) X_i^{(\lambda)}$$

exakte Differentiale.

Ferner gilt folgender Satz:

XVII. Kennt man von dem zu einer Lösung $z_{(1)}, z_{(2)}, z_{(3)}$ gehörigen Orthogonalsystem drei Grössen mit demselben unteren Index (etwa 1), und sind derselben von einander unabhängige Funktionen, so kennt man auch die übrigen Grössen des Systems und damit $z_{(1)}, z_{(2)}$ und $z_{(3)}$ selbst.

¹ Cf. DARBOUX, Bd. I, Cap. VII.

Zunächst ist nämlich die Discriminante von

$$(G_1, du du) = \sum dX_1^{(2)} dX_1^{(3)} = (r_{(2)}, du)^2 + (r_{(3)}, du)^2$$

nicht null; daher giebt es unendlich viele Paare $g_{(2)}, g_{(3)}$, von *unabhängigen* Formen, für die

$$G_1 = g_{(2)}^2 + g_{(3)}^2.$$

Drückt man die $r_{(2)}, r_{(3)}$ durch ein specielles solches Paar linear aus, so bilden die Coefficienten wegen

$$r_{(2)}^2 + r_{(3)}^2 = g_{(2)}^2 + g_{(3)}^2$$

ein orthogonales System, so dass man

$$r_{(2)} = g_{(2)} \sin \varphi + g_{(3)} \cos \varphi; \quad r_{(3)} = -g_{(2)} \cos \varphi + g_{(3)} \sin \varphi$$

setzen kann. Durch

$$Ia_{(1)} = (a_{(2)}, r_{(3)}) - (a_{(3)}, r_{(2)})$$

ist dann φ und damit $r_{(2)}$ und $r_{(3)}$ selbst zweideutig bestimmt. Nach (40') findet man daraus unmittelbar die andern Reihen des Systems, w. z. b. w.

§ 31. Die Zweideutigkeit beschränkt sich auf das Vorzeichen der $r_{(i)}$, wenn $Ia_{(1)} = 0$ ist. Diese Thatsache führt auf zwei besonders einfache Specialisierungen, indem man entweder auch $Ia_{(2)}$ und $Ia_{(3)}$, oder aber $a_{(1)}$ selbst als identisch verschwindend annimmt. Im ersten Fall wäre in dem Tripel $a_{(1)}, a_{(2)}, a_{(3)}$ eine particuläre Lösung der Aufgabe von vornherein bekannt. Dies entspricht auch vollständig dem geometrischen Sinn des Deformationsproblems, bei dem es sich um die Biegungen einer »*gegebenen Fläche*« handelt. Da auch zugleich die Gleichungen (49) homogen werden, dürfte die Untersuchung dieses Falles vielleicht lohnend sein.

Unter der zweiten Annahme, dass eine der Formen $a_{(i)}$, — und zwar sei dies jetzt $a_{(3)}$ — identisch null sei, geht zwar die Symmetrie der Gleichungen (49) verloren, dafür aber bestimmen die beiden ersten,

$$Ia_{(1)} = (a_{(2)}, r_{(3)}), \quad Ia_{(2)} = (r_{(3)}, a_{(1)}),$$

$r_{(3)}$ vollständig, und zwar ist $r_{(3)}$ dieselbe Form, die im IV^{ten} Capitel für $a_{(1)} = p_{(1)}, a_{(2)} = p_{(2)}$ mit $p_{(3)}$ bezeichnet war, also auch $Ir_{(3)} = K_a$.

Ist aber $r_{(3)}$ bekannt, so ist auch die zur Darstellung des orthogonalen Systems durch die Formeln (E) dienende Hilfsfunktion z als Funktion von u_1, u_2 definiert. Und zwar muss $z = \text{const.}$ das allgemeine Integral von $(r_{(3)}, du) = 0$ sein; aber z muss nicht die allgemeinste Funktion sein, die diese Bedingung erfüllt; denn die allgemeinste Funktion ist $\varphi(z)$, und diese liefert dasselbe orthogonale System, wie z .

Hat man für z eine specielle Wahl getroffen, so ist nach (E) das Quadrat σ des zu z gehörigen Multipliers von $r_{(3)}$ gleich der in Bezug auf die Form $G_1 = \sum_{\lambda} dX_1^{(\lambda)} dX_1^{(\lambda)}$ zu bildenden Invariante $\Delta_1 z$, vorausgesetzt, dass die Discriminante von G_1 nicht null ist.

Um die Formeln (E) anwenden zu können sei wieder der Fall $K_a = 0$ ausgeschlossen. Dann ist $r_{(3)}$ kein exaktes Differential und z und $\Delta_1 z = \sigma$ sind wohlbestimmte, unabhängige Funktionen $z(u_1, u_2)$, $\sigma(u_1, u_2)$ von u_1 und u_2 . Daher sind die $X_1^{(i)}$ auch Funktionen von z und σ , und umgekehrt sind z und σ Funktionen zweier der $X_1^{(i)}$ oder überhaupt zweier unabhängiger Parameter x_1, x_2 , durch die man die $X_1^{(i)}$ so dargestellt hat, dass die Summe ihrer Quadrate identisch 1 ist. Dann gilt aber der Satz:

XVIII. *Kennt man z als Funktion von x_1, x_2 , so kennt man das ganze orthogonale System und die zugehörige Lösung $z_{(1)}, z_{(2)}, z_{(3)}$.*

Man kennt nämlich G_1 in seiner Darstellung durch x_1, x_2 , also mit z auch $\sigma = \Delta_1 z$ als Funktion von x_1, x_2 . Damit kennt man, den funktionalen Zusammenhang zwischen den u und den x , d. h. man kennt die $X_1^{(i)}$ und nach Satz XVII oder durch die Formeln (E) das ganze System.

§ 32. Es bleibt noch die Frage: *Wie darf z als Funktion von x_1, x_2 gewählt werden, damit es wirklich zu einer Lösung des Problems gehört?*

Die Darstellung des orthogonalen Systems durch (E) befriedigt die Orthogonalitätsbedingungen und die Gleichungen (C') identisch. Durch die Annahme $z = z(u_1, u_2)$, $\Delta_1 z = \sigma(u_1, u_2)$ wurden die Gleichungen

$$Ia_{(1)} = (a_{(2)}, r_{(3)}), \quad Ia_{(2)} = (r_{(3)}, a_{(1)})$$

erfüllt. Es bleibt also nur noch:

$$(49') \quad (a_{(1)}, r_{(2)}) - (a_{(2)}, r_{(1)}) = 0.$$

Führt man in \mathcal{A} z und σ als neue Veränderliche ein, so werde

$$(a_{(1)}, du) = a dz + \alpha d\sigma,$$

$$(a_{(2)}, du) = b dz + \beta d\sigma,$$

wo a, α, b, β bekannte Funktionen von z und σ sind. Dann lautet (49')
ausgeschrieben und mit $\theta(z, \Delta_1 z) \sqrt{\Delta_1 z}$ multipliziert:

$$(W) \quad a \Delta_1 z + \alpha \Delta(z, \Delta_1 z) - b \frac{\Delta_{12} z}{\sqrt{\Delta_1 z}} - 2\beta \Delta_{22} z \sqrt{\Delta_1 z} = 0,$$

worin die Invarianten aus der Form G_1 in x_1, x_2 gebildet sind und für σ überall $\Delta_1 z$ zu setzen ist. Hiermit folgt der Satz:

XIX. Zu jedem Integral z der Differentialgleichung (W), für welches $\Delta_1 z$ eine von z unabhängige Funktion ist, gehört eine Lösung des Deformationsproblems, für die die Form G_1 des zugehörigen Orthogonalsystems eine nicht verschwindende Discriminante besitzt, und umgekehrt.

Wenn also Lösungen des Problems existieren, für die die Discriminante von G_1 null ist, so werden sie durch die Integration der Differentialgleichung (W) nicht gefunden.

Die Differentialgleichung ist zuerst von Hrn. WEINGARTEN in der Preisschrift aufgestellt worden. Sie lässt sich, wie Herr WEINGARTEN ebenda gezeigt hat, für sämtliche bis jetzt bekannten Fälle, in denen das Deformationsproblem vollständig gelöst ist, nach bekannten Methoden integrieren, für das Rotationsparaboloid z. B. durch Zwischenintegrale.

§ 33. Herr WEINGARTEN bezeichnet die Einführung der Variablen z und σ in die quadratische Form \mathcal{A} als *Reduktion* der Form. Das Kriterium, ob die Form $(adz + \alpha d\sigma)^2 + (bdz + \beta d\sigma)^2$ reduziert ist, und ob zu der Zerlegung in zwei Quadrate die Form $(r_{(3)}, du) = -dz : \sqrt{\sigma}$ gehört, lautet

$$Ia_{(1)} = (a_{(2)}, r_{(3)}), \quad Ia_{(2)} = (r_{(3)}, a_{(1)}),$$

oder ausgeschrieben:

$$(50) \quad \frac{\partial a}{\partial \sigma} - \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{\beta}{\sqrt{\sigma}}; \quad \frac{\partial b}{\partial \sigma} - \frac{\partial \beta}{\partial z} = -\frac{a}{\sqrt{\sigma}}.$$

Das Kriterium, ob eine noch nicht in Quadrate zerlegte Form \mathcal{A} redu-

ziert ist, d. h. ob in ihr $r_{(3)} = -\frac{dz}{\sqrt{\sigma}}$ gewählt werden darf, ist nach Satz XI:

$$I_{(3)} = K_a \quad \text{oder} \quad T.K_a = \frac{1}{2\sqrt{\sigma^3}}.$$

Die zugehörige Zerlegung ergibt sich nach demselben Satz durch eine Quadratur.

Aus einer nicht reduzierten Form (A, du) kann man durch eine Quadratur jederzeit eine reduzierte herstellen. Wählt man nämlich $r_{3,2} = 0$, d. h.

$$(r_{(3)}, du) = r_{3,1} du_1,$$

so wird wegen $I_{(3)} = K_a$

$$\frac{\partial r_{3,1}}{\partial u_2} = TK_a, \quad r_{3,1} = \int TK_a du_2.$$

Führt man also

$$z = u_1, \quad \sigma = \left(\int TK_a du_2 \right)^{-2}$$

als neue Variable ein, so wird, wie verlangt, $r_{(3)}$ zu $-\frac{dz}{\sqrt{\sigma}}$, bei geeigneter Definition der Vorzeichens von $\sqrt{\sigma}$.

Diese Reduktion und Zerlegung einer gegebenen Form durch Quadraturen ist in der a. v. S. angeführten Arbeit des Hrn. WEINGARTEN in ausführlichster Weise dargestellt.

XI.

§ 34. Da durch die Integration der Differentialgleichung (W) diejenigen Lösungen des Problems, für die die Discriminante von G_1 verschwindet, nicht gefunden werden, so entsteht die Aufgabe, im gegebenen Falle zu entscheiden, ob solche Lösungen existieren, und, wenn dies der Fall ist, die zu ihrer Auffindung notwendigen Schritte anzugeben. Obgleich das Auftreten solcher Lösungen durchaus singulär ist, kann man trotzdem für eine beliebige Form A die Reduktion und die Aufstellung der Differentialgleichung auf unendlich vielfache Weise so ausführen, dass eine beliebige, vorgeschriebene Lösung durch die Integration der Differentialgleichung

nicht gefunden wird. Um dies einzusehen, bedient man sich am besten der geometrischen Anschauung.

Da $a_{(3)}$ identisch null ist, hat man nach (48) längs der Curven $(a_{(2)}, du) = 0$:

$$dz_1 : dz_2 : dz_3 = X_1^{(1)} : X_1^{(2)} : X_1^{(3)};$$

also sind die $X_1^{(i)}$ die Richtungscosinus der Tangenten der Curven $(a_{(2)}, du) = 0$.

Wenn nun die Discriminante von $G_1 = r_{(2)}^2 + r_{(3)}^2$ null ist, so sind $r_{(2)}$ und $r_{(3)}$ abhängige Formen, d. h. $r_{(2)}$ ist durch $r_{(3)}$ teilbar. Das gleiche gilt von den $dX_1^{(i)}$, da sie nach (40) lineare Verbindungen aus $r_{(2)}$ und $r_{(3)}$ sind. Längs der Curven $(r_{(3)}, du) = 0$ ist also $dX_1^{(i)} = 0$, d. h.:

Ist die Discriminante von G_1 null, so sind die Tangenten der Curven $(a_{(2)}, du) = 0$ längs der Curven $(r_{(3)}, du) = 0$ einander parallel.

Die Curven $(r_{(3)}, du) = 0$ sind also Schattengrenzen der Fläche bei Beleuchtung aus unendlicher Entfernung und mögen kurz als *Streiflinien* der Fläche bezeichnet werden. Auf jeder Fläche nicht verschwindender Krümmung giebt es ∞^2 Streiflinien; jedem unendlich fernen Punkte entspricht eine, und längs einer jeden ist der Fläche ein Cylinder umschrieben.

Wählt man daher auf einer Fläche \mathfrak{F} vom Linienelement $ds = \sqrt{A, du du}$ eine einfach unendliche Schaar Streiflinien, so umhüllen die erzeugenden Geraden der zugehörigen Cylinder eine Schaar von Curven der Fläche, etwa $(p, du) = 0$. Setzt man $(p, du) : \sqrt{A, pp} = (a_{(2)}, du)$, so ist

$$A = a_{(1)}^2 + a_{(2)}^2,$$

und die Discriminante von G_1 verschwindet, da die Cosinus der Tangenten der Curven $(a_{(2)}, du) = 0$ nur von dem Parameter der Streiflinien abhängen.

Bildet man also aus $a_{(1)}$ und $a_{(2)}$ $r_{(3)}$, bringt es auf die Form $dz : \sqrt{G}$ (was ohne Integration ausführbar ist, wenn die Streiflinienschaar durch eine endliche Gleichung gegeben war) und stellt die Differentialgleichung für z auf, so liefert die Integration derselben die Fläche \mathfrak{F} nicht, w. z. b. w.

Andererseits giebt es für jede Form¹ A Differentialgleichungen (W),

¹ sc. nicht verschwindender Krümmung.

die sämtliche Lösungen des Problems liefern, d. h. es giebt auf jeder Fläche eine Schaar von Curven, die für keine Biegung der Fläche sämtlich Streiflinien werden.

Wählt man z. B. für $a_{(1)}$ ein exaktes Differential, so wird $Ia_{(1)} = 0$ und $r_{(3)}$ durch $a_{(2)}$ teilbar, d. h. die Curven $(a_{(2)}, du) = 0$ und $(r_{(3)}, du) = 0$ fallen zusammen. Sind aber die Tangenten der $a_{(2)}$ -Curven längs dieser Curven selbst parallel, so sind die Curven Gerade, die Fläche ist geradlinig.

Bringt man also A — was immer möglich ist, — auf die Gestalt

$$dp^2 + Pdq^2,$$

wo P nicht von der Gestalt

$$\varphi(q)p^2 + \phi(q)p + \chi(q)$$

ist, so liefern die Formen

$$(a_{(1)}, du) = dp,$$

$$(a_{(2)}, du) = Pdq$$

eine Differentialgleichung (W), der keine Lösung des Problems entgeht.

§ 35. Wenn die Discriminante von G_1 null ist, ist $(r_{(2)}, r_{(3)}) = 0$. Im Kapitel VI war gezeigt, dass man dann im allgemeinen

$$(r_{(1)}, du) = dp, \quad (r_{(2)}, du) = \cos(p - p_0)dt, \quad (r_{(3)}, du) = -\sin(p - p_0)dt$$

setzen kann, wobei p_0 nur von t abhängt. Ist $z = \text{const.}$ wieder das allgemeine Integral von $r_{(3)} = 0$, $-\sqrt{\sigma}$ der zugehörige Multiplikator, dann ist t eine Funktion von z allein, ebenso p_0 . Durch diese beiden ist p gegeben; es wird

$$(51) \quad \sin(p - p_0) \frac{dt}{dz} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}},$$

also

$$(51') \quad p = p_0 + \arcsin \frac{1}{\tau \sqrt{\sigma}},$$

wenn $\frac{dt}{dz} = \tau$ gesetzt wird.

Es bleibt also zu entscheiden, ob zwei Funktionen p_0 und τ von z so bestimmt werden können, dass die Gleichung

$$(a_{(1)}, r_{(2)}) = (a_{(2)}, r_{(1)})$$

identisch erfüllt ist. Dieselbe wird unter Beachtung der Relationen

$$(r_{(1)}, du) = dp, \quad r_{(2)} = -\cot g(p - p_0)r_{(3)}, \quad (r_{(3)}, a_{(1)}) = Ia_{(2)}$$

zu

$$(52) \quad \cot g(p - p_0) Ia_{(2)} = \left(a_{(2)}, \frac{\partial p}{\partial u} \right),$$

und, wenn man \mathcal{A} als reduzierte Form annimmt, $u_1 = z$, $u_2 = \sigma$ setzt und p nach (51, 51') ausdrückt, zu

$$(P) \quad (\tau^2 \sigma - 1) \left(\frac{\partial b}{\partial \sigma} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) + \frac{b}{2\sigma} - \beta \frac{\tau'}{\tau} + \beta p'_0 \sqrt{\sigma^2 - 1} = 0.$$

XX. Dann und nur dann, wenn zwei Funktionen τ und p'_0 von z allein der Gleichung (P) genügen, liefert die Differentialgleichung (W) nicht sämtliche Lösungen des Deformationsproblems.

Die Entscheidung, ob solche Funktionen existieren, wie auch die Bestimmung von p'_0 und τ erfordert in jedem einzelnen Fall eine endliche Anzahl von Operationen und ist jederzeit ausführbar. Hat man p'_0 und τ , so sind die $r_{(i)}$ bekannt, und die Bestimmung des orthogonalen Systems führt auf die Integration der Riccatischen Gleichung in Kap. VII. Dieselbe wird, wenn man

$$x = e^{(\eta + p)i}$$

setzt, zu

$$\frac{d\eta}{dt} = -i \sin(\eta + p_0),$$

d. h. die Bestimmung derjenigen Lösungen, welche bei der Integration der Gleichung (W) verloren gehen, erfordert die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung.

Nach Kap. VI kann auch

$$r_{(1)} = dp, \quad r_{(2)} = e^{ip} dt, \quad r_{(3)} = ie^{ip} dt$$

gesetzt werden.

Dann wird:

$$ie^{it} = -\frac{1}{\tau \sqrt{\sigma}},$$

und für (49') kommt:

$$Ia_{(2)} + e^{ib} \left(a_{(2)}, \frac{\partial p}{\partial u} \right) = 0$$

oder nach (24):

$$(P'') \quad I\left(\frac{a_{(2)}}{\tau\sqrt{\sigma}}\right) = 0,$$

d. h. es muss $\frac{a_{(2)}}{\sqrt{\sigma}}$ einen Multiplikator besitzen, der nur von z abhängig ist. Die zugehörige Riccatische Differentialgleichung wird zu $\frac{d\eta}{dt} = e^{-i\tau}$ für $x = e^{(\eta + \tau)i}$ und gestattet die Bestimmung der (offenbar imaginären) Flächen ohne weiteres.

Es sei noch bemerkt, dass man durch Quadraturen beliebig viele Beispiele solcher singulären Differentialgleichungen (W) herstellen kann. Wählt man nämlich β , τ und p_0 beliebig, so ergibt sich b aus (P) durch eine Quadratur. Denn man kann (52) auch so schreiben:

$$I(\cos(w - w_0) a_{(2)}) = \left(a_{(2)} \frac{\partial p_0}{\partial u}\right) \sin(w - w_0),$$

und da $\frac{\partial p_0}{\partial \sigma} = 0$, ergibt sich daraus:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}(b \cos(p - p_0)) = \frac{\partial}{\partial z}(\beta \cos(p - p_0)) - \beta \sin(p - p_0) \frac{\partial p_0}{\partial z}.$$

Aus b und β findet man nach (50) α und durch eine zweite Quadratur a .

XII.

§ 36. Zur Erläuterung des Vorstehenden mögen kurz einige bekannte Sätze über Rotationsflächen abgeleitet werden. Sei

$$du^2 + P^2 dv^2$$

das Quadrat des Linienelementes einer Rotationsfläche, also P eine Funktion von u allein. Wählt man

$$a_{(1)} = P dv, \quad a_{(2)} = du,$$

so wird

$$r_{(1)} = -\frac{dP}{du} dr;$$

also kann $z = v$, $\sigma = \left(\frac{du}{dP}\right)^2$ gesetzt werden, und man erhält:

$$A = Pdz^2 + \sigma dP^2 = Pdz^2 + \sigma P'^2 d\sigma^2,$$

wo P jetzt als Funktion von σ aufzufassen und $P' = \frac{dP}{d\sigma}$ ist. Dadurch wird

$$(53) \quad a_{(1)} = Pdz, \quad a_{(2)} = \sqrt{\sigma} P' d\sigma$$

$$\text{d. h. } a = P, \quad \alpha = 0, \quad b = 0, \quad \beta = \sqrt{\sigma} P',$$

und für (W) kommt:

$$(R) \quad \Delta_2 z = \varphi(\sigma) = \varphi(\Delta_1 z),$$

wobei

$$\varphi(\sigma) = \frac{P}{2P'}, \quad \text{also} \quad P = c e^{\frac{1}{2} \int \frac{d\sigma}{\varphi(\sigma)}} \text{ ist.}$$

φ ist mithin nicht identisch null, sonst aber ganz beliebig.

Zunächst überzeugt man sich leicht, dass die Differentialgleichung (R) Integrale besitzen kann, die mit dem Deformationsproblem nichts zu thun haben. Denn wenn $\varphi(\sigma)$ für $\sigma = \sigma_0$ verschwindet, so genügt jedes Integral von

$$\Delta_1 z = \sigma_0$$

auch (R), während doch $\Delta_1 z$ keine von z unabhängige Funktion, vielmehr eine Constante σ_0 ist.

Zweitens gehen bei der Integration der Differentialgleichung Flächen verloren. (P) wird nämlich zu

$$\tau' = \tau p'_0 \sqrt{\tau^2 \sigma - 1},$$

was für $\tau' = 0$, $p'_0 = 0$ möglich ist. p_0 kann unbeschadet der Allgemeinheit gleich null angenommen werden, dagegen ist τ von null verschieden. Die Integration der zu den Formen

$$r_{(1)} = dp, \quad r_{(2)} = \cos p dt, \quad r_{(3)} = -\sin p dt$$

gehörigen Riccatischen Differentialgleichung kann man vermeiden. Es wird

$$G_3 = dp^2 + \cos^2 p dt^2,$$

so dass

$$(54) \quad X_3^{(1)} = \cos p \cos t, \quad X_3^{(2)} = \cos p \sin t, \quad X_3^{(3)} = \sin p$$

gesetzt werden kann. Für die andern findet man aus $dX_3^{(2)} = X_1^{(2)}r_{(2)} - X_2^{(2)}r_{(1)}$:

$$\begin{aligned} X_1^{(1)} &= -\sin t, & X_2^{(1)} &= \sin p \cos t, \\ X_1^{(2)} &= \cos t, & X_2^{(2)} &= \sin p \sin t, \\ X_1^{(3)} &= 0, & X_2^{(3)} &= -\cos p. \end{aligned}$$

Beachtet man noch, dass $\sin p = 1 : \tau \sqrt{\sigma}$, $\tau = \text{const.}$, so erhält man für die z_k :

$$z_1 = \frac{P}{\tau} \cos t, \quad z_2 = \frac{P}{\tau} \sin t, \quad z_3 = f\left(\frac{P}{\tau}\right) = \int \sqrt{\tau^2 \sigma - 1} \frac{P'}{\tau} d\sigma,$$

also werden die zu $du^2 + P^2 dv^2$ gehörigen Rotationsflächen durch (R) nicht gefunden.

§ 37. Stellt man die $X_1^{(2)}$ durch die Formeln (54) dar, schreibt aber x und y für p und t , so wird

$$G_1 = dx^2 + \cos^2 x dy^2.$$

Für diese Wahl von G_1 besitzt (R), wie leicht nachzuweisen, das particuläre Integral von der Form $\varphi(x) + \psi(y)$:

$$z = cy + \int \sqrt{\sigma - \frac{c^2}{\cos^2 x}} dx,$$

wobei σ durch die Gleichung

$$P(\sigma) = e^{\frac{1}{2} \int \frac{d\sigma}{\varphi(\sigma)}} = \frac{m}{\sin x}, \quad m = \text{const.}$$

als Funktion von x allein gegeben ist.

Man erhält aus diesem Integral die Schraubenflächen mit der z_3 Achse als Drehungsachse:

$$z_1 = r \cos \varphi, \quad z_2 = r \sin \varphi, \quad z_3 = f(r) + g\varphi,$$

wo

$$r = \sqrt{P^2 c^2 - m^2 c^2}; \quad \varphi = y - \frac{\pi}{2}; \quad g = mc;$$

$$f(r) = \int \sqrt{r^2 \frac{\sigma}{c^2} - g^2 - r^2} \frac{dr}{r}.$$

§ 38. Wählt man als Gleichung der Rotationsfläche

$$z_3 = ic \log \sqrt{z_1^2 + z_2^2},$$

so wird (R) zu:

$$\Delta_2 z = 1 - \Delta_1 z.$$

Dies ist die Gleichung (R) des VIII^{ten} Kapitels für $K=1$. Daraus folgt der aus der Theorie der Weingartenschen Flächen bekannte Satz:

Kennt man alle Biegungen der Rotationsfläche der logarithmischen Linie, so findet man durch Quadraturen alle Flächen constanter Krümmung, und umgekehrt.

§ 39. In seinen Untersuchungen über die Flächen, zwischen deren Hauptkrümmungen eine Gleichung besteht, hat Hr. WEINGARTEN gezeigt, dass das Deformationsproblem der Rotationsflächen äquivalent ist mit der Aufgabe, alle Formen der Krümmung 1 von der Gestalt:

$$p dz^2 + \varphi(p) dq^2 = (G_1, dx dx)$$

zu finden. Setzt man nämlich statt (53):

$$a_{(2)} = P dz, \quad a_{(1)} = -\sqrt{\sigma} P' d\sigma,$$

so wird (W) zu

$$P' \Delta_1 z \Delta(z, \Delta_1 z) + P \Delta_{12} z = 0,$$

und wenn man Δ_{12} nach (32) ausdrückt, zu:

$$\Delta_2 z = \left(\frac{P'}{P} - \frac{1}{2\sigma} \right) \Delta(z, \Delta_1 z) = 0.$$

Für $dz = (r, dx)$ ist nach der Formel für $\Delta_2 z$ in § 18 $\Delta_2 z = I(r)$, mithin:

$$\frac{P}{\sqrt{\sigma}} \cdot I(r) + \left(r, \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{P}{\sqrt{\sigma}} \right) = 0.$$

Nach (24) ist also $\frac{P}{\sqrt{\sigma}}$ ein Multiplikator von ${}^r r$, d. h. es ist

$$({}^r r, dx) = \frac{\sqrt{\sigma} dq}{P}$$

und

$$(G_1, dx dx) = \frac{(r, dx)^2}{(G, rr)} = \frac{dz^2}{\sigma} + \frac{dq^2}{P^2},$$

also von der verlangten Gestalt.

ÜBER DIE IRREGULÄREN INTEGRALE
DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG
MIT RATIONALEN COEFFICIENTEN

VON

J. HORN

in CHARLOTTENBURG.

Im 8. Band der *Acta mathematica* hat sich Herr POINCARÉ mit der asymptotischen Darstellung der irregulären Integrale der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten durch die im allgemeinen divergenten Normalreihen beschäftigt. In der Differentialgleichung

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0$$

seien die Coefficienten ganze rationale Functionen von x und zwar P_0 vom Grad m , P_λ ($\lambda = 1, \dots, n$) höchstens von Grad $m + k$; dann ist $x = \infty$ eine singuläre Stelle der Unbestimmtheit¹ für die Integrale, und die Differentialgleichung hat an dieser Stelle den Rang $p = k + 1$.² Für eine Differentialgleichung vom Rang 1, in welcher der Grad der Coefficienten P_λ ($\lambda = 1, \dots, n$) denjenigen von P_0 nicht übersteigt, untersucht Herr POINCARÉ³ das Verhalten der Integrale bei der Annäherung der Veränderlichen x an die Stelle $x = \infty$ vermittels der Laplace'schen

¹ Bezeichnung von Herrn FUCHS (Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1886). Vgl. SCHLESINGER, *Handbuch der linearen Differentialgleichungen*.

² POINCARÉ, a. a. O.

³ *American Journal*, Bd. 7; *Acta math.* Bd. 8.

Acta mathematica. 23. Imprimé le 4 septembre 1899.

Transformation.¹ Die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung vom Rang p ($p > 1$) wird auf eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung vom Rang 1 zurückgeführt; aus den Ausdrücken der Integrale y der ursprünglichen Gleichung durch geeignete Integrale der neuen Gleichung vom Rang 1 schliesst Herr POINCARÉ, dass, wenn die Veränderliche x mit einem bestimmten Argument ins Unendliche geht, das allgemeine Integral y durch eine der n Normalreihen asymptotisch dargestellt wird. Aber gerade die Differentialgleichungen *höheren Ranges* bedürfen noch einer eingehenderen Untersuchung, welche ich in dem vorliegenden Aufsatz zunächst für lineare Differentialgleichungen *zweiter Ordnung* in Anknüpfung an die citirten Arbeiten des Herrn POINCARÉ durchführe.² Abgesehen davon, dass bei Herrn POINCARÉ die auf Differentialgleichungen höheren Ranges bezüglichen Untersuchungen weniger vollständig geführt sind als diejenigen für den Rang 1, beschränke ich mich nicht auf Wege, welche mit einem bestimmten Argument nach der Stelle $x = \infty$ gehen, sondern ich suche das *Verhalten der Integrale in der ganzen Umgebung der singulären Stelle* so weit zu ergründen,³ dass es gelingt, Aufschluss über die *Lage der Nullstellen in der Umgebung der Unbestimmtheitsstelle* zu gewinnen und den *Begriff des Ranges als Verallgemeinerung des Begriffs des Geschlechts einer ganzen transcendenten Function* erscheinen zu lassen.

¹ Im 50. Bd. der Math. Annalen führe ich die auf Differentialgleichungen vom Rang 1 bezüglichen Untersuchungen in einer Richtung weiter, welche ich im 49. Bd. bereits für den einfachsten Fall, die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten, eingeschlagen habe.

² Im 118. Bd. von Crelles Journal habe ich die Differentialgleichung zweiter Ordnung vom Rang $k + 1$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + x^k \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots \right) \frac{dy}{dx} + x^{2k} \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \dots \right) y = 0$$

ohne Benutzung der Laplace'schen Transformirten nach einer Methode untersucht, welche sich, wie ich im 119. Bd. zeige, auf nicht lineare Differentialgleichungen übertragen lässt. Die in der vorliegenden Arbeit behandelte Differentialgleichung ist insofern specieller, als ihre Coefficienten rational sind; ich kann jedoch unter dieser Beschränkung mit Benutzung bestimmter Integrale das Verhalten der Integrale der Differentialgleichung weiter verfolgen, als es in meiner früheren Arbeit geschehen ist.

³ Man vergleiche die Untersuchung der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten im 49. Bd. der Math. Ann.

Die hier geführten Untersuchungen, die sich für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung besonders übersichtlich gestalten, gedenke ich in einer späteren Arbeit auf die allgemeinste lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten auszudehnen.

§ 1.

Die Differentialgleichung

$$(A) \quad P_0 \frac{d^2 y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_2 y = 0$$

habe als Coefficienten ganze rationale Function von den Graden m , $m + p - 1$, $m + 2p - 2$

$$P_0 = x^m + \dots,$$

$$P_1 = a_1 x^{m+p-1} + \dots,$$

$$P_2 = a_2 x^{m+2p-2} + \dots,$$

so dass sie an der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ den Rang p besitzt.¹ Die charakteristische Gleichung

$$\alpha^2 + a_1 \alpha + a_2 = 0$$

habe (in den drei ersten Paragraphen) zwei *verschiedene* Wurzeln α_1 , α_2 , so dass die Differentialgleichung (A) durch zwei Normalreihen

$$S_i = e^{\frac{\alpha_i x^p}{p} + \frac{a_{11} x^{p-1}}{p-1} + \dots + a_{1,p-1} x} x^{\alpha_i} \left(C_i + \frac{C_{i1}}{x} + \frac{C_{i2}}{x^2} + \dots \right) \quad (i=1, 2)$$

formell befriedigt wird. Wir setzen α_1 und α_2 als reell und $\alpha_1 > \alpha_2$ voraus, was durch eine Substitution von der Form

$$y = v' v'', \quad x' = v' v''$$

erreicht werden kann.

¹ Der erste Coefficient von P_1 und die beiden ersten Coefficienten von P_2 sollen nicht gleichzeitig verschwinden.

Ist $y = f(x)$ ein Integral von (A) und ε eine primitive p^{te} Einheitswurzel, so genügt

$$y_\lambda = f(\varepsilon^\lambda x) \quad (\lambda = 1, \dots, p-1)$$

einer Differentialgleichung

$$(A_i) \quad P_0 \frac{d^2 y}{dx^2} + P_{\lambda 1} \frac{dy}{dx} + P_{\lambda 2} y = 0,$$

welche durch die Normalreihen

$$S_1(\varepsilon^\lambda x), S_2(\varepsilon^\lambda x)$$

formell befriedigt wird.. Das Product

$$u = y y_1 \dots y_{p-1}$$

genügt einer linearen Differentialgleichung $2^{p^{\text{ter}}}$ Ordnung, welche, wenn

$$x^p = t$$

gesetzt wird, die Form

$$(B) \quad Q_0 \frac{d^{2p} u}{dt^{2p}} + Q_1 \frac{d^{2p-1} u}{dt^{2p-1}} + \dots + Q_{2p} u = 0$$

annimmt und worin Q_0 im allgemeinen¹ nicht identisch verschwindet; Q_0, Q_1, \dots sind ganze rationale Functionen von t

$$Q_\mu = b_\mu t^q + \dots, \quad (\mu = 0, 1, \dots, 2p)$$

wo b_0 von Null verschieden angenommen werden kann, da die Differentialgleichung (B) vom Rang 1 ist.² Die Gleichung (B) wird durch die 2^p Reihen

$$S_{\lambda_0} \left(t^{\frac{1}{p}} \right) S_{\lambda_1} \left(\varepsilon t^{\frac{1}{p}} \right) \dots S_{\lambda_{p-1}} \left(\varepsilon^{p-1} t^{\frac{1}{p}} \right),$$

wo jeder der Indices $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ den Werth 0 oder 1 haben kann, formell befriedigt, worunter sich die beiden Normalreihen von Rang 1

$$T_i = S_i \left(t^{\frac{1}{p}} \right) S_i \left(\varepsilon t^{\frac{1}{p}} \right) \dots S_i \left(\varepsilon^{p-1} t^{\frac{1}{p}} \right) = e^{\alpha_i t} t^{\rho_i} \left(D_i + \frac{D_{i1}}{t} + \frac{D_{i2}}{t^2} + \dots \right) \quad (i=1, 2)$$

¹ Der hier ausgeschlossene Ausnahmefall $Q_0 = 0$ wird in § 2 behandelt.

² POINCARÉ, a. a. O., § 5. — SCHLESINGER, Handbuch Bd. I, S. 355.

befinden. Diejenigen Reihen, in welchen k der Zahlen $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ gleich 1, die übrigen $p - k$ gleich 0 sind, enthalten einen Exponentialfactor von der Form

$$e^{\frac{\lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_p z_p}{p} t}, \dots$$

Die charakteristische Gleichung

$$b_0 \beta^{2p} + b_1 \beta^{2p-1} + \dots + b_{2p} = 0$$

von (B) besitzt demnach die Wurzeln

$$\alpha_1, \frac{(p-1)\alpha_1 + \alpha_2}{p}, \frac{(p-2)\alpha_1 + 2\alpha_2}{p}, \dots, \alpha_2$$

und zwar α_1 und α_2 einfach, die übrigen mehrfach. Die Laplace'sche Transformirte von (B)

$$(C) \quad R_0 \frac{d^q v}{dz^q} + R_1 \frac{d^{q-1} v}{dz^{q-1}} + \dots + R_q v = 0$$

hat als Coefficienten ganze Functionen 2^{ten} Grades von z und zwar ist

$$R_0 = b_0 z^{2p} + b_1 z^{2p-1} + \dots = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots$$

Sind 0, 1, ..., $q - 2$ und λ_i ($i = 1, 2$) die Wurzeln der zu $z = \alpha_i$ gehörigen determinirenden Gleichung, so hat (C) ein Integral von der Form

$$v_i = (z - \alpha_i)^{\lambda_i} \mathfrak{P}_i(z - \alpha_i), \quad (i=1, 2)$$

wo $\mathfrak{P}_i(z - \alpha_i)$ eine in der Umgebung von $z = \alpha_i$ convergente Potenzreihe ist.¹ Dann ist durch die Gleichung

$$u_i = \int_{l_i} v_i e^{tz} dz \quad (i=1, 2)$$

für ein gewisses Gebiet der Veränderlichen t ein Integral von (B) dargestellt, wenn der Integrationsweg l_i aus einer mit $\arg(z - \alpha_i) = \omega$ aus dem Unendlichen kommenden, vor α_i endigenden Geraden, einem kleinen

¹ Im Text ist angenommen, dass λ_i keine ganze Zahl sei; andernfalls treten die Acta math. Bd. 8, S. 308—314, angegebenen Modificationen ein, ohne dass die Resultate sich ändern.

den Punkt $z = \alpha_i$ einschliessenden Kreis und der rückwärts durchlaufenen Geraden besteht. Nehmen wir etwa $\omega = \pi$ an,¹ so gelten, wenn t als reelle positive Grösse ins Unendliche geht, die asymptotischen Gleichungen

$$u_1 \sim T_1, \quad u_2 \sim T_2,$$

und es ist für $\lim t = +\infty$

$$\lim \frac{d \log u_1}{dt} = \alpha_1, \quad \lim \frac{d \log u_2}{dt} = \alpha_2.$$

Der Grenzwert der logarithmischen Ableitung eines Integrals u von (B) kann nur einen der Werthe

$$\alpha_1, \frac{(p-1)\alpha_1 + \alpha_2}{p}, \dots, \alpha_2$$

haben,² welche der oben gemachten Voraussetzung gemäss reell und absteigend geordnet sind. Dann ist, wenn Integrale, welche sich bloss um einen constanten Factor unterscheiden, nicht als verschieden betrachtet werden, u_2 das *einzige Integral* von (B), dessen logarithmische Ableitung für $\lim t = +\infty$ den Grenzwert α_2 besitzt.

Um dies zu beweisen, setzen wir

$$u = u_2 \int w dt,$$

wodurch die Differentialgleichung (B), wenn vorübergehend $z^p = r$ gesetzt wird, in

$$L_0 \frac{d^{r-1}w}{dt^{r-1}} + L_1 \frac{d^{r-2}w}{dt^{r-2}} + \dots + L_{r-1}w = 0$$

übergeht; dabei ist

$$L_0 = Q_0,$$

$$L_\lambda = (r)_\lambda Q_0 \frac{u_2^{(\lambda)}}{u_2} + (r-1)_{\lambda-1} Q_1 \frac{u_2^{(\lambda-1)}}{u_2} + \dots + Q_{\lambda-1} \frac{u_2'}{u_2} + Q_\lambda. \quad (\lambda=1, \dots, r-1)$$

Aus

$$\lim \frac{u_2'}{u_2} = \alpha_2$$

¹ Der Integrationsweg l_1 muss dabei dem Punkt α_2 ausweichen.

POINCARÉ, Am. Journ., Bd. 7.

folgt

$$\lim \frac{u_2^{(\lambda)}}{u_2} = \alpha_2^\lambda,$$

also

$$l_\lambda = \lim L_\lambda = (r)_\lambda b_0 \alpha_2^\lambda + (r-1)_{\lambda-1} b_1 \alpha_2^{\lambda-1} + \dots$$

Die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung für w

$$l_0 r^{r-1} + l_1 r^{r-2} + \dots = 0$$

oder

$$b_0 (r + \alpha_2)^{r-1} + b_1 (r + \alpha_2)^{r-2} + \dots = 0$$

hat als Wurzeln die um α_2 verminderten Wurzeln

$$\alpha_1, \frac{(p-1)\alpha_1 + \alpha_2}{p}, \dots, \frac{\alpha_1 + (p-1)\alpha_2}{p}$$

der charakteristischen Gleichung von (B) im ursprünglichen Vielfachheitsgrad, also lauter reelle positive Wurzeln. Es ist also

$$\lim \frac{d \log w}{dt}$$

für jedes Integral w reell und positiv. Wäre ein von u_2 verschiedenes Integral \bar{u}_2 von (B) mit

$$\lim \frac{d \log \bar{u}_2}{dt} = \alpha_2$$

vorhanden, so wäre

$$\lim \frac{d \log \frac{\bar{u}_2}{u_2}}{dt} = 0.$$

Wenn man

$$\frac{d \log \frac{\bar{u}_2}{u_2}}{dt} = \zeta(t)$$

setzt, so lässt sich nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Grösse

ε eine positive Zahl t_0 so angeben, dass für $t \geq t_0$ $|\varphi(t)| < \varepsilon$ ist. Es ist also

$$\frac{d \bar{u}_2}{dt} = C \varphi(t) e^{t_0} \int_{\varphi(t) dt}^t,$$

wo C eine Constante ist. Zu $u = \bar{u}_2$ gehört $w = \bar{w}$

$$\bar{w} = \frac{d \bar{u}_2}{dt},$$

und da

$$\lim \frac{d \log \bar{w}}{dt}$$

reell und positiv ist, so ist ein positive Grösse h so vorhanden, dass für $t \geq t_0$

$$|\bar{w}| > e^{ht}$$

ist. Es ist also für $t \geq t_0$

$$e^{ht} < \left| C \varphi(t) e^{t_0} \int_{\varphi(t) dt}^t \right| < |C| \varepsilon e^{h(t-t_0)},$$

was nicht möglich ist.

Wie ich im 118. Bd. von Crelles Journal gezeigt habe, besitzt die Differentialgleichung (A) ein einziges Integral η ,¹ für welches für $\lim x = +\infty$

$$\lim x^{-(p-1)} \frac{d \log \eta}{dx} = \alpha_2$$

ist; ebenso ist für ein einziges Integral η_λ von (A₁)

$$\lim x^{-(p-1)} \frac{d \log \eta_\lambda}{dx} = \alpha_2.$$

Wegen $x^p = t$ ist also für $\lim t = +\infty$

$$\lim \frac{d \log (\eta \eta_1 \dots \eta_{p-1})}{dt} = \alpha_2.$$

¹ Immer von einem constanten Factor abgesehen.

Da $\eta\eta_1 \dots \eta_{p-1}$ ein Integral von (B) ist, so muss sein:

$$u_2 = \eta\eta_1 \dots \eta_{p-1}.$$

Durch wiederholte Differentiation dieser Gleichung und Berücksichtigung von (A) und (A_λ) erhält man Gleichungen von der Form ¹

$$\frac{d^\lambda u_2}{dx^\lambda} - A_{\lambda 0} u_2 = A_{\lambda 1} \frac{d\eta}{dx} \eta_1 \dots \eta_{p-1} + \dots + A_{\lambda, 2^p-1} \frac{d\eta}{dx} \frac{d\eta_1}{dx} \dots \frac{d\eta_{p-1}}{dx},$$

$$(\lambda = 1, \dots, 2^p)$$

wo $A_{\lambda 0}, A_{\lambda 1}, \dots, A_{\lambda, 2^p-1}$ rationale Functionen von x sind. Da die Differentialgleichung (B) durch Elimination der $2^p - 1$ Producte $\frac{d\eta}{dx} \eta_1 \dots \eta_{p-1}, \dots$ aus diesen 2^p Gleichungen entsteht, so ist

$$Q_0 = \{A_{\lambda \mu}\}. \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, 2^p - 1)$$

Wenn der bisherigen Annahme gemäss Q_0 nicht identisch verschwindet, so lässt sich aus den $2^p - 1$ ersten Gleichungen $\frac{d\eta}{dx} \eta_1 \dots \eta_{p-1}$ in der Form berechnen:

$$\frac{d\eta}{dx} \eta_1 \dots \eta_{p-1} = \sum_{\lambda=0}^{2^p-1} F_\lambda \frac{d^\lambda u_2}{dx^\lambda},$$

wo F_λ eine rationale Function von x ist. In Verbindung mit

$$u_2 = \eta\eta_1 \dots \eta_{p-1}$$

ergibt sich

$$\frac{d \log \eta}{dx} = \sum_{\lambda=0}^{2^p-1} F_\lambda \frac{1}{u_2} \frac{d^\lambda u_2}{dx^\lambda}.$$

Setzt man hierin für u_2 die asymptotische Reihe T_2 , so erhält man hieraus die asymptotische Gleichung ²

$$\eta \sim S_2$$

für den Fall, dass x als reelle positive Grösse ins Unendliche geht.

¹ POINCARÉ, Acta math., Bd. 8.

² Acta math. Bd. 8, S. 338–342.

Man kann aber, und das ist für die Erforschung des Verhaltens der Integrale von (A) wesentlich, ohne Mühe einen Schritt weiter gehen. Falls der geradlinige Theil des Integrationsweges l_2 von

$$u_2 = \int_{l_2} v_2 e^{iz} dz$$

in der negativen reellen Axe verläuft, definirt das Integral die Function u_2 in der Nähe von $t = \infty$ für

$$-\frac{\pi}{2} < \arg t < \frac{\pi}{2}.$$

Man kann aber den geradlinigen Theil von l_2 um weniger als π in positivem und um weniger als π in negativem Sinn drehen, ohne dass derselbe einen der auf der reellen Axe gelegenen singulären Punkte

$$a_1, \frac{(p-1)a_1 + a_2}{p}, \dots, \frac{a_1 + (p-1)a_2}{p}$$

der Function v_2 überschreitet, so dass der Werth von $\arg z$ am Anfang von l_2 zwischen $-\pi$ und π variirt. Da das Integral einen Sinn behält, so lange $\arg t$ von $\pi - \arg z$ um weniger als $\frac{\pi}{2}$ nach der einen oder anderen Seite abweicht, so ist die Function u_2 in der Nähe von $t = \infty$ durch den Integraalausdruck für

$$-\frac{3\pi}{2} < \arg t < \frac{3\pi}{2}$$

definirt, ohne dass der geradlinige Theil des Integrationsweges abgesehen von der Drehung deformirt werden muss. In den Math. Ann.¹ habe

¹ Im 49. Bd. führe ich die Untersuchung für die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten und im 50. Bd. für eine beliebige lineare Differentialgleichung vom Rang 1 mit rationalen Coefficienten unter der Voraussetzung, dass die Wurzeln der charakteristischen Gleichung verschieden sind. Aber auch für die Differentialgleichung (B) bleibt die ganze Entwicklung bestehen, soweit es sich um die Integrale u_1 und u_2 handelt, deren Integrationswege l_1, l_2 die *einfachen* Wurzeln a_1 und a_2 der charakteristischen Gleichung umkreisen. A. a. O. habe ich allerdings ganzzahlige Werthe von λ_i nicht berücksichtigt; dass aber der ausgesprochene Satz allgemein gilt, ersieht man, wenn man die von Herrn POINCARÉ (Acta math. Bd. 8, S. 310—314) gemachten Bemerkungen mit der Entwicklung in den Math. Ann. verbindet.

ich gezeigt, dass, wenn δ eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet, die asymptotische Gleichung

$$u_2 \sim T_2$$

in der Nähe von $t = \infty$ gleichmässig für

$$-\frac{3\pi}{2} + \delta < \arg t < \frac{3\pi}{2} - \delta$$

besteht; d. h. wenn man, nachdem ein beliebiger Werth von n gewählt ist,

$$u_2 = e^{\sigma_2 t^{p_2}} \left(\sum_{\mu=0}^n \frac{D_{2\mu}}{t^\mu} + \frac{\partial_n}{t^n} \right)$$

setzt, so lässt sich nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε eine positive Grösse R so bestimmen, dass für

$$|t| > R, \quad -\frac{3\pi}{2} + \delta < \arg t < \frac{3\pi}{2} - \delta$$

$$|\partial_n| < \varepsilon$$

ist.¹ Wenn $x = t^p$ gesetzt und einem reellen positiven Werth von t der reelle positive Werth von x zugeordnet wird, so geht das Gebiet $-\frac{3\pi}{2} < \arg t < \frac{3\pi}{2}$ in $-\frac{3\pi}{2p} < \arg x < \frac{3\pi}{2p}$ über. Demnach besteht in der Nähe von $x = \infty$ die asymptotische Gleichung

$$\eta \sim S_2$$

gleichmässig für

$$-\frac{3\pi}{2p} + \delta < \arg x < \frac{3\pi}{2p} - \delta;$$

d. h. wenn man

$$\eta = e^{\frac{\sigma_2}{p} x^{p/p_2}} \left(\sum_{\mu=0}^n \frac{C_{2\mu}}{x^\mu} + \frac{\tilde{\partial}_n}{x^n} \right)$$

¹ In demselben Sinn bestehen die asymptotischen Gleichungen

$$\frac{du_2}{dt} \sim \frac{dT_2}{dt} \quad u = s, w,$$

setzt, so ist nach Angabe einer beliebigen positiven Grösse ε eine positive Grösse R so vorhanden, dass $|\gamma_n| < \varepsilon$ ist für

$$|x| > R, \quad -\frac{3\pi}{2p} + \delta < \arg x < \frac{3\pi}{2p} - \delta.$$

Wir zerlegen nun die Umgebung von $x = \infty$ in die $2p$ Gebiete $G^{(\rho)}$ ($\rho = 0, 1, \dots, 2p - 1$)

$$\frac{(2\rho - 1)\pi}{2p} < \arg x < \frac{(2\rho + 1)\pi}{2p},^1$$

Geht x mit einem dem Gebiet $G^{(2\nu)}$ ($\nu = 0, 1, \dots$) angehörenden Argument ins Unendliche,² so ist für ein einziges Integral $\eta^{(2\nu)}$ der Differentialgleichung (A)

$$\lim x^{-(p-1)} \frac{d \log \eta^{(2\nu)}}{dx} = \alpha_2^3$$

und es besteht wie oben die Beziehung

$$\frac{d \log \eta^{(2\nu)}}{dx} = \sum_{\lambda=0}^{2p-1} F_{\lambda} \frac{1}{u_2} \frac{d^{\lambda} u_2}{dx^{\lambda}},$$

woraus man schliesst, dass die asymptotische Gleichung $\eta^{(2\nu)} \sim S_2$ in der Nähe von $x = \infty$ gleichmässig für

$$\frac{(4\nu - 3)\pi}{2p} + \delta < \arg x < \frac{(4\nu + 3)\pi}{2p} - \delta$$

gilt. Dabei ist u_2 dieselbe Function von $t = x^p$ wie vorhin; es wird nur einem reellen positiven Werth von t der durch $\arg x = \frac{2\nu\pi}{p}$ bestimmte Werth von x zugeordnet.

¹ Das Gebiet

$$\frac{(2\rho - 1)\pi}{2p} + \delta < \arg x < \frac{(2\rho + 1)\pi}{2p} - \delta$$

werde mit $\overline{G}^{(\rho)}$ bezeichnet.

² Vgl. Crelles Journ. Bd. 118, S. 267.

³ Die bisher mit η bezeichnete Function heisst jetzt $\eta^{(0)}$.

Wenn x im Gebiet $G^{(2\nu+1)}$ ($\nu = 0, 1, \dots$) ins Unendliche geht, besitzt (A) ein einziges Integral $\eta^{(2\nu+1)}$, für welches

$$\lim x^{-(p-1)} \frac{d \log \eta^{(2\nu+1)}}{dx} = \alpha_1$$

ist. Nehmen wir etwa $\arg x = \frac{(2\nu+1)\pi}{p}$, so ist $\arg t = \pi$. Die Differentialgleichung (B) besitzt nur das eine Integral u_1 , für welches

$$\lim \frac{d \log u_1}{dt} = \alpha_1$$

ist, wenn t als negative reelle Grösse ins Unendliche geht. Dieselben Schlüsse wie oben führen auf die Gleichung

$$\frac{d \log \eta^{(2\nu+1)}}{dx} = \sum_{\lambda=0}^{2p-1} F_{\lambda} \frac{1}{u_1} \frac{d^{\lambda} u_1}{dx^{\lambda}},$$

woraus man schliesst, dass die asymptotische Gleichung

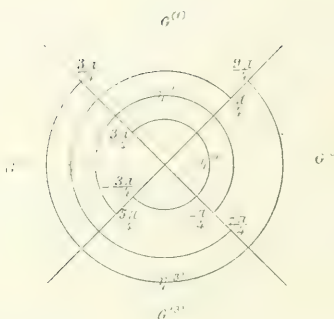
$$\eta^{(2\nu+1)} \sim S_1$$

in der Nähe von $x = \infty$ gleichmässig für

$$\frac{(2\nu-1)\pi}{2p} + \delta < \arg x < \frac{(2\nu+5)\pi}{2p} - \delta$$

besteht.

Wenn x in einem der $2p$ Gebiete $G^{(0)}, G^{(1)}, \dots, G^{(2p-1)}$ ins Unendliche geht, strebt die logarithmische Ableitung des allgemeinen Integrals von (A) bzw. dem Grenzwert $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_2$ zu; es entspricht aber jedem der $2p$ Gebiete ein bis auf einen constanten Factor vollständig bestimmtes particuläres Integral $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \dots, \eta^{(2p-1)}$, dessen logarithmische Ableitung den Grenzwert α_2 oder α_1 hat, je nachdem der Grenzwert der logarithmischen Ableitung des allgemeinen Integrals in dem betreffenden Gebiet α_1 oder α_2 ist. Das Integral $\eta^{(2\nu)}$ wird in dem aus $G^{(2\nu-1)}, G^{(2\nu)}, G^{(2\nu+1)}$ zusammengesetzten Gebiet durch die Reihe S_2 , das Integral $\eta^{(2\nu+1)}$ in dem aus $G^{(2\nu)}, G^{(2\nu+1)}, G^{(2\nu+2)}$ zusammengesetzten Gebiet durch die Reihe S_1 asymptotisch dargestellt.



In der beigegebenen Figur, welche dem Rang $p = 2$ entspricht, bezeichnen die Buchstaben $\eta^{(0)}$ und $\eta^{(2)}$ die Gültigkeitsgebiete der asymptotischen Gleichungen $\eta^{(0)} \sim S_2$ und $\eta^{(2)} \sim S_2$, die Buchstaben $\eta^{(1)}$ und $\eta^{(3)}$ die Gültigkeitsgebiete der asymptotischen Gleichungen $\eta^{(1)} \sim S_1$ und $\eta^{(3)} \sim S_1$. Wenn beide Grenzen eines Gebietes beliebig wenig verengert werden, gilt die betreffende asymptotische Gleichung gleichmässig. An die Endpunkte des Bogens $\eta^{(0)}$ sind die Argumente gesetzt, durch deren Angabe die in S_1 und S_2 enthaltenen Potenzen x^{p_1} bzw. x^{p_2} in jedem Fall fixiert sind.

Bei beliebigem Rang p bilden wir im Gebiet $G^{(p)}$ ein Fundamentalsystem von (A) aus dem Integral $\eta^{(p)}$ und dem aus $G^{(p+1)}$ über die Gerade $\arg x = \frac{(2p+1)\pi}{2p}$ nach $G^{(p)}$ fortgesetzten Integral $\eta^{(p+1)}$ (oder aus $\eta^{(p)}$ und dem aus $G^{(p-1)}$ über $\arg x = \frac{(2p-1)\pi}{2p}$ nach $G^{(p)}$ fortgesetzten Integral $\eta^{(p-1)}$). Dann ist in $G^{(2p)}$

$$\eta^{(2p)} \sim S_2, \quad \eta^{(2p+1)} \sim S_1$$

und, wenn b von Null verschieden ist,

$$y = a\eta^{(2p)} + b\eta^{(2p+1)} \sim bS_1;^1$$

¹ Es ist

$$y = b e^{\frac{a_1 x^1}{p} + \dots} x^{p_1} \left(C_1 + \frac{C_{11}}{x} + \dots + \frac{C_{1n}}{x^n} + \frac{\gamma_n}{x^n} \right) + a e^{\frac{a_2 x^2}{p} + \dots} x^{p_2} (C_2 + \bar{\gamma})$$

$$+ e^{\frac{a_3 x^3}{p} + \dots} \left(C_3 + \frac{C_{31}}{x} + \dots + \frac{C_{3n}}{x^n} + \frac{\delta_n}{x^n} \right).$$

im Gebiet $G^{(2\nu+1)}$ ist

$$\eta^{(2\nu+1)} \sim S_1, \quad \eta^{(2\nu+2)} \sim S_2$$

und

$$y = a\eta^{(2\nu+1)} + b\eta^{(2\nu+2)} \sim bS_2,$$

wenn b von Null verschieden ist. Bewegt man sich in dem aus $G^{(0)}$ und $G^{(1)}$ zusammengesetzten Gebiet, so ist die asymptotische Gleichung in der Form

$$y = a\eta^{(0)} + b\eta^{(1)} \sim aS_2 + bS_1$$

beizubehalten, ohne dass von den Reihen S_1, S_2 die eine gegen die andere vernachlässigt wird.

Wir fassen die Ergebnisse dieses Paragraphen, soweit sie über die in der Arbeit des Verfassers im 118. Band von Crelles Journ.¹ enthaltenen hinausgehen, in den folgenden Satz zusammen:

Die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung (A) mit rationalen Coefficienten und vom Rang p an der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ habe zwei verschiedene Wurzeln α_1, α_2 , (und zwar seien beide reell und $\alpha_1 > \alpha_2$, worin keine Beschränkung liegt), so dass (A) durch zwei Normalreihen

$$S_i = e^{\frac{a_i x^p}{p} + \frac{a_{i1} x^{p-1}}{p-1} + \dots} x^{\rho_i} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{C_{i\mu}}{x^{\mu}} \quad (i=1, 2)$$

formell befriedigt wird. Dann besitzt die Differentialgleichung $2p$ ausgezeichnete Integrale

$$\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \dots, \eta^{(2p-1)}$$

von der Art, dass $\eta^{(\rho)}$ in der Nähe von $x = \infty$ für

$$\frac{(2\rho-3)\pi}{2p} + \delta < \arg x < \frac{(2\rho+3)\pi}{2p} - \delta^2$$

wenn

$$\partial_n = \gamma_n + \frac{\alpha}{b} e^{\frac{(a_2 - a_1)x^p}{p} + \dots} x^{\rho_2 - \rho_1 + n} (C_3 + \bar{\gamma})$$

gesetzt wird; est ist $\lim \partial_n = 0$, wenn x im Gebiet $G^{(2\nu)}$ ins Unendliche geht.

¹ Vgl. den Satz auf S. 274.

² δ ist eine beliebig kleine positive Grösse.

bei ungeradem p durch die Reihe S_1 , bei geradem p durch die Reihe S_2 gleichmässig asymptotisch dargestellt wird.¹

Dass der Satz auch in denjenigen (darin nicht erwähnten) Ausnahmefällen gilt, welche in diesem Paragraphen ausgeschlossen worden sind, wird im nächsten Paragraphen gezeigt werden.

§ 2.

Die bisherige Annahme, dass die Determinante Q_0 , welche den ersten Coefficienten der Differentialgleichung (B) bildet, von Null verschieden sei, lassen wir jetzt fallen.

Da die 2^p Reihen

$$S_{\lambda_0} \left(\frac{1}{t^p} \right) S_{\lambda_1} \left(\varepsilon t^{\frac{1}{p}} \right) \dots S_{\lambda_{p-1}} \left(\varepsilon^{p-1} t^{\frac{1}{p}} \right)$$

mindestens $p + 1$ verschiedene Exponentialfactoren

$$e^{a_1 t}, e^{\frac{(p-1)a_1 + a_2}{p} t + \dots}, \dots, e^{a_{2^p} t}$$

enthalten, so ist die Anzahl der verschiedenen Reihen mindestens $p + 1$, und die Ordnung der Differentialgleichung, welcher u genügt, kann nicht geringer als $p + 1$ sein. Für

$$u = y_1 \dots y_{p-1}$$

ergeben sich wie in § 1 die Gleichungen

$$u^{(2)} - A_{\lambda_0} u = A_{\lambda_1} y' y_1 \dots y_{p-1} + \dots + A_{\lambda_{2^p-1}} y' y'_1 \dots y'_{p-1}$$

oder, wenn man durch u dividirt,

$$\frac{u^{(2)}}{u} - A_{\lambda_0} = A_{\lambda_1} \frac{y'}{y} + \dots + A_{\lambda_{2^p-1}} \frac{y'}{y} \frac{y'_1}{y_1} \dots \frac{y'_{p-1}}{y_{p-1}}. \quad (\lambda = 1, 2, 3, \dots)$$

Alle aus dem System

$$A_{\lambda_1}, \dots, A_{\lambda_{2^p-1}} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, 2^p - 1)$$

gebildeten Determinanten 2^{ten} Grades seien gleich Null, während eine De-

¹ Vgl. Fig. S. 184 für $p = 2$.

terminante $(r-1)^{\text{ten}}$ Grades von Null verschieden sei. Dann erhält man durch Elimination von $\frac{y'}{y}, \dots$ aus r der angeschriebenen Gleichungen¹ für u eine lineare Differentialgleichung (B) mit rationalen Coefficienten deren Ordnung geringer als 2^p ist, und zwar ist diese Gleichung, wenn $t = x^p$ als unabhängige Veränderliche eingeführt wird, wie früher vom Rang 1, und ihre charakteristische Gleichung hat die Wurzeln α_1 und α_2 einfach, die Wurzeln $\frac{(p-1)\alpha_1 + \alpha_2}{p}$ u. s. w. einfach oder mehrfach.

Im Falle $p = 2$ folgen aus

$$u = yy_1$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned} u' &= y'y_1 + yy'_1, \\ u'' - A_0 u &= A_1 y'y_1 + A_2 yy'_1 + 2y'y'_1, \\ u''' - B_0 u &= B_1 y'y_1 + B_2 yy'_1 + B_3 y'y'_1, \end{aligned}$$

wo die A und B rationale Functionen von x sind. Wenn

$$Q_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ A_1 & A_2 & 2 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = 0$$

ist, genügt u der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(B) \quad \begin{vmatrix} u' & , & 1 & , & 0 \\ u'' - A_0 u & , & A_2 & , & 2 \\ u''' - B_0 u & , & B_2 & , & B_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn man aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{u'}{u} &= \frac{y'}{y} + \frac{y'_1}{y_1}, \\ \frac{u''}{u} - A_0 &= A_1 \frac{y'}{y} + A_2 \frac{y'_1}{y_1} + 2 \frac{y'}{y} \frac{y'_1}{y_1} \end{aligned}$$

¹ Vgl. die folgenden Beispiele.

$\frac{y_1'}{y_1}$ eliminiert, erhält man für $\frac{y'}{y}$ die quadratische Gleichung

$$2\left(\frac{y'}{y}\right)^2 - \left(2\frac{u'}{u} + A_1 - A_2\right)\frac{y'}{y} + \left(\frac{u''}{u} - A_2\frac{u'}{u} - A_0\right) = 0,$$

welche unabhängig vom Verschwinden der Determinante Q_0 besteht. Wenn $Q_0 = 0$ ist, entsprechen einem beliebigen Integral u von (B) zwei Integrale y von (A), deren logarithmische Ableitungen der quadratischen Gleichung genügen.¹ Im Falle $Q_0 \neq 0$ gehört nur zu gewissen Integralen u von (B) ein Integral y von (A) und zwar ein einziges, dessen logarithmische Ableitung der quadratischen Gleichung genügt, aber auch wie früher rational durch $\frac{u'}{u}$, $\frac{u''}{u}$, $\frac{u'''}{u}$ ausgedrückt werden kann.

Im Falle $p = 3$ folgen aus

$$u = y y_1 y_2$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{u'}{u} &= \frac{y'}{y} + \frac{y_1'}{y_1} + \frac{y_2'}{y_2}, \\ \frac{u''}{u} - A_0 u &= A_1 \frac{y'}{y} + A_2 \frac{y_1'}{y_1} + A_2 \frac{y_2'}{y_2} + 2\left(\frac{y'}{y} \frac{y_1'}{y_1} + \frac{y'}{y} \frac{y_2'}{y_2} + \frac{y_1'}{y_1} \frac{y_2'}{y_2}\right), \\ \frac{u'''}{u} - B_0 u &= B_1 \frac{y'}{y} + \dots + B_4 \frac{y'}{y} \frac{y_1'}{y_1} + \dots + 6 \frac{y'}{y} \frac{y_1'}{y_1} \frac{y_2'}{y_2}, \\ \frac{u^{(4)}}{u} - C_0 u &= C_1 \frac{y'}{y} + \dots + C_4 \frac{y'}{y} \frac{y_1'}{y_1} + \dots + C_7 \frac{y'}{y} \frac{y_1'}{y_1} \frac{y_2'}{y_2}.\end{aligned}$$

Wenn z. B. alle Determinanten vierten Grades aus den Coefficienten auf der rechten Seite verschwinden, genügt u der linearen Differentialgleichung vierter Ordnung

$$(B) \quad \begin{vmatrix} \frac{u'}{u} & , & 1 & , & 0 & , & 0 \\ \frac{u''}{u} - A_0 & , & A_1 & , & 2 & , & 0 \\ \frac{u'''}{u} - B_0 & , & B_1 & , & B_4 & , & 6 \\ \frac{u^{(4)}}{u} - C_0 & , & C_1 & , & C_4 & , & C_7 \end{vmatrix} = 0.$$

¹ Dabei sind constante Factoren von y und u als unwesentlich angesehen.

Ist der Rang p beliebig, so bestehen, welches auch die Ordnung von (B) sein mag, Gleichungen von der Form

$$\frac{w^{(\lambda)}}{u} - A_{\lambda 0} = \dots + \lambda \sum \frac{y' y'_1 \dots y'_{\lambda-1}}{y y_1 \dots y_{\lambda-1}}, \quad (\lambda=1, \dots, p)$$

wo

$$\sum \frac{y' y'_1 \dots y'_{\lambda-1}}{y y_1 \dots y_{\lambda-1}}$$

die Summe von je λ Producten der p Grössen

$$\frac{y'}{y}, \frac{y'_1}{y_1}, \dots, \frac{y'_{p-1}}{y_{p-1}}$$

bedeutet, während an Stelle der Punkte Ausdrücke stehen, deren Dimension in diesen Grössen geringer als λ ist. Durch Elimination von

$$\frac{y'_1}{y_1}, \dots, \frac{y'_{p-1}}{y_{p-1}}$$

aus diesen p Gleichungen erhält man in allen Fällen eine Gleichung von der Form

$$\sum_{\nu} L_{\nu}(u) \left(\frac{y'}{y} \right)^{\nu} = 0,$$

deren Coefficienten L_{ν} von $\frac{w'}{u}$, $\frac{w''}{u}$, ... und von x rational abhängen und nicht sämmtlich identisch verschwinden. Setzt man hierin für u ein Integral von (B), welches die Form $yy_1 \dots y_{p-1}$ hat, so genügt jedes Integral y von (A), aus welchem die angenommene Function u durch Multiplication mit geeigneten Integralen y_1, \dots, y_{p-1} von $(A_1), \dots, (A_{p-1})$ hervorgeht, der angegebenen algebraischen Gleichung, wenn auch nicht umgekehrt jede Wurzel dieser Gleichung die logarithmische Ableitung eines Integrals y von (A) zu sein braucht.

Wir schalten den folgenden Hilfssatz ein:

Wenn die Coefficienten der algebraischen Gleichung

$$G(z) = \sum_{\lambda} A_{\lambda} z^{\lambda} = 0$$

Functionen von x sind, welche in der Nähe von $x = \infty$ für $\omega_1 < \arg x < \omega_2$

durch Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ gleichmässig asymptotisch dargestellt werden, so wird jede Wurzel z durch eine der die Gleichung formell befriedigenden Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ (oder von $\frac{1}{x^{\frac{1}{n}}}$) in dem bezeichneten Gebiet gleichmässig asymptotisch dargestellt.

Es sei

$$A_\lambda = A_{\lambda n} + \frac{a_{\lambda n}}{x^n} = a_{\lambda 0} + \frac{a_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{a_{\lambda n}}{x^n} + \frac{a_{\lambda n}}{x^n},$$

wo $\alpha_{\lambda n}$ für $\omega_1 < \arg x < \omega_2$ gleichmässig zur Grenze Null convergirt. Irgend eine Wurzel z erscheint als algebraische Function von $\frac{1}{x}$ und den $\alpha_{\lambda n}$, wenn die $\alpha_{\lambda n}$ vorübergehend neben $\frac{1}{x}$ als unabhängige Veränderliche aufgefasst werden. Durch Nullsetzen der $\alpha_{\lambda n}$ geht z in eine Wurzel z_n der Gleichung

$$\sum_\lambda A_{\lambda n} z_n^\lambda = 0$$

über, welche sich als Potenzreihe von $\frac{1}{x^{\frac{1}{n}}}$ darstellen lässt:

$$z_n = c_0 + \frac{c_1}{x} + \dots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{\gamma_{n+1}}{x^{n+1}} + \frac{\gamma_{n+2}}{x^{n+2}} + \dots$$

Wenn man

$$z = c_0 + \frac{c'_1}{x} + \dots + \frac{c'_n}{x^n} + \frac{\gamma'_n}{x^n}$$

setzt, ist ζ_n eine algebraische Function von $\frac{1}{x}$ und $\alpha_{\lambda n}$, welche für $\alpha_{\lambda n} = 0$ in

$$\frac{\gamma'_{n+1}}{x} + \frac{\gamma'_{n+2}}{x^2} + \dots$$

übergeht, also für $\frac{1}{x} = 0$, $\alpha_{\lambda n} = 0$ verschwindet und in der Umgebung

¹ Durch eine Substitution $x = x'^\mu$ kann erreicht werden, dass keine gebrochenen Potenzen auftreten, und durch eine Substitution von der Form $y = x^m y'$, dass die Reihen keine positiven Potenzen von x enthalten. Im Beweis wird diese Voraussetzung der Einfachheit halber gemacht.

dieser Stelle stetig ist. Wenn x im Gebiet $\omega_1 < \arg x < \omega_2$ ins Unendliche geht, convergiren die $\alpha_{\lambda n}$ gleichmässig zur Grenze Null, so dass das Gleiche für ζ_n gilt. Durch die Reihe

$$z = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots$$

wird die Gleichung $G(z) = 0$ formell befriedigt.

Wie in § 1 hat die Differentialgleichung (B) ein einziges Integral u_2 von der Eigenschaft, dass für $\lim t = +\infty$

$$\lim \frac{d \log u_2}{dt} = \alpha_2$$

ist; ebenso ist für ein einziges Integral η von (A)

$$\lim_{x=+\infty} x^{-(p-1)} \frac{d \log \eta}{dx} = \alpha_2$$

und für ein einziges Integral η_λ von (A _{λ})

$$\lim x^{-(p-1)} \frac{d \log \eta_\lambda}{dx} = \alpha_2,$$

so dass wie in § 1

$$u_2 = \eta \eta_1 \dots \eta \eta_{p-1}$$

ist. Es erscheint daher

$$z = \frac{\eta'}{\eta}$$

als Wurzel der algebraischen Gleichung

$$(\alpha) \quad \sum_{\lambda} L_{\lambda}(u_2) z^{\lambda} = 0.$$

Die Gleichung

$$(\alpha') \quad \sum_{\lambda} L_{\lambda}(T_2) z^{\lambda} = 0,$$

welche man erhält, wenn man für u_2 die asymptotische Reihe T_2 setzt, wird durch die Reihe

$$z = \frac{d \log S_2}{dx}$$

formell befriedigt. Nach dem soeben bewiesenen Hilfssatze wird $\frac{\eta'}{\eta}$ als Wurzel von (α) durch eine der der Gleichung (α') formell genügenden Reihen mit unendlich vielen negativen und einer endlichen Anzahl positiven von x (oder $x^{\frac{1}{m}}$) asymptotisch dargestellt; bezeichnet man diese Reihe mit $\frac{d \log \bar{S}}{dx}$, so ist \bar{S} eine normale oder anormale Reihe. Aus der asymptotischen Gleichung $\eta \sim \bar{S}$ folgt, dass \bar{S} der Gleichung (A) formell genügt, was nur möglich ist, wenn \bar{S} mit S_2 identisch ist. Es ist also

$$\frac{\eta'}{\eta} \sim \frac{d \log S_2}{dx}$$

und

$$\eta \sim S_2.$$

Die sämtlichen asymptotischen Gleichungen gelten zunächst, wenn x als reelle positive Grösse ins Unendliche geht. Nun gilt aber die asymptotische Gleichung

$$u_2 \sim T_2$$

gleichmässig für

$$-\frac{3\pi}{2} + \delta < \arg t < \frac{3\pi}{2} - \delta,$$

woraus die gleichmässige Gültigkeit der asymptotischen Gleichung

$$\eta \sim S_2$$

für

$$-\frac{3\pi}{2p'} + \delta < \arg x < \frac{3\pi}{2p} - \delta$$

folgt.

Wir haben dasselbe Resultat wie in § 2. Die weiteren Schlüsse gestalten sich wie früher.

§ 3.

Wir wollen die asymptotische Darstellung der Integrale der Differentialgleichung (A) benutzen,¹ um über die Lage der Nullstellen der Integrale in der Umgebung der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ Aufschluss zu gewinnen.

Setzt man

$$\eta^{(\rho)} = e^{\frac{\alpha x^\rho}{\rho} + \dots} x^\rho (C + r),$$

wo die Grössen α, \dots, ρ und C mit dem Index 1 oder 2 zu verstehen sind, je nachdem der Index ρ von η ungerade oder gerade ist, so lässt sich nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε ($|\varepsilon| < C$) eine positive Grösse r so bestimmen, dass für

$$|x| > r, \quad \frac{(2\rho - 3)\pi}{2\rho} + \delta < \arg x < \frac{(2\rho + 3)\pi}{2\rho} - \delta$$

$|\eta| < \varepsilon$ ist. Die Function $\eta^{(\rho)}$ ist demnach in dem bezeichneten Gebiet von Nullstellen frei.

Für ein beliebiges Integral

$$y = a\eta^{(0)} + b\eta^{(1)},$$

für welches im Gebiet $G^{(0)}$ die asymptotische Gleichung

$$y \sim bS_1$$

besteht, ist

$$y = be^{\frac{\omega_1 x^2}{2} + \dots} x^{\rho_1} (C_1 + r),$$

¹ Vgl. meine Arbeiten: *Verwendung asymptotischer Darstellungen zur Untersuchung der Integrale einer speciellen linearen Differentialgleichung* (Math. Ann. Bd. 49) und *Über das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle* (Crelles Journ. Bd. 120). Ich kann mich im gegenwärtigen Paragraphen kurz fassen, wo es sich um die Übertragung der in den genannten Arbeiten für die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten und die lineare, nicht homogene Differentialgleichung erster Ordnung entwickelten Methoden auf eine beliebige lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten handelt. Nach dem Muster der Arbeit im 49. Bd. der Math. Ann. liessen sich die jetzigen Entwicklungen weiter ausführen.

wo γ im verkleinerten Gebiet $\bar{G}^{(0)}$ gleichmässig zur Grenze Null convergirt. Das Integral y kann daher im Gebiet $\bar{G}^{(0)}$ keine Nullstellen besitzen, wenn $|x|$ hinreichend gross genommen wird.

Wenn also ein Integral y von (A) Nullstellen x_λ von der Art besitzt, dass für $\lim \lambda = \infty$ $|x_\lambda| = \infty$ ist, so muss sich arg x_λ einem der Grenzwerte

$$\frac{(2\rho - 1)\pi}{2p} \quad (\rho = 0, 1, 2, \dots)$$

nähern. Die im Unendlichen befindlichen Nullstellen eines Integrals y können nur in unendlicher Nähe der Trennungslinien der Gebiete $G^{(0)}, G^{(1)}, \dots$ liegen.

Betrachten wir z. B. die Gerade

$$\arg x = \frac{\pi}{2p},$$

so lässt sich das Integral

$$y = b\eta^{(0)} + a\eta^{(1)},$$

wenn a und b beide von Null verschieden sind, in der Form schreiben

$$y = ae^{\frac{a_1 x^p}{p} + \dots} x^{\rho_1} (C_1 + \gamma_1) + be^{\frac{a_2 x^p}{p} + \dots} x^{\rho_2} (C_2 + \gamma_2),$$

wo γ_1 und γ_2 im Gebiet

$$\frac{\pi}{2p} - \omega < \arg x < \frac{\pi}{2p} + \omega,$$

wo ω eine kleine positive Grösse bedeutet, gleichmässig zur Grenze Null convergiren; dasselbe gilt für ∂_1 und ∂_2 , wenn wir

$$y = ae^{(\sigma_1 + \partial_1) \frac{x^p}{p}} (C_1 + \gamma_1) + be^{(\sigma_2 + \partial_2) \frac{x^p}{p}} (C_2 + \gamma_2)$$

setzen. Die Gleichung

$$y = 0$$

schreibt sich

$$e^{(\sigma_1 + \partial_1 + \partial_2) \frac{x^p}{p}} = -\frac{b}{a} \frac{(C_2 + \gamma_2)}{(C_1 + \gamma_1)}$$

oder

$$x = s_\rho (1 + \zeta_\rho),$$

wobei

$$s_\lambda = \sqrt[p]{\frac{p}{a_1 - a_2} \left(\log \left(-\frac{b}{a} \frac{c_1}{c_2} \right) + 2\lambda\pi i \right)},$$

gesetzt ist und φ_λ eine Function von x bedeutet, welche gleichmässig zur Grenze Null geht, wenn x in dem oben bezeichneten Gebiet unendlich gross wird. Wir zeigen, unter ε eine beliebig kleine positive Grösse verstehend, dass ein mit dem Radius $\varepsilon|s_\lambda|$ um den Punkt $x = s_\lambda$ beschriebener Kreis K eine und nur eine Wurzel der Gleichung

$$x = s_\lambda(1 + \varphi_\lambda)$$

enthält, wenn λ hinreichend gross genommen wird. Das geschieht durch den Nachweis, dass für hinreichend grosse Werthe von λ

$$\frac{1}{2\pi i} \int_K d \log(x - s_\lambda - s_\lambda \varphi_\lambda) = 1$$

ist, wenn der Kreisumfang K als Integrationsweg genommen wird, oder, was dasselbe ist, durch den Nachweis, dass

$$\begin{aligned} & \int_K d \log(x - s_\lambda - s_\lambda \varphi_\lambda) - \int_K d \log(x - s_\lambda) \\ &= \int_K \frac{s_\lambda(\varphi_\lambda - (x - s_\lambda)\varphi'_\lambda)}{(x - s_\lambda)(x - s_\lambda - s_\lambda \varphi_\lambda)} dx \end{aligned}$$

beliebig klein wird, wenn man λ hinreichend gross annimmt. Das letzte Integral ist dem absoluten Betrage nach kleiner als das Product aus dem Kreisumfang $2\pi\varepsilon|s_\lambda|$ und dem Maximum des zu integrierenden Bruches auf K . Der Zähler ist dem absoluten Betrage nach kleiner als $|s_\lambda|\varepsilon\eta$ (wo η eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet), wenn man λ hinreichend gross wählt; da $|\varphi'_\lambda|$ für hinreichend grosse Werthe von λ kleiner als $\eta\varepsilon$ ist, so ist der Nenner dem absoluten Betrage nach grösser als

$$\varepsilon|s_\lambda|(\varepsilon|s_\lambda| - |s_\lambda|\eta\varepsilon) = \varepsilon^2|s_\lambda|^2(1 - \eta).$$

¹ Dabei ist λ eine ganze positive Zahl; die Wurzel ist so fixirt, dass für

$$\lambda = +\infty \quad \arg s_\lambda = \frac{\pi}{2p}$$

wird.

Der absolute Betrag unseres Integrals ist also kleiner als

$$2\pi\varepsilon |s_\lambda| \cdot \frac{|s_\lambda| \varepsilon \eta}{\varepsilon^2 |\lambda_\lambda|^2 (1-\eta)} = \frac{2\pi\eta}{1-\eta},$$

d. h. beliebig klein für hinreichend grosse Werthe von λ , w. z. b. w.

Das Integral hat also die Nullstellen

$$x_\lambda = s_\lambda(1 + \varepsilon_\lambda), \quad \lim \lambda = +\infty,$$

wo

$$\lim \varepsilon_\lambda = 0$$

ist.

Wir bringen nun den Begriff des Geschlechtes einer ganzen transcedenten Function und den Begriff des Ranges einer linearen Differentialgleichung an einer Unbestimmtheitsstelle in Verbindung. Wenn die zur singulären Stelle $x = \infty$ gehörige Fundamentalgleichung zwei verschiedene Wurzeln $e^{2\pi i \alpha_1}, e^{2\pi i \alpha_2}$ besitzt, hat man ein Fundamentalsystem von der Form

$$y_i = x^{\alpha_i} P_i(x), \quad (i=1, 2)$$

wo $P_i(x)$ eine nach positiven und negativen Potenzen von x fortschreitende, für hinreichend grosse Werthe von $|x|$ convergente Reihe ist. Eine der beiden Functionen $P_i(x)$, welche kurz $P(x)$ heissen möge, habe die Nullstellen $x_\lambda^{(\rho)}$ ($\rho = 0, 1, \dots$), wo

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \arg x_\lambda^{(\rho)} = \frac{(2\rho - 1)\pi}{2p}$$

ist. Bezeichnet man mit

$$\varepsilon_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots, \infty)$$

diejenigen Nullstellen, deren absoluter Betrag grösser als die beliebig zu wählende Grösse r ist, so ist, wie man aus den asymptotischen Ausdrücken für die Nullstellen ersieht, von den beiden Reihen

$$\sum_\nu \frac{1}{|\varepsilon_\nu|^p}, \quad \sum_\nu \frac{1}{|\varepsilon_\nu|^{p+1}}$$

die erste divergent, die zweite convergent. Das unendliche Product

$$H(r) = \prod_\nu \left(1 - \frac{x}{z_\nu} \right) e^{\frac{x}{z_\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{z_\nu} \right)^2 + \dots + \frac{1}{p} \left(\frac{x}{z_\nu} \right)^p}$$

ist daher für jeden endlichen Werth von x convergent. Dann ist

$$F(x) = \frac{P(x)}{\Pi(x)}$$

für $|x| > r$ von Nullstellen frei, so dass eine für $|x| > r$ convergente Entwicklung von der Form

$$\frac{d \log F(x)}{dx} = \frac{\mu}{x} + \frac{dg(x)}{dx} + \frac{d\mathfrak{P}_0\left(\frac{1}{x}\right)}{dx}$$

besteht, wo $g(x)$ eine nach positiven Potenzen von x fortschreitende, beständig convergente Reihe und $\mathfrak{P}_0\left(\frac{1}{x}\right)$ eine für $|x| > r$ convergente Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ darstellt. Es ist also

$$F(x) = x^\mu e^{g(x)} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo μ eine positive oder negative ganze Zahl und

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) = Ce^{\mathfrak{P}_0\left(\frac{1}{x}\right)}$$

eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ ist, welche für $|x| > r$ von Nullstellen frei ist. Wir haben demnach

$$y = x^\sigma P(x) = x^{\sigma+\mu} e^{g(x)} \Pi(x) \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Mit Benutzung unserer asymptotischen Darstellungen und eines Satzes von Herrn HADAMARD¹ zeigt man, dass $g(x)$ eine ganze rationale Function ist, deren Grad nicht grösser als p sein kann, so dass

$$G(x) = e^{g(x)} \Pi(x)$$

eine ganze Function vom Geschlecht p ist. Wenn wir unserem Integral

$$y = x^{\sigma+\mu} G(x) \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$$

den Rang p an der singulären Stelle $x = \infty$ beilegen, so stellt sich der

¹ Liouv. Journ. 1893.

Begriff des Ranges als Verallgemeinerung des von LAGUERRE eingeführten Begriffs des Geschlechtes einer ganzen transcendenten Function dar.

Die Hauptergebnisse dieses Paragraphen mögen in der Satz zusammengefasst werden:

Das ausgezeichnete Integral $\eta^{(p)}$ von (A) besitzt für

$$\frac{(2\rho - 3)\pi}{2\rho} + \delta < \arg x < \frac{(2\rho + 3)\pi}{2\rho} - \delta,$$

keine Nullstelle, deren absoluter Betrag eine gewisse Grenze übersteigt. Ein beliebiges Integral y besitzt in der Umgebung von $x = \infty$ unendlich viele Nullstellen $x_\lambda^{(p)}$ von der Art, dass für $\lim \lambda = \infty$

$$\lim |x_\lambda^{(p)}| = \infty, \quad \lim \arg x_\lambda^{(p)} = \frac{(2\rho - 1)\pi}{2\rho}$$

ist. Es ist z. B. für $y = b\eta^{(0)} + a\eta^{(1)}$

$$x_\lambda^{(1)} = \sqrt[p]{\frac{a_1 - a_2}{p} \left(\log \left(-\frac{b}{a} \frac{C_2}{C_1} \right) + 2\lambda\pi i \right)} \cdot (1 + \varepsilon_\lambda),$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varepsilon_\lambda = 0.$$

Ist

$$y_i = x^{\alpha_i} P_i(x) \quad (i=1, 2,$$

das zu $x = \infty$ gehörige kanonische Fundamentalsystem von (A), so ist die Laurent'sche Reihe $P_i(x)$ von der Form

$$P(x) = x^\mu G(x) \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo $G(x)$ eine ganze (transcendente) Function vom Geschlecht p ist, welche diejenigen Nullstellen von y_i besitzt, deren absoluter Betrag grösser als r (r beliebig) ist, während μ eine ganze Zahl und $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ eine für $|x| > r$ nicht verschwindende Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ darstellt.

¹ λ ist eine beliebige kleine positive Grösse.

§ 4.

Wir lassen jetzt die in § 1 gemachte Voraussetzung, dass die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von (A)

$$\alpha^2 + a_1 \alpha + a_2 = 0$$

verschieden seien, fallen.

Ist α eine Doppelwurzel, so wird die Gleichung (A) durch die Substitution

$$y = e^{\frac{\alpha x^p}{p}} z$$

übergeführt in

$$P_0 \frac{d^2 z}{dx^2} + (P_1 + 2\alpha x^{p-1} P_0) \frac{dz}{dx}$$

$$+ (P_2 + \alpha x^{p-1} P_1 + (\alpha^2 x^{2p-2} + (p-1)\alpha x^{p-2}) P_0) z = 0$$

oder wegen $\alpha^2 + a_1 \alpha + a_2 = 0$, $2\alpha + a_1 = 0$ in

$$(x^m + \dots) \frac{d^2 z}{dx^2} + (b'_1 x^{m+p-2} + \dots) \frac{dz}{dx} + (b'_2 x^{m+2p-3} + b'_2' x^{m+2p-4} + \dots) z = 0.$$

Ist b'_2 von Null verschieden, so führt die Substitution

$$x = t^2$$

auf die Differentialgleichung

$$(t^{2m+1} + \dots) \frac{d^2 z}{dt^2} + (0 \cdot t^{(2m+1)+2p-2} + \dots) \frac{dz}{dt} + (4b'_2 t^{(2m+1)+4p-4} + \dots) z = 0$$

vom Rang $2p-1$ mit der charakteristischen Gleichung

$$\beta^2 + 4b'_2 = 0,$$

deren Wurzeln β_1 und $\beta_2 = -\beta_1$ zwei Normalreihen

$$T_i = e^{\frac{\beta_1 i^{2p-1}}{2p-1} + \frac{\beta_1^2 i^{2p-2}}{2p-2} + \dots} t^{\rho_i} \left(C_i + \frac{C_{i1}}{t} + \dots \right) \quad (i=1,2)$$

entsprechen. Daraus ergeben sich für die Differentialgleichung (A) zwei anormale Reihen von der Form

$$S_i = e^{\frac{ax^p}{p} + \frac{\beta_1 x^{\frac{p-1}{2}}}{2p-1} + \frac{\beta_2 x^{\frac{p-2}{2}}}{2p-2} + \dots} x^{\frac{p}{2}} \left(C_i + \frac{C_{i1}}{x} + \frac{C_{i2}}{x^2} + \dots \right). \quad (i=1, 2)$$

Im Fall $b'_2 = 0$ haben wir die Differentialgleichung vom Rang $p-1$

$$(x^m + \dots) \frac{d^2 z}{dx^2} + (b'_1 x^{m+p-2} + \dots) \frac{dz}{dx} + (b'_2 x^{m+2p-4} + \dots) z = 0$$

mit der charakteristischen Gleichung

$$\beta^2 + b'_1 \beta + b'_2 = 0.$$

Wir erhalten zwei Normalreihen vom Rang $p-1$, wenn die Wurzeln dieser Gleichung verschieden sind, während im Fall einer Doppelwurzel $\beta = \alpha_1$ die Substitution

$$z = e^{\frac{\alpha_1 x^{p-1}}{p-1}} z_1$$

angewandt wird. Nehmen wir an, man müsse l -mal nach einander eine solche Substitution anwenden, bis man auf eine Differentialgleichung stösst, welche unmittelbar oder nach Anwendung der Substitution $x = t^2$ durch Normalreihen befriedigt wird. Man hat dann

$$y = e^{\frac{ax^p}{p} + \frac{a_1 x^{p-1}}{p-1} + \dots + \frac{a_{l-1} x^{p-l+1}}{p-l+1}} z,$$

und die Differentialgleichung für z wird entweder durch zwei Normalreihen

$$T_i = e^{\frac{\beta_1 x^{p-l}}{p-l} + \frac{\beta_2 x^{p-l-1}}{p-l-1} + \dots} x^{\frac{pl}{2}} \left(C_i + \frac{C_{i1}}{x} + \dots \right) \quad (i=1, 2)$$

oder durch zwei anormale Reihen

$$T_i = e^{\frac{\beta_1 x^{\frac{2p-2l+1}{2}}}{2p-2l+1} + \frac{\beta_2 x^{p-l}}{2p-2l} + \dots} x^{\frac{pl}{2}} \left(C_i + \frac{C_{i1}}{x^{\frac{1}{2}}} + \dots \right) \quad (i=1, 2)$$

formell befriedigt. Aus der Differentialgleichung (A) erhält man demnach Reihen von der Form

$$S_i = e^{\frac{ax^p}{p} + \frac{a_1x^{p-1}}{p-1} + \dots + \frac{a_{l-1}x^{p-l+1}}{p-l+1} + \frac{\beta_l x^{p-l}}{p-l} + \frac{\beta_{l+1}x^{p-l-1}}{p-l-1} + \dots} x^{\beta_l} \left(C_i + \frac{C_{i1}}{x} + \dots \right) \quad (i=1, 2)$$

oder von der Form

$$S_i = e^{\frac{ax^p}{p} + \frac{a_1x^{p-1}}{p-1} + \dots + \frac{a_{l-1}x^{p-l+1}}{p-l+1} + \frac{\beta_l x^{\frac{2p-2l+1}{2}}}{2p-2l+1} + \frac{\beta_{l+1}x^{p-l}}{2p-2l} + \dots} \times x^{\frac{p}{2}} \left(C_i + \frac{C_{i1}}{x^2} + \frac{C_{i2}}{x} + \dots \right). \quad (i=1, 2)$$

Im Falle $l=p$ führt die Substitution

$$y = e^{\frac{ax^p}{p} + \frac{a_1x^{p-1}}{p-1} + \dots + a_{p-1}x} z$$

auf eine Differentialgleichung, für welche $x = \infty$ eine Stelle der Bestimmtheit ist.

Aus der Art, wie die Differentialgleichung (A) auf eine Differentialgleichung zurückgeführt wurde, deren charakteristische Gleichung zwei verschiedene Wurzeln besitzt, folgt in allen Fällen die asymptotische Darstellung der Integrale von (A) durch die Normalreihen oder anormalen Reihen S_1 und S_2 . Das Nähere ergibt sich aus den in § 1 gefundenen Resultaten.

Charlottenburg, 8. October 1897.

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

JOURNAL

HERAUSGEGEBEN

REDIGÉ

VON

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

23: 3 & 4

STOCKHOLM

BEIJERS BOKFÖRLAGSÄKTIEBOLAG

1900.

PARIS

BERLIN

MAYER & MÜLLER.

KRISTZ 10018 FRIEDRICHSTRAßE 2.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

A. HERMANN.

15 RUE DE LA SORBONNE.

REDACTION

SVERIGE:

A. V. BÄCKLUND, Land.
A. LINDSTEDT, Stockholm.
G. MITTAG-LEFFLER, »
E. PHRAGMÉN, »

NORGE:

C. A. BJERKNES, Christiania.
ELLING HOLST, »
S. LIE, Leipzig.
L. SYLOW, Frederikshald.

DANMARK:

J. PETERSEN, Kjöbenhavn.
H. G. ZEUTHEN, »

FINLAND:

L. LINDELÖF, Helsingfors.

SUR UNE QUESTION FONDAMENTALE DU CALCUL INTEGRAL

PAR

CH. RIQUIER

A CAEN.

Introduction.

Dans des recherches publiées en 1893 par les Annales de l'Ecole Normale, et reproduites deux ans plus tard par le Recueil des Savants étrangers (tome 32, n° 3), j'ai pu établir (en me bornant à l'examen des circonstances générales) l'existence des intégrales d'un système différentiel quelconque. Les réflexions que j'ai faites sur la question depuis cette époque m'ayant conduit à des résultats nouveaux, et aussi à une simplification considérable des raisonnements à l'aide desquels j'avais établi mes résultats antérieurs, il m'a semblé qu'une refonte totale de ces travaux, relatifs à un ordre de questions encore peu étudiées, présenterait quelque utilité: c'est ce qui m'a décidé à publier le présent Mémoire.

Je reprendrai tout d'abord, en le complétant, l'exposé de la partie historique.

CAUCHY, le premier, parvint, sur la question de l'existence des intégrales, à des résultats importants, dont il donna des démonstrations rigoureuses. Dans les tomes 14, 15 et 16 des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (1842 et 1843), il prouve l'existence des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires, en précisant ce que l'on doit entendre par *intégrales générales* d'un pareil système; puis il étudie au même point de vue un système linéaire de m équations

aux dérivées partielles du premier ordre, impliquant un nombre égal de fonctions inconnues

$$\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_m,$$

et tel qu'on puisse le résoudre par rapport aux m dérivées

$$\frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial t}, \frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial t}, \dots, \frac{\partial \bar{\omega}_m}{\partial t},$$

toutes relatives à une même variable t . La méthode à l'aide de laquelle il démontre la convergence des développements des intégrales n'est autre que celle des fonctions *majorantes*, adoptée, après lui, par presque tous les auteurs qui se sont occupés de ce genre de questions. Quant aux systèmes quelconques, on peut toujours, en introduisant de nouvelles fonctions inconnues, les réduire à des systèmes linéaires du premier ordre, et CAUCHY semble admettre que les seuls dont il y ait lieu de s'occuper sont ceux qui, après réduction, ont la forme ci-dessus définie.

En 1856, MM. BRIOT et BOUQUET, dans un Mémoire sur les systèmes d'équations différentielles ordinaires,¹ donnèrent une démonstration nouvelle de l'existence de leurs intégrales.

En 1872, le même point fut établi pour les systèmes, dits *complètement intégrables*, d'équations différentielles totales, et trois géomètres, MM. MÉRAY, BOUQUET et MAYER, en publièrent presque simultanément la solution.²

¹ BRIOT et BOUQUET, *Mémoire sur les fonctions définies par les équations différentielles* (Journal de l'Ecole Polytechnique, Cahier 36).

² MÉRAY, *Revue des Sociétés Savantes* (Sciences mathématiques, physiques et naturelles, t. 3, 1868).

MÉRAY, *Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale*, p. 143, 1872.

BOUQUET, *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. 3, p. 265, 1872.

MAYER, *Mathematische Annalen*, t. 5, p. 448, 1872, et *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 1^{ère} série, t. 11, 1876.

Une nouvelle démonstration du même point, pour laquelle j'ai prêté ma collaboration à M. MÉRAY, a été publiée en 1889 dans les *Annales de l'Ecole Normale* (MÉRAY et RIQUIER, *Sur la convergence des développements des intégrales d'un système d'équations différentielles totales*); elle se trouve reproduite dans un ouvrage récent de M. MÉRAY, (*MÉRAY, Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques*, 1^{ère} partie, p. 256 et suiv.).

En 1875, les résultats, encore peu connus, de CAUCHY sur les systèmes partiels furent démontrés de nouveau par M. DARBOUX et M^{me} de KOWALEVSKY. Cette dernière y avait été conduite par la considération du système partiel qui porte son nom, système composé d'équations en nombre égal à celui des fonctions inconnues, et tel, qu'en désignant par

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_g$$

les fonctions dont il s'agit, et par

$$k_1, k_2, \dots, k_g$$

les ordres respectifs du système par rapport à elles, ce dernier fût résolvable par rapport aux dérivées

$$\frac{\partial^{k_1} \varphi_1}{\partial x^{k_1}}, \frac{\partial^{k_2} \varphi_2}{\partial x^{k_2}}, \dots, \frac{\partial^{k_g} \varphi_g}{\partial x^{k_g}},$$

toutes relatives à une même variable x . Les recherches de M^{me} de KOWALEVSKY font l'objet d'un Mémoire publié dans le Journal de Crelle;¹ M. DARBOUX, qui avait entrepris de son côté une recherche analogue, s'est borné à indiquer sa démonstration dans deux Notes communiquées à l'Académie des Sciences.²

En 1880, M. MÉRAY publia un Mémoire où il se proposait de démontrer d'une manière générale l'existence des intégrales des systèmes d'équations aux dérivées partielles.³ Comme la lecture approfondie de ce Mémoire a été le point de départ de mes propres travaux, comme j'ai pu me convaincre d'ailleurs que son contenu est ignoré du public et des auteurs, je crois devoir entrer à ce sujet dans quelques détails.

M. MÉRAY considère d'abord un système *du premier ordre*, résolu par rapport à un certain nombre de dérivées, et il distingue essentiellement, *pour chaque fonction inconnue*, les variables indépendantes par rapport auxquelles sont prises les dérivées qui figurent dans les premiers membres du système, de celles qui sont étrangères à la formation des dérivées dont il s'agit; les premières sont, pour lui, les variables *principales* de la

¹ Tome 80, p. 1.

² Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 80, p. 101 et 317.

³ *Démonstration générale de l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3^{ème} série, t. 6, 1880).

fonction considérée, les dernières ses variables *paramétriques*, et il va de soi qu'une même variable peut être à la fois principale pour quelque fonction et paramétrique pour quelque autre.¹ M. MÉRAY partage ensuite les dérivées de tous ordres d'une même fonction inconnue en *paramétriques* et en *principales*, selon que les différentiations d'où elles proviennent intéressent ses *seules variables paramétriques*, ou bien, soit avec elles, soit sans elles, *quelque variable principale*.² Considérant enfin, dans un système de cette espèce, un groupe quelconque d'intégrales ordinaires, et les supposant développées par la formule de TAYLOR à partir de *valeurs initiales* choisies pour les variables, M. MÉRAY nomme *détermination initiale* de chaque intégrale la fonction de ses seules variables paramétriques à laquelle elle se réduit quand ses variables principales prennent leurs valeurs initiales;³ puis il fait observer que les valeurs initiales de ces déterminations et de leurs dérivées de tous ordres sont respectivement égales à celles des intégrales mêmes et de leurs dérivées paramétriques.⁴

Pour disposer nettement les équations d'un pareil système, il convient, ajoute M. MÉRAY, de les écrire dans les cases d'un quadrillage rectangulaire, dont les lignes correspondent aux variables indépendantes et les colonnes aux fonctions inconnues, en plaçant l'équation qui aurait, par exemple, $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour premier membre, dans la case qui appartient à la fois à la colonne (u) et à la ligne (x): le tableau ainsi formé peut contenir des cases vides réparties d'une manière quelconque, et ces dernières sont, pour une colonne donnée, en nombre égal à celui des variables paramétriques de l'inconnue correspondante.⁵ Si, pour fixer les idées, on désigne par u, v, w trois fonctions inconnues des quatre variables indépendantes x, y, z, s , et que l'on considère un système du premier ordre résolu par rapport aux dérivées

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial s},$$

¹ Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3^{ème} série, t. 6, 1880, p. 237.

² Ibid., p. 237.

³ Ibid., p. 242.

⁴ Ibid., p. 242.

⁵ Ibid., p. 237 et 238.

la seule inspection du tableau

(1)

	(u)	(v)	(w)
(x)	$\frac{\partial u}{\partial x} = \dots$		
(y)	$\frac{\partial u}{\partial y} = \dots$	$\frac{\partial v}{\partial y} = \dots$	
(z)	$\frac{\partial u}{\partial z} = \dots$		$\frac{\partial w}{\partial z} = \dots$
(s)		$\frac{\partial v}{\partial s} = \dots$	

construit conformément aux indications précédentes, suffit à faire voir: 1° que la fonction u a pour variables principales x, y, z , pour variable paramétrique s , et pour dérivées paramétriques toutes celles qui intéressent la variable s à l'exclusion de x, y, z ; 2° que la fonction v a pour variables principales y et s , pour variables paramétriques x et z , et pour dérivées paramétriques toutes celles qui intéressent x et z à l'exclusion de y et s ; 3° enfin, que la fonction w a pour variable principale z , pour variables paramétriques x, y, s , et pour dérivées paramétriques toutes celles qui intéressent x, y, s à l'exclusion de z . Si l'on considère maintenant un groupe d'intégrales u, v, w de notre système, et que l'on désigne par x_0, y_0, z_0, s_0 les valeurs initiales choisies pour les variables indépendantes, les déterminations initiales de ces intégrales seront respectivement: la fonction de s à laquelle u se réduit pour $x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0$, la fonction de x et z à laquelle v se réduit pour $y - y_0 = s - s_0 = 0$, et la fonction de x, y, s à laquelle w se réduit pour $z - z_0 = 0$.

Cela étant, M. MÉRAY assujettit les seconds membres des systèmes qu'il considère à une certaine restriction, dont l'énoncé importe peu,¹

¹ Voici quelle est cette restriction: En désignant par u et v deux fonctions inconnues quelconques, aucune dérivée de v ne figure dans les seconds membres des équations de la colonne (u) , si quelque variable principale de v est paramétrique pour u (Ibid., p. 238).

mais qui entraîne la conséquence capitale suivante:¹ *Si aux équations du système donné on adjoint toutes celles qui s'en déduisent par de simples différentiations, ces relations, dites primitives, peuvent être rangées dans un ordre de succession tel, que chacune ne contienne dans son second membre (outre les variables indépendantes, les fonctions inconnues et leurs dérivées paramétriques) que des dérivées principales figurant dans les premiers membres des relations antérieures.* M. MÉRAY conclut de là que pour reconstruire en entier les développements par la série de TAYLOR d'intégrales que l'on sait d'avance exister, il suffit de connaître seulement leurs valeurs initiales et celles de leurs dérivées paramétriques de tous ordres, ou, ce qui revient au même, les déterminations initiales de ces intégrales;² car, ces déterminations étant supposées connues, les relations primitives permettent de calculer successivement les valeurs initiales de toutes les dérivées principales. Puis, il aborde le problème inverse, et il cherche si, réciproquement, le système donné admet des intégrales ordinaires ayant pour déterminations initiales respectives des fonctions, choisies au hasard, de leurs divers groupes de variables paramétriques.³

Or, pour que les intégrales dont il s'agit existent effectivement, il faut et il suffit, comme M. MÉRAY le fait observer:⁴ 1° que, dans le calcul des valeurs initiales des dérivées principales, il y ait concordance numérique entre les diverses expressions fournies pour chacune d'elles par les relations primitives; 2° que les développements des intégrales, construits *a priori* comme nous l'avons indiqué, soient convergents. — Se préoccupant d'abord de la première de ces conditions, M. MÉRAY partage en deux classes bien distinctes les systèmes du premier ordre, dits *immédiats*, qui font l'objet principal de son Mémoire, et il les nomme *passifs* ou *non passifs*, suivant que la concordance numérique des relations primitives y a lieu pour des données initiales quelconques ou seulement pour un choix convenable de ces dernières. Après avoir formulé les conditions de passivité d'un système immédiat,⁵ il s'occupe en dernier lieu de la

¹ Ibid., p. 239 et 240.

² Ibid., p. 242.

³ Ibid., p. 243.

⁴ Ibid., p. 245 et 250.

⁵ Ibid., p. 245 et suiv.

convergence des développements des intégrales, et il est ainsi conduit à l'énoncé suivant:¹ *Tout système du premier ordre, immédiat et passif, est complètement intégrable, c'est à dire admet un groupe (unique) d'intégrales ordinaires ayant pour déterminations initiales des fonctions arbitrairement choisies de leurs variables paramétriques.* Par exemple, le système (1), s'il est immédiat et passif, admettra, d'après cet énoncé, un groupe (unique) d'intégrales ordinaires u, v, w , se réduisant respectivement:

u à une fonction donnée de s pour $x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0$;

v à une fonction donnée de x et z pour $y - y_0 = s - s_0 = 0$;

w à une fonction donnée de x, y et s pour $z - z_0 = 0$.

On voit ainsi qu'en supposant rigoureusement établie la convergence des développements des intégrales, la solution générale d'un système (du premier ordre) immédiat et passif dépend de fonctions (ou constantes) arbitraires en nombre précisément égal à celui des inconnues qui s'y trouvent engagées.

Finalement, et en ce qui concerne les systèmes différentiels quelconques, M. MÉRAY admet que de simples résolutions d'équations, combinées avec des différentiations et des réductions au premier ordre, permettent de les ramener à la forme immédiate passive.²

Comme je l'ai dit plus haut, la lecture approfondie de ce Mémoire a été le point de départ de tous mes travaux sur les systèmes différentiels partiels, et il va sans dire que, dans cette étude, j'ai examiné de très-près la démonstration de la convergence. Cette dernière m'ayant paru inexacte, je fis part de mes doutes à M. MÉRAY, qui les trouva justifiés; les efforts qu'il fit pour modifier la démonstration le conduisirent même à la découverte de certains cas de divergence qu'il ne soupçonnait pas d'abord,³ et il publia en 1890, avec ma collaboration, un nouveau Mémoire⁴ où la convergence des développements des intégrales se trouvait établie, cette fois, d'une façon rigoureuse, mais, bien entendu, pour une partie seulement des systèmes immédiats primitivement étudiés. Ce Mémoire est reproduit presque en entier dans un ouvrage récent de

¹ Ibid., p. 249 et suiv.

² Ibid., p. 236, 265, 266.

³ Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 1888, t. 106, p. 648.

⁴ *Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles partielles* (Annales de l'École Normale, 1890).

M. MÉRAY,¹ et il y est accompagné de quelques indications sommaires sur la marche générale à suivre pour traiter un système quelconque;² la conclusion du Mémoire de 1880 s'y trouve, naturellement, modifiée, et M. MÉRAY, au lieu de considérer les systèmes *immédiats* passifs comme le type fondamental auquel peut se ramener un système quelconque, assigne maintenant le même rôle aux systèmes *immédiats et réguliers* passifs, qui font l'objet du Mémoire de 1890: malheureusement, cette nouvelle conclusion n'est pas mieux établie que l'ancienne, et, à moins de recourir au changement des variables, qu'on doit, à mon avis, s'efforcer d'éviter, il me paraît peu probable qu'elle soit exacte. Quoi qu'il en soit, la connaissance des méthodes de M. MÉRAY et la collaboration que je lui ai prêtée m'ont été, pour mes recherches personnelles, extrêmement profitables; nonobstant une erreur dans la démonstration de la convergence, ses travaux ont, dès 1880, mis en pleine lumière le fait suivant, qui se trouvait désormais acquis:

Si un système du premier ordre, quelle que soit d'ailleurs sa nature, satisfait à la double condition

1° *de la passivité,*

2° *de la convergence des développements des intégrales,*

sa solution générale dépend de fonctions (ou constantes) arbitraires en nombre précisément égal à celui des inconnues qui s'y trouvent engagées.

Dans l'intervalle qui sépare la publication des deux Mémoires dont je viens de parler, M. KÖNIG³ avait établi les conditions d'intégrabilité absolue d'un système du premier ordre de forme telle, qu'en désignant par

$$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m$$

les fonctions inconnues, et par

$$x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n$$

¹ *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques*, 1^{ère} partie, p. 310 et suiv.

² *Leçons nouvelles etc.*, p. 353 et suiv.

³ J. KÖNIG, *Über die Integration simultaner Systeme partieller Differentialgleichungen mit mehreren unbekannten Functionen* (Mathematische Annalen, t. 23, 1884).

les variables indépendantes, le système fût résoluble par rapport aux m dérivées de z_1, z_2, \dots, z_m relatives à x_1, x_2, \dots, x_r . Ce type, dans lequel rentrent évidemment les systèmes partiels étudiés par CAUCHY et les systèmes d'équations différentielles totales, n'est lui-même qu'un simple cas particulier des systèmes étudiés par M. MÉRAY et moi en 1890.

Dans une thèse de doctorat publiée en 1891,¹ M. BOURLET parvint à établir qu'un système différentiel quelconque est réductible à une forme du premier ordre, dans laquelle la convergence des développements des intégrales est assurée; mais, sauf des cas fortuits, la forme dont il s'agit n'était point passive, et, par suite, ne faisait nullement connaître le nombre et la nature des éléments arbitraires dont dépendent les intégrales générales.

Ainsi, la question de l'existence des intégrales dans un système quelconque était encore loin de se trouver résolue. Depuis l'époque de ma collaboration avec M. MÉRAY, j'y avais sans cesse réfléchi, et, poursuivant le courant d'idées où cette collaboration m'avait engagé, je m'efforçais de la résoudre en la ramenant au problème suivant: *Etant donné un système différentiel quelconque* (que je supposais ne comprendre qu'un nombre limité d'équations), *le réduire, sauf constatation éventuelle d'incompatibilité, à un système du premier ordre où se trouve réalisée la double condition: 1° de la passivité; 2° de la convergence des développements des intégrales.* Toutefois, pour diverses raisons qu'il serait trop long d'indiquer ici, j'avais été induit à penser qu'en se bornant dès le début de la théorie, comme on avait coutume de le faire, à la considération exclusive des systèmes du premier ordre, on n'y introduisait qu'une simplification apparente, et même, à certains égards, une nouvelle complication. J'avais donc résolu de ne m'attacher en premier lieu qu'à la découverte d'une forme canonique complètement intégrable, sans m'inquiéter aucunement de l'ordre des équations; cette forme une fois obtenue, j'espérais pouvoir la ramener à une semblable d'ordre inférieur, et par suite au premier ordre. C'est ce qui arriva en effet. En 1892, je réussis à opérer la réduction d'un système quelconque à une forme complètement intégrable, et l'année suivante (1893) je substituai à celle-ci une forme de même nature, mais du pre-

¹ BOURLET, *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées qui contiennent plusieurs fonctions inconnues* (thèse, avril 1891; Annales de l'École Normale, 1891).

mier ordre, où se trouvaient engagées, avec les inconnues du système proposé, quelques-unes de leurs dérivées à titre d'inconnues adjointes.¹ Il va sans dire que *l'économie des conditions initiales, évidente dans ce dernier système en vertu des explications données plus haut, se trouvait par là même immédiatement connue dans le proposé*, et que, *dans l'un comme dans l'autre, la solution générale dépendait de fonctions (ou constantes) arbitraires en nombre fini.*²

Trois ans après, en 1896, M. DELASSUS,³ à l'aide d'une méthode toute différente, essentiellement basée sur le changement des variables, donna une deuxième solution du problème dont je m'étais occupé: il réduisit tout système différentiel à une forme complètement intégrable,

¹ Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 28 mars 1892, 27 février 1893, 24 avril 1893. — Annales de l'Ecole Normale, 1893. — Recueil des savants étrangers, t. 32, n° 3.

² J'insiste sur ce point, qui semble n'avoir pas été très-bien compris de quelques lecteurs: par le seul fait de la réduction à une forme passive du premier ordre où la convergence des développements des intégrales était assurée, la solution générale d'un système donné devait, comme je viens de l'expliquer, dépendre finalement de fonctions arbitraires en nombre fini, et ces fonctions se dégager d'elles-mêmes, sans que j'eusse besoin de m'en inquiéter autrement; mais il n'en eût pas été de même, si la forme à laquelle j'aboutissais en dernier lieu eût été d'ordre supérieur au premier. Ainsi, au début d'un Mémoire publié en 1894, M. TRESSE a formulé l'énoncé suivant: *Etant donné un système quelconque d'équations aux dérivées partielles, on peut, après un nombre limité de différentiations et d'éliminations, ou bien montrer qu'il est incompatible, ou bien le mettre sous forme d'un système en involution (système passif) dont la solution générale dépend alors, suivant les cas, de fonctions ou de constantes arbitraires* (Acta mathematica, 1894, p. 9). Or, en supposant établie la convergence des développements des intégrales (partie de la question que M. TRESSE ne se proposait pas d'examiner), il ressort uniquement de sa démonstration que, pour déterminer un groupe d'intégrales ordinaires de ce système en involution, dont l'ordre est quelconque, on peut se donner arbitrairement certaines portions de leurs développements respectifs, c'est-à-dire certaines constantes, en nombre le plus souvent infini, et qui, dans le cas général, ne se grouperont pas d'elles-mêmes en un nombre fini de fonctions. J'ajoute que M. TRESSE me semble avoir laissé dans l'ombre certains points importants, et n'avoir pas montré, par exemple, comment on peut, à l'aide d'un nombre limité d'opérations, s'assurer si les conditions d'intégrabilité d'un système donné se trouvent ou non satisfaites.

³ Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles (Annales de l'Ecole normale, 1896).

et, dans un énoncé trop long pour être rapporté ici,¹ il indiqua en détail les fonctions et constantes arbitraires dont se trouvait dépendre, après cette réduction, la solution générale.

De tous les auteurs dont je viens d'énumérer les travaux, deux seulement, M. DELASSUS et moi, ont traité d'une manière générale la question de l'existence des intégrales, et encore convient-il d'observer que la méthode de M. DELASSUS, la dernière en date, tombe en défaut dans le cas où le changement des variables est à éviter; si l'on a affaire, notamment, à un système complètement intégrable,² dont on soit tenu, pour telle ou telle raison, de ne pas modifier la structure, il sera presque toujours impossible de le considérer comme appartenant au type canonique, de forme très-particulière, définie par ce géomètre, et d'appliquer les conclusions de l'énoncé auquel j'ai fait allusion plus haut. Bien que ma méthode me semblât, en grande partie, échapper à ces inconvénients, je me suis efforcé, comme je l'ai dit, de l'améliorer au double point de vue du fond et de la forme. Par exemple, au lieu d'avoir recours, comme je l'avais fait jusqu'ici, à la réduction au premier ordre, pour fixer l'économie des conditions initiales qui déterminent entièrement une solution ordinaire de ma forme canonique, je substitue à ce procédé une méthode directe, dont l'emploi permet d'abrégér, dans une mesure considérable, et les raisonnements de la théorie, et les calculs de la pratique. Je modifie également, pour aboutir à des conclusions plus larges, ma démonstration de la convergence des développements des intégrales. Enfin, la considération des *cotes*, qui peut, au premier abord, sembler bizarre et artificielle, mais à laquelle je suis redevable de tous mes résultats antérieurs, me fournit aujourd'hui le moyen, non seulement d'étendre ces résultats d'une manière notable, grâce à une généralisation de ma forme canonique,³ mais encore d'en formuler quelques autres sur des systèmes non canoniques, et en particulier de généraliser un théorème de M. GOURSAT.⁴

¹ Annales de l'Ecole Normale, 1896, p. 461 et 462.

² C'est à dire remplissant la double condition: 1° de la passivité; 2° de la convergence des développements des intégrales.

³ Voir les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 27 décembre 1897.

⁴ Voir les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 6 décembre 1897 et 17 janvier 1898.

L'exposition détaillée de ces théories constitue l'objet du présent Mémoire.

La première partie est consacrée à la méthode nouvelle qui me sert à fixer, dans un système différentiel passif, l'économie des conditions initiales, c'est à dire des fonctions ou constantes, en nombre fini, dont la donnée détermine entièrement un groupe d'intégrales hypothétiques du système.¹

Dans la deuxième partie, je définis une forme de système différentiel que je nomme *orthoïque*, j'établis les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle soit passive, et je montre, par divers exemples,² que les développements des intégrales hypothétiques n'y sont pas nécessairement convergents.

Dans la troisième partie, j'étudie un cas remarquable et très-étendu où cette convergence ne peut manquer d'avoir lieu: c'est celui des systèmes que je qualifie d'*orthonomes*.³

Dans la quatrième, je prouve qu'un système différentiel quelconque peut se ramener à la forme orthonome passive.

Dans la cinquième, j'établis diverses propositions relatives à des systèmes non orthonomes.

Enfin, dans l'Appendice qui fait suite au Mémoire, je montre, d'abord, que toutes les formes complètement intégrables étudiées jusqu'à ce jour sont de simples cas particuliers de la forme orthonome passive, et ensuite, que les résultats exposés par M. GOURSAT dans les Comptes Rendus du 2 novembre 1897 se trouvent contenus dans ceux que j'expose à la fin de la cinquième partie.

¹ Voir les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 31 mai 1898.

² Voir les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 13 décembre 1897.

³ Je tiens à faire observer dès maintenant que le mot *orthonome*, tel qu'il se trouve défini dans le présent Mémoire, possède une signification plus large que dans mes travaux antérieurs. Consulter à ce sujet l'Appendice qui fait suite au Mémoire.

PREMIÈRE PARTIE.

Problème préliminaire.

1. En désignant par x, y, z, \dots des variables indépendantes en nombre quelconque, par x_0, y_0, z_0, \dots des valeurs particulières attribuées à ces variables, et par R_x, R_y, R_z, \dots des constantes positives, nous dirons qu'une fonction de x, y, z, \dots est *développable dans le domaine* (R_x, R_y, R_z, \dots) *des valeurs particulières* x_0, y_0, z_0, \dots , si, pour toutes valeurs de x, y, z, \dots satisfaisant aux relations $\text{mod } (x - x_0) < R_x$, $\text{mod } (y - y_0) < R_y$, $\text{mod } (z - z_0) < R_z, \dots$, elle est représentable par la somme d'une certaine série entière en $x - x_0, y - y_0, z - z_0, \dots$. Les quantités R_x, R_y, R_z, \dots se nomment les *rayons* du domaine.

D'après cela, l'expression la plus générale d'une fonction de x, y, z, \dots développable dans quelque domaine des valeurs initiales x_0, y_0, z_0, \dots , s'obtiendra par la considération d'une série entière en $x - x_0, y - y_0, z - z_0, \dots$ dont tous les coefficients sont arbitraires, et soumis, dans leur ensemble, à la seule restriction de la convergence. Un pareil développement, à coefficients *tous* indéterminés, constitue ce que nous appellerons une *fonction schématique* de x, y, z, \dots ; si le nombre des variables indépendantes se réduit à zéro, la fonction schématique dégénère en une *constante schématique*.

On dit qu'un monome

$$A(x - x_0)^{\alpha}(y - y_0)^{\beta}(z - z_0)^{\gamma} \dots,$$

entier par rapport aux différences $x - x_0, y - y_0, z - z_0, \dots$, est *visible* par un monome de même espèce

$$A'(x - x_0)^{\alpha'}(y - y_0)^{\beta'}(z - z_0)^{\gamma'} \dots,$$

si aucune des différences

$$\alpha - \alpha', \beta - \beta', \gamma - \gamma', \dots$$

n'est négative. Il est clair que si un premier monome est divisible par un second, et celui-ci divisible par un troisième, le premier l'est forcément par le troisième: car les relations évidentes

$$\alpha - \alpha'' = (\alpha - \alpha') + (\alpha' - \alpha'')$$

$$\beta - \beta'' = (\beta - \beta') + (\beta' - \beta''),$$

$$\gamma - \gamma'' = (\gamma - \gamma') + (\gamma' - \gamma''),$$

$$\dots \dots \dots$$

ne peuvent contenir dans leurs premiers membres quelque différence négative, que si elles en contiennent quelqu'une dans leurs seconds membres.

Cela posé, considérons un ensemble *limité* E , formé avec des monomes, de coefficient 1, entiers par rapport aux différences $x - x_0, y - y_0, z - z_0, \dots$; si, dans le développement de notre fonction schématique, on supprime tous les termes qui admettent pour diviseur quelqu'un des monomes de cet ensemble, nous dirons que la portion restante du développement est le *résidu* de la *coupure* E , pratiquée dans le développement total. On peut d'ailleurs, sans changer le résidu, négliger dans l'ensemble E les termes que nous nommerons *superflus*, c'est à dire ceux qui admettent pour diviseur quelque autre terme du même ensemble.

2. *Le résidu d'une coupure* E , *pratiquée dans le développement d'une fonction schématique de* x, y, z, \dots , *peut être mis sous la forme*

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} (x - x_0)^{a_n} (y - y_0)^{b_n} (z - z_0)^{c_n} \dots F_{\theta_n},$$

où a_n, b_n, c_n, \dots désignent des entiers positifs ou nuls, θ_n un groupe de variables indépendantes extrait du groupe total x, y, z, \dots , et F_{θ_n} une fonction schématique des seules variables θ_n ; les termes élémentaires provenant du développement de l'expression (2) quand on y remplace les fonctions schématiques

$$(3) \quad F_{\theta_1}, F_{\theta_2}, \dots, F_{\theta_r}$$

par leurs développements respectifs, sont tous dissemblables en $x - x_0, y - y_0, z - z_0, \dots$.

1. *Notre proposition est exacte, si dans l'ensemble* E *ne figure effectivement qu'une seule des différences* $x - x_0, y - y_0, z - z_0, \dots$.

Car, après la suppression des termes superflus, l'ensemble E se compose d'un monome unique tel que $(x - x_0)^\alpha$, et le résidu de la coupure est alors évidemment

$$(4) \quad F_0(y, z, \dots) + (x - x_0)F_1(y, z, \dots) + (x - x_0)^2F_2(y, z, \dots) + \dots \\ + (x - x_0)^{\alpha-1}F_{\alpha-1}(y, z, \dots),$$

où $F_0, F_1, F_2, \dots, F_{\alpha-1}$ désignent α fonctions schématiques des seules variables y, z, \dots ; on a ainsi une expression satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

II. Si notre proposition est exacte dans le cas où l'ensemble E contient effectivement moins de $k + 1$ différences, elle l'est encore dans le cas où il en contient $k + 1$.

Le point à établir est évident si, après la suppression des termes superflus, le nombre des différences figurant effectivement dans l'ensemble donné tombe au dessous de $k + 1$.

Si ce nombre reste égal à $k + 1$, supposons, pour fixer les idées, que $x - x_0$ soit une des $k + 1$ différences dont il s'agit, désignons par α l'exposant maximum dont elle se trouve affectée dans l'ensemble, et partageons ce dernier en plusieurs autres

$$E^0, E^1, \dots, E^{\alpha-1}, E^\alpha,$$

suivant que, dans les divers termes de E , la différence $x - x_0$ figure avec l'un ou l'autre des exposants

$$0, 1, \dots, \alpha - 1, \alpha.$$

En supposant, comme nous le faisons, que l'ensemble E ait été débarrassé de ses termes superflus, les monomes

$$x - x_0, (x - x_0)^2, \dots, (x - x_0)^{\alpha-1}$$

sont absents des ensembles respectifs

$$(5) \quad E^1, E^2, \dots, E^{\alpha-1},$$

sans quoi les termes de E^α admettraient pour diviseur quelque terme des

ensembles (5); quant à l'ensemble E^a , il peut, suivant les cas, contenir ou non le monome $(x - x_0)^a$. Cela étant, nous désignerons par

$$e^1, e^2, \dots, e^{a-1}$$

les ensembles respectivement déduits de (5) en remplaçant par zéro, dans chacun de leurs termes, l'exposant de $x - x_0$, sans changer les exposants des autres différences; et, dans l'hypothèse où E^a ne contiendrait pas le monome $(x - x_0)^a$, nous nommerons e^a l'ensemble déduit de E^a par la même opération. En posant, pour raison de symétrie, $e^0 = E^0$, il est clair que dans la totalité des ensembles

$$e^0, e^1, \dots, e^{a-1}, e^a$$

figurent au plus k différences.

Enfin, décomposons par la pensée le résidu de la coupure E en divers tronçons, comprenant respectivement: le premier, les termes indépendants de $x - x_0$; le second, les termes du premier degré en $x - x_0$; etc.; l'avant-dernier, les termes de degré $\alpha - 1$ en $x - x_0$; et le dernier, tous les termes restants, c'est-à-dire ceux qui sont d'un degré *au moins égal* à α par rapport à cette différence. Le résidu de la coupure peut alors s'écrire

$$(6) \quad T_0(y, z, \dots) + (x - x_0)T_1(y, z, \dots) + \dots \\ + (x - x_0)^{a-1}T_{a-1}(y, z, \dots) + (x - x_0)^a T(x, y, z, \dots),$$

et il s'agit de déterminer les formes respectives des expressions

$$(7) \quad T_0(y, z, \dots), T_1(y, z, \dots), \dots, T_{a-1}(y, z, \dots), T(x, y, z, \dots).$$

Considérons à cet effet les deux monomes

$$(8) \quad (x - x_0)^a (y - y_0)^b (z - z_0)^c \dots,$$

$$(9) \quad (y - y_0)^b (z - z_0)^c \dots,$$

dont le second se déduit du premier en y remplaçant l'exposant a par zéro. Pour que le monome (8) n'admette comme diviseur aucun des termes de l'ensemble E , il faut et il suffit:

si $a = 0$, que le monome (9) ne soit divisible par aucun terme de e^0 ;
 si $a = 1$, que le monome (9) ne soit divisible par aucun terme de $[e^0, e^1]$;
 si $a = 2$, que le monome (9) ne soit divisible par aucun terme de $[e^0, e^1, e^2]$;
 etc.;
 si $a = \alpha - 1$, que le monome (9) ne soit divisible par aucun terme de $[e^0, e^1, e^2, \dots, e^{a-1}]$.

Il suffira donc, pour connaître successivement

$$T_0(y, z, \dots), T_1(y, z, \dots), \dots, T_{a-1}(y, z, \dots),$$

de pratiquer, dans le développement d'une fonction schématique des seules variables y, z, \dots , les coupures respectives

$$[e^0], [e^0, e^1], \dots, [e^0, e^1, \dots, e^{a-1}].$$

Reste à calculer $T(x, y, z, \dots)$. Si l'ensemble E^a contient le monome $(x - x_0)^a$, $T(x, y, z, \dots)$ est identiquement nul. Dans le cas contraire, on observera qu'en supposant $a \geq \alpha$, la condition nécessaire et suffisante pour que le monome (8) ne soit divisible par aucun terme de E , est que le monome

$$(x - x_0)^{a-a}(y - y_0)^b(z - z_0)^c \dots$$

ne soit divisible par aucun terme de

$$(10) \quad [e^0, e^1, \dots, e^{a-1}, e^a];$$

en conséquence, il suffira, pour connaître $T(x, y, z, \dots)$, de pratiquer la coupure (10) dans le développement d'une fonction schématique de toutes les variables x, y, z, \dots .

Ainsi, le calcul des expressions (7) peut s'effectuer par des coupures opérées à l'aide d'ensembles où les différences $x - x_0, y - y_0, z - z_0, \dots$ figurent en nombre au plus égal à k . Un simple coup d'oeil jeté sur la formule (6) nous montre alors que notre théorème, supposé exact dans ce dernier cas, ne cesse pas de l'être quand ces différences figurent en nombre $k + 1$ dans l'ensemble donné.

III. Le simple rapprochement des alinéas I et II suffit à établir l'exactitude de notre énoncé général.

3. Supposons que le résidu d'une coupure E , pratiquée dans le développement d'une fonction schématique de x, y, z, \dots , ait été mis sous la forme (2), définie au numéro précédent; et désignons par ω_n le groupe de variables complémentaire du groupe θ_n , c'est à dire tel, que l'ensemble des deux groupes θ_n, ω_n reproduise une fois et une seule chacune des variables indépendantes x, y, z, \dots . Si, considérant le développement (sans coupure) de notre fonction schématique, on en prend la dérivée d'ordres partiels a_n, b_n, c_n, \dots , et qu'on attribue ensuite aux variables ω_n leurs valeurs initiales, on tombe sur un développement, Φ_{θ_n} , ne dépendant évidemment, comme F_{θ_n} , que des variables θ_n .

Cela étant, les deux développements $F_{\theta_n}, \Phi_{\theta_n}$ convergent dans les mêmes limites, et la connaissance de l'un équivaut à celle de l'autre.

I. Si, sur un développement entier en $x - x_0, y - y_0, z - z_0, \dots$, contenant comme facteur commun dans tous ses termes le monome

$$(11) \quad (x - x_0)^{a_n} (y - y_0)^{b_n} (z - z_0)^{c_n} \dots,$$

on effectue la dérivation d'ordres partiels a_n, b_n, c_n, \dots , il suffit, pour remonter du développement ainsi obtenu au premier, d'effectuer sur lui a_n quadratures relatives à x , b_n relatives à y , c_n relatives à z , etc., en ayant soin que le résultat de chaque quadrature s'annule pour la valeur initiale de la variable qu'elle intéresse.

Cette remarque, que l'on vérifie sans peine pour un terme quelconque du développement donné, s'applique par là même au développement tout entier.

II. Si un terme du développement schématique de notre fonction ne contient pas en facteur le monome (11), la dérivation d'ordres partiels a_n, b_n, c_n, \dots , exécutée sur le terme dont il s'agit, donnera pour résultat zéro. Si un terme du même développement contient en facteur le monome (11), et si, abstraction faite de ce facteur, il dépend de quelqu'une des variables du groupe ω_n , la dérivation d'ordres partiels a_n, b_n, c_n, \dots , puis l'attribution dans le résultat aux variables ω_n de leurs valeurs initiales, donneront encore un résultat nul. Il suffit donc, pour effectuer l'opération indiquée par l'énoncé, de considérer, dans le développement

schématique de notre fonction, l'ensemble des termes qui contiennent en facteur le monome (11), et qui, abstraction faite de ce facteur, dépendent des seules variables θ_n .

Or, les termes dont il s'agit sont précisément ceux que contient l'expression

$$(x - x_0)^{a_n}(y - y_0)^{b_n}(z - z_0)^{c_n} \dots F_{\theta_n};$$

car, s'il en existait d'autres dans la portion (2) du développement, cette dernière contiendrait, contrairement à ce qui a lieu, plusieurs termes schématiques semblables; et, s'il en existait d'autres dans la portion restante, les deux portions contiendraient des termes schématiques respectivement semblables, ce qui est absurde. Il suffit donc, pour passer de F_{θ_n} à Φ_{θ_n} , de multiplier F_{θ_n} par le monome (11), et d'exécuter sur le résultat la dérivation d'ordres partiels a_n, b_n, c_n, \dots . Inversement, pour passer de Φ_{θ_n} à F_{θ_n} , on exécutera, sur Φ_{θ_n} , a_n quadratures relatives à x , b_n relatives à y , c_n relatives à z , etc., en ayant soin que le résultat de chaque quadrature s'annule pour la valeur initiale de la variable qu'elle intéresse (I), puis on supprimera, dans le développement ainsi obtenu, le facteur commun (11).

Dans le cas où le monome (11) ne contient *effectivement* aucune des variables θ_n , il est clair que les deux fonctions $F_{\theta_n}, \Phi_{\theta_n}$ ne diffèrent que par un facteur numérique, et que l'on a

$$\Phi_{\theta_n} = 1.2\dots a_n \times 1.2\dots b_n \times 1.2\dots c_n \times \dots \times F_{\theta_n}.$$

4. Supposons que, dans une question quelconque, on ait à considérer une fonction inconnue u des variables x, y, z, \dots , et le développement de cette fonction à partir des valeurs particulières x_0, y_0, z_0, \dots ; supposons en outre que, parmi les données de la question, doive figurer le résidu d'une certaine coupure, pratiquée dans le développement dont il s'agit. Pour formuler une pareille donnée, on commencera par mettre ce résidu sous la forme (2), en y laissant provisoirement tous les coefficients indéterminés; cela fait:

Où bien on se donnera les g fonctions (3) qui figurent dans l'expression (2);

Où bien, faisant successivement $n = 1, 2, \dots, g$, on se donnera la

fonction des variables θ_n à laquelle se réduit $\frac{\partial^{a_n+b_n+c_n+\dots}\eta}{\partial x^{a_n}\partial y^{b_n}\partial z^{c_n}\dots}$ par l'attribution aux variables ω_n de leurs valeurs initiales.

Moyennant le recours éventuel à des quadratures, cette seconde donnée est, comme nous l'avons vu (3), entièrement équivalente à la première.

Par exemple, si l'ensemble E se réduit au terme unique $(x-x_0)^a$, la donnée, dans une question quelconque, du résidu de la coupure E , pratiquée dans le développement de u , pourra se formuler: soit par celle des α fonctions

$$F_0(y, z, \dots), F_1(y, z, \dots), \dots, F_{a-1}(y, z, \dots),$$

qui figurent dans l'expression (4); soit par celle des α fonctions de y, z, \dots auxquelles se réduisent respectivement

$$u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{a-1}u}{\partial x^{a-1}}$$

pour $x = x_0$.

5. Eclaircissons ce qui précède par d'autres exemples.

I. Considérons une fonction schématique u des variables x, y, z, \dots , et supposons que l'ensemble E , à l'aide duquel on veut pratiquer une coupure dans le développement de cette fonction, se compose du terme unique $(x-x_0)^\alpha(y-y_0)^\beta$, où α et β sont l'un et l'autre supérieurs à zéro. En adoptant les mêmes notations qu'à l'alinéa II du n° 2, on voit que les ensembles E^0, E^1, \dots, E^{a-1} n'existent pas, et que l'ensemble E^a se réduit à $(x-x_0)^\alpha(y-y_0)^\beta$; que, par suite, les ensembles e^0, e^1, \dots, e^{a-1} n'existent pas, et que l'ensemble e^a se réduit à $(y-y_0)^\beta$. Les expressions

$$T_0(y, z, \dots), T_1(y, z, \dots), \dots, T_{a-1}(y, z, \dots)$$

se réduisent donc à de simples fonctions schématiques des seules variables y, z, \dots . Quant à l'expression $T(x, y, z, \dots)$, elle s'obtiendra en pratiquant la coupure $(y-y_0)^\beta$ dans le développement d'une fonction schématique de toutes les variables x, y, z, \dots . Il vient ainsi (2, I) pour l'expression (6):

$$(15) \quad F_0(y, z, \dots) + (x - x_0)F_1(y, z, \dots) + \dots + (x - x_0)^{\alpha-1}F_{\alpha-1}(y, z, \dots) \\ + (x - x_0)^\alpha [H_0(x, z, \dots) + (y - y_0)H_1(x, z, \dots) + \dots \\ + (y - y_0)^{\beta-1}H_{\beta-1}(x, z, \dots)],$$

où $F_0, F_1, \dots, F_{\alpha-1}$ désignent des fonctions schématiques de y, z, \dots , et $H_0, H_1, \dots, H_{\beta-1}$ des fonctions schématiques de x, z, \dots .

En conséquence, la donnée, dans une question quelconque, de la portion du développement de u qui résulte de la coupure E , pourra se formuler:

soit par celle des $\alpha + \beta$ fonctions

$$F_0(y, z, \dots), F_1(y, z, \dots), \dots, F_{\alpha-1}(y, z, \dots), \\ H_0(x, z, \dots), H_1(x, z, \dots), \dots, H_{\beta-1}(x, z, \dots)$$

qui figurent dans l'expression (15);

soit par celle: 1° des α fonctions de y, z, \dots auxquelles se réduisent respectivement

$$u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{\alpha-1} u}{\partial x^{\alpha-1}}$$

pour $x = x_0$; 2° des β fonctions de x, z, \dots auxquelles se réduisent respectivement

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial^{\alpha+1} u}{\partial x^\alpha \partial y}, \dots, \frac{\partial^{\alpha+\beta-1} u}{\partial x^\alpha \partial y^{\beta-1}}$$

pour $y = y_0$.

Il est clair qu'en permutant, dans l'opération précédente, les rôles respectifs des variables x et y , on arrivera, pour la portion considérée du développement de u , à la forme

$$(16) \quad P_0(x, z, \dots) + (y - y_0)P_1(x, z, \dots) + \dots + (y - y_0)^{\beta-1}P_{\beta-1}(x, z, \dots) \\ + (y - y_0)^\beta [Q_0(y, z, \dots) + (x - x_0)Q_1(y, z, \dots) + \dots \\ + (x - x_0)^{\alpha-1}Q_{\alpha-1}(y, z, \dots)].$$

Dans une question quelconque, la donnée de cette portion de développement pourra donc encore se formuler:

soit par celle des $\alpha + \beta$ fonctions

$$P_0(x, z, \dots), P_1(x, z, \dots), \dots, P_{\beta-1}(x, z, \dots), \\ Q_0(y, z, \dots), Q_1(y, z, \dots), \dots, Q_{\alpha-1}(y, z, \dots)$$

qui figurent dans l'expression (16);

soit par celle: 1° des β fonctions de x, z, \dots auxquelles se réduisent respectivement

$$u, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^{\beta-1} u}{\partial y^{\beta-1}}$$

pour $y = y_0$; 2° des α fonctions de y, z, \dots auxquelles se réduisent respectivement

$$\frac{\partial^{\beta} u}{\partial y^{\beta}}, \frac{\partial^{\beta+1} u}{\partial y^{\beta} \partial x}, \dots, \frac{\partial^{\beta+\alpha-1} u}{\partial y^{\beta} \partial x^{\alpha-1}}$$

pour $x = x_0$.

II. Considérons une fonction schématique des trois variables x, y, z , et un ensemble E composé du terme unique $(x - x_0)(y - y_0)(z - z_0)$. En adoptant les mêmes notations qu'à l'alinéa II du n° 2, on voit que $\alpha = 1$, que l'ensemble E^0 n'existe pas, et que l'ensemble E^{α} ou E^1 se réduit à $(x - x_0)(y - y_0)(z - z_0)$; que, par suite, l'ensemble e^{α} ou e^1 se réduit à $(y - y_0)(z - z_0)$. Dans la formule

$$(17) \quad T_0(y, z) + (x - x_0)T(x, y, z),$$

l'expression $T_0(y, z)$ se réduit donc à une fonction schématique des seules variables y, z , et l'expression $T(x, y, z)$ s'obtiendra en pratiquant la coupure $(y - y_0)(z - z_0)$ dans le développement d'une fonction schématique des trois variables x, y, z . On a ainsi, conformément à l'exemple I,

$$T(x, y, z) = H(x, z) + (y - y_0)P(x, y),$$

et la formule (17) devient alors

$$(18) \quad F(y, z) + (x - x_0)H(x, z) + (x - x_0)(y - y_0)P(x, y),$$

où $F(y, z)$, $H(x, z)$, $P(x, y)$ désignent trois fonctions schématiques.

En conséquence, la donnée, dans une question quelconque, de la portion du développement de u obtenue comme résidu de la coupure E , pourra se formuler:

soit par celle des trois fonctions $F(y, z)$, $H(x, z)$, $P(x, y)$, qui figurent dans l'expression (18);

soit par celle: 1° de la fonction de y et z à laquelle se réduit u pour $x = x_0$; 2° de la fonction de x et z à laquelle se réduit $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour $y = y_0$; 3° de la fonction de x et y à laquelle se réduit $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ pour $z = z_0$.

En permutant d'une façon quelconque, dans l'opération précédente, les rôles respectifs des trois variables x, y, z , on arrivera, pour la portion considérée du développement schématique, à une forme se déduisant de (18) par la permutation dont il s'agit. Comme il existe six permutations de trois objets, on obtiendra en tout six formes, de chacune desquelles on déduira, comme ci-dessus, deux manières de formuler la donnée de cette portion de développement.

III. Si l'ensemble E se compose uniquement de monomes du premier degré, par exemple de $x - x_0$ et $y - y_0$, il est clair que le résidu de la coupure E est une fonction schématique de toutes les variables autres que x et y , et que la donnée, dans une question quelconque, de cette portion du développement de u se formulera par celle de la fonction à laquelle doit se réduire u pour $x - x_0 = y - y_0 = 0$.

IV. Considérons une fonction schématique des trois variables x, y, z , et supposons que l'ensemble E se compose des deux termes

$$(x - x_0)(y - y_0), (x - x_0)(z - z_0).$$

En adoptant les mêmes notations qu'à l'alinéa II du n° 2, on voit que l'ensemble E^0 n'existe pas, et que l'ensemble E^a ou E^1 se compose des deux termes ci-dessus; que, par suite, l'ensemble e^a ou e^1 se compose des deux termes

$$(19) \quad y - y_0, z - z_0.$$

Dans la formule (17), l'expression $T_0(y, z)$ se réduit donc à une fonction schématique des seules variables y et z , et l'expression $T(x, y, z)$ s'obtient en pratiquant la coupure (19) dans le développement d'une fonction schématique de x, y, z ; conformément à l'exemple précédent, $T(x, y, z)$ est alors une fonction schématique de la variable x , et l'expression (17) prend la forme

$$(20) \quad F(y, z) + (x - x_0)H(x)$$

où $F(y, z)$, $H(x)$ désignent deux fonctions schématiques.

En conséquence, la donnée, dans une question quelconque, de la portion du développement de u qui résulte de la coupure E , pourra se formuler:

soit par celle des deux fonctions $F(y, z)$, $H(x)$ qui figurent dans l'expression (20);

soit par celle: 1° de la fonction de y et z à laquelle se réduit u pour $x - x_0 = 0$; 2° de la fonction de x à laquelle se réduit $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour $y - y_0 = z - z_0 = 0$.

V. Considérons une fonction schématique des trois variables x, y, z , et supposons que l'ensemble E se compose des trois termes

$$x - x_0, (y - y_0)(z - z_0), (y - y_0)^3.$$

L'entier α est ici égal à 1, l'ensemble E^0 se compose des deux termes

$$(21) \quad (y - y_0)(z - z_0), (y - y_0)^3,$$

et l'ensemble E^1 du terme unique $x - x_0$; l'expression $T(x, y, z)$, qui figure dans la formule (17), est donc identiquement nulle, et l'expression $T_0(y, z)$ s'obtient en pratiquant la coupure (21) dans le développement d'une fonction schématique des seules variables y et z . En ordonnant l'ensemble (21) par rapport aux puissances croissantes de $y - y_0$, et appliquant la méthode exposée au n° 2, on voit immédiatement: 1° que l'expression $T_0(y, z)$ est de la forme

$$S_0(z) + (y - y_0)S_1(z) + (y - y_0)^2S_2(z) + (y - y_0)^3S(y, z);$$

2° que $S(y, z)$ est identiquement nul; 3° que $S_0(z)$ est une fonction schématique de z ; 4° que $S_1(z)$ et $S_2(z)$ s'obtiennent en pratiquant la coupure $z - z_0$ dans le développement d'une fonction schématique de z , et se réduisent par conséquent à des constantes schématiques.

En définitive, on obtient, pour la portion du développement schématique résultant de la coupure E , l'expression

$$(22) \quad F(z) + A(y - y_0) + B(y - y_0)^2,$$

où A, B désignent deux constantes schématiques, et $F(z)$ une fonction schématique.

Cela étant, la donnée, dans une question quelconque, de la portion du développement de u provenant de la coupure dont il s'agit, pourra se formuler:

soit par celle des deux constantes A, B et de la fonction $F(z)$, qui figurent dans l'expression (22);

soit par celle: 1° de la fonction de z à laquelle se réduit u pour $x - x_0 = y - y_0 = 0$; 2° des valeurs numériques que prennent respectivement $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ pour $x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0$.

VI. Considérons une fonction schématique des trois variables x, y, z , et supposons que l'ensemble E se compose des quatre termes

$$(x - x_0)^2(z - z_0)^2, (x - x_0)^2(y - y_0), (y - y_0)(z - z_0), (y - y_0)^2.$$

En ordonnant l'ensemble E par rapport aux puissances croissantes de $y - y_0$, on obtient les trois ensembles

$$(x - x_0)^2(z - z_0)^2; [(x - x_0)^2(y - y_0), (y - y_0)(z - z_0)]; (y - y_0)^2.$$

La portion du développement schématique provenant de la coupure E est donc de la forme

$$T_0(x, z) + (y - y_0)T_1(x, z) + (y - y_0)^2T(x, y, z),$$

et l'on voit, par l'application de notre méthode: 1° que $T(x, y, z)$ est identiquement nul; 2° que $T_0(x, z)$ s'obtient en pratiquant la coupure $(x - x_0)^2(z - z_0)^2$ dans le développement d'une fonction schématique des seules variables x et z ; 3° que $T_1(x, z)$ s'obtient en pratiquant la coupure

$$(x - x_0)^2(z - z_0)^2, (x - x_0)^2, z - z_0,$$

ou, ce qui revient au même, la coupure

$$(x - x_0)^2, z - z_0,$$

dans le développement d'une fonction schématique des seules variables x et z .

En calculant, d'après cela, les expressions $T_0(x, z)$, $T_1(x, z)$, on trouvera: 1° qu'elles ont respectivement les formes

$$\begin{aligned} T_0(x, z) &= S_0(z) + (x - x_0)S_1(z) + (x - x_0)^2 S(x, z), \\ T_1(x, z) &= U_0(x) + (z - z_0)U(x, z); \end{aligned}$$

2° que $U(x, z)$ est identiquement nul, que $S(x, z)$ s'obtient en pratiquant la coupure $(z - z_0)^2$ dans le développement d'une fonction schématique de x et z , que $S_0(z)$ et $S_1(z)$ sont des fonctions schématiques de z , et que $U_0(x)$ s'obtient en pratiquant la coupure $(x - x_0)^2$ dans le développement d'une fonction schématique de x . Il vient ainsi:

$$\begin{aligned} (23) \quad T_0(x, z) &= F_0(z) + (x - x_0)F_1(z) + (x - x_0)^2[H_0(x) + (z - z_0)H_1(x)], \\ T_1(x, z) &= A + B(x - x_0), \end{aligned}$$

où A, B désignent des constantes schématiques, et $F_0(z)$, $F_1(z)$, $H_0(x)$, $H_1(x)$ des fonctions schématiques; on en déduit, pour la portion de développement cherchée,

$$\begin{aligned} (24) \quad F_0(z) + (x - x_0)F_1(z) + (x - x_0)^2 H_0(x) + (x - x_0)^2 (z - z_0)H_1(x) \\ + A(y - y_0) + B(x - x_0)(y - y_0). \end{aligned}$$

En conséquence, la donnée, dans une question quelconque, de la portion du développement de u provenant de la coupure E , pourra se formuler:

soit par celle des deux constantes A, B et des quatre fonctions $F_0(z)$, $F_1(z)$, $H_0(x)$, $H_1(x)$, qui figurent dans l'expression (24);

soit par celle: 1° des deux fonctions de z auxquelles se réduisent respectivement u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour $x - x_0 = y - y_0 = 0$; 2° des deux fonctions de

x auxquelles se réduisent respectivement $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z}$ pour $y - y_0 = z - z_0 = 0$;

3° des deux valeurs numériques que prennent respectivement $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ pour $x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0$.

Le calcul de l'expression $T_0(x, z)$ s'effectue, comme nous venons de le voir, en pratiquant la coupure $(x - x_0)^2 (z - z_0)^2$ dans le développement d'une fonction schématique de x et z , et l'on tombe ainsi sur l'ex-

pression (23). Or, il est clair qu'en permutant, dans cette opération, les rôles respectifs des variables x et z , on obtiendra

$$T_0(x, z) = P_0(x) + (z - z_0)P_1(x) + (z - z_0)^2[Q_0(z) + (x - x_0)Q_1(z)].$$

La portion de développement schématique provenant de la coupure E peut donc aussi se mettre sous la forme

$$(25) \quad P_0(x) + (z - z_0)P_1(x) + (z - z_0)^2Q_0(z) + (z - z_0)^2(x - x_0)Q_1(z) \\ + A(y - y_0) + B(x - x_0)(y - y_0),$$

où A, B désignent deux constantes schématiques et $P_0(x), P_1(x), Q_0(z), Q_1(z)$ quatre fonctions schématiques; et, en conséquence, la donnée, dans une question quelconque, de la portion du développement de u provenant de la coupure dont il s'agit, pourra encore se formuler:

soit par celle des deux constantes A, B et des quatre fonctions $P_0(x), P_1(x), Q_0(z), Q_1(z)$, qui figurent dans l'expression (25);

soit par celle: 1° des deux fonctions de x auxquelles se réduisent respectivement u et $\frac{\partial u}{\partial z}$ pour $y - y_0 = z - z_0 = 0$; 2° des deux fonctions de z auxquelles se réduisent respectivement $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ et $\frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial x}$ pour $x - x_0 = y - y_0 = 0$; 3° des deux valeurs numériques que prennent respectivement $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ pour $x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0$.

5'. Soient u, v, \dots diverses fonctions schématiques (en nombre limité) des variables x, y, z, \dots . Considérant un ensemble *limité* formé avec des dérivées de u, v, \dots , convenons de dire qu'une dérivée quelconque de l'une des fonctions u, v, \dots est *principale* relativement à cet ensemble, si elle coïncide avec quelqu'un des termes de l'ensemble ou quelqu'une de leurs dérivées; convenons de dire, dans le cas contraire, qu'elle est *paramétrique* par rapport à l'ensemble.

Cela posé, si, dans les développements respectifs de u, v, \dots , on considère exclusivement les termes qui, aux facteurs numériques connus près, ont pour coefficients les valeurs initiales de ces fonctions et de leurs dérivées paramétriques de tous ordres, il est facile de voir que ces portions de développements peuvent s'obtenir à l'aide de coupures. Par exemple,

si les dérivées de u figurant dans l'ensemble donné ont pour ordres partiels respectifs, relativement à x, y, z, \dots ,

$$\alpha', \beta', \gamma', \dots,$$

$$\alpha'', \beta'', \gamma'', \dots,$$

$$\alpha''', \beta''', \gamma''', \dots,$$

$$\dots$$

il suffira, pour obtenir la portion considérée du développement de u , de pratiquer dans son développement total la coupure

$$\left\{ \begin{array}{l} (x - x_0)^{\alpha'} (y - y_0)^{\beta'} (z - z_0)^{\gamma'} \dots, \\ (x - x_0)^{\alpha''} (y - y_0)^{\beta''} (z - z_0)^{\gamma''} \dots, \\ (x - x_0)^{\alpha'''} (y - y_0)^{\beta'''} (z - z_0)^{\gamma'''} \dots, \\ \dots \end{array} \right.$$

On résout ainsi, de la manière la plus simple, un problème qui se présente sans cesse dans l'étude des systèmes différentiels.

DEUXIÈME PARTIE.

Systèmes orthoïques; conditions de passivité; divergence éventuelle des développements des intégrales hypothétiques.

6. Soient

$$x, y, \dots,$$

$$u, v, \dots,$$

des notations (en nombre limité) désignant, les premières diverses variables indépendantes, les autres diverses fonctions de ces variables. A chacune des quantités

$$x, y, \dots, u, v, \dots$$

faisons correspondre p entiers, positifs, nuls ou négatifs, que nous nommons respectivement *cote première*, *cote seconde*, ..., *cote $p^{\text{ième}}$* de cette quantité, les entiers dont il s'agit étant assujettis à la seule restriction, que *la cote première de toute variable indépendante soit positive et au moins égale à 1*. Considérons ensuite une dérivée quelconque de l'une des fonctions u, v, \dots , et nommons *cote $q^{\text{ième}}$* ($q = 1, 2, \dots, p$) de la dérivée en question l'entier obtenu en ajoutant à la cote $q^{\text{ième}}$ de la fonction les cotes $q^{\text{ièmes}}$ de toutes les variables de différentiation, distinctes ou non. Désignons enfin par ∂, ∂' deux quantités appartenant à l'ensemble que forment les fonctions u, v, \dots et leurs dérivées de tous ordres, par

$$c_1, c_2, \dots, c_p,$$

$$c'_1, c'_2, \dots, c'_j$$

les cotes respectives de ces deux quantités, et convenons de dire que ∂' est *normale* ou *anormale* par rapport à ∂ , suivant que les différences

$$(26) \quad c_1 - c'_1, c_2 - c'_2, \dots, c_p - c'_p$$

satisfont ou non à la double condition: 1° que ces différences ne soient

pas toutes nulles; 2° que la première d'entre elles non égale à zéro soit positive.

Cela étant:

1° *Suivant que la quantité δ' est normale ou anormale vis à vis de la quantité δ , la dérivée $\frac{\partial^{a+b+\dots}\delta'}{\partial x^a \partial y^b \dots}$ possède l'une ou l'autre propriété vis à vis de la dérivée $\frac{\partial^{a+b+\dots}\delta}{\partial x^a \partial y^b \dots}$.*

Car, en désignant par

$$g_1, g_2, \dots, g_p,$$

$$h_1, h_2, \dots, h_l,$$

$$\dots\dots\dots$$

les cotes respectives de x, y, \dots , les différences (26) sont respectivement égales aux différences

$$(c_1 + ag_1 + bh_1 + \dots) - (c'_1 + ag_1 + bh_1 + \dots),$$

$$(c_2 + ag_2 + bh_2 + \dots) - (c'_2 + ag_2 + bh_2 + \dots),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(c_p + ag_p + bh_p + \dots) - (c'_p + ag_p + bh_p + \dots).$$

2° *Si la quantité δ'' est normale vis à vis de la quantité δ' , et celle-ci normale vis à vis de la quantité δ , la première, δ'' , jouit de la même propriété vis à vis de la dernière, δ .*

Si l'on désigne en effet par c'_1, c'_2, \dots, c'_p les cotes de δ'' , et si l'on considère les différences

$$c_1 - c'_1, c_2 - c'_2, \dots, c_p - c'_p,$$

$$c'_1 - c''_1, c'_2 - c''_2, \dots, c'_p - c''_p,$$

$$c_1 - c''_1, c_2 - c''_2, \dots, c_p - c''_p,$$

rangées, comme nous venons de les écrire, en un tableau rectangulaire, il résulte de nos hypothèses que, dans chacune des deux premières lignes horizontales du tableau, les différences ne sont pas toutes nulles, et que la première non égale à zéro y est positive; comme d'ailleurs le dernier

terme de chaque colonne verticale est égal à la somme des deux termes placés au dessus de lui, la dernière ligne horizontale jouit évidemment de la même propriété que les deux premières.

7. Les quantités x, y, \dots, u, v, \dots étant affectées chacune de p cotes, conformément aux indications du n° 6, tout ensemble illimité formé avec des dérivées de u, v, \dots se partage, suivant une loi déterminée, en ensembles limités successifs satisfaisant à la condition suivante:

Si l'on considère deux dérivées appartenant à l'ensemble illimité donné, l'une d'elles est normale ou anormale relativement à l'autre, suivant que l'ensemble partiel où elle figure précède ou non celui de cette autre.

Observons tout d'abord qu'en désignant par φ la cote première minima des diverses fonctions u, v, \dots , toute dérivée d'ordre n de ces dernières aura une cote première au moins égale à $n + \varphi$, puisque la cote première de toute variable indépendante est au moins égale à 1. Il résulte de là: 1° que la cote première d'une dérivée d'ordre quelconque ne tombe jamais au dessous de $1 + \varphi$; 2° qu'en désignant par c un entier déterminé quelconque, au moins égal à $1 + \varphi$, le nombre des dérivées possédant une cote première égale à c est essentiellement limité.

Cela posé, on partagera d'abord les dérivées de l'ensemble illimité en ensembles successifs d'après leurs cotes premières croissantes; chaque ensemble ainsi obtenu sera, toutes les fois qu'il y aura lieu, partagé en ensembles partiels successifs d'après les cotes secondes croissantes des dérivées qui le composent; puis, chacun des ensembles résultants en ensembles partiels successifs d'après les cotes troisièmes croissantes de ses termes; et ainsi jusqu'à épuisement des p cotes. L'ensemble illimité se trouvera finalement partagé en ensembles limités se succédant suivant une certaine loi, et l'on voit immédiatement que, par rapport à une dérivée quelconque figurant dans l'ensemble partiel de rang N , les dérivées figurant dans les ensembles partiels de rangs $1, 2, \dots, N-1$ sont toutes normales, tandis que les dérivées figurant dans les ensembles partiels de rangs $N, N+1, \dots$ sont toutes anormales.

8. Supposons actuellement que l'on se donne un ensemble limité formé avec des dérivées de u, v, \dots ; puis, considérant, parmi les dérivées de u, v, \dots , celles qui sont principales relativement à cet ensemble (5'), partageons-les,

conformément aux indications du n° 7, en ensembles limités successifs, et convenons de dire qu'une dérivée principale est de *classe* $1, 2, 3, \dots$, suivant qu'elle appartient au premier, au second, au troisième, ... des ensembles successifs dont il s'agit.

Cela posé, et en vertu du théorème précédent (7), *toute dérivée principale est normale ou anormale relativement à une autre, suivant qu'elle est ou non de classe inférieure à cette autre.*

On observera que *toute dérivée de quelque dérivée principale est de classe supérieure à cette dernière*: car, la cote première de toute variable indépendante étant au moins égale à 1, toute différentiation exécutée sur quelqu'une des fonctions u, v, \dots ou de leurs dérivées a pour effet d'augmenter la cote première.

9. Considérons maintenant un système différentiel où se trouvent engagées les fonctions inconnues u, v, \dots des variables indépendantes x, y, \dots , et, conformément aux indications du n° 6, attribuons p cotes à chacune de ces diverses quantités. Le système différentiel proposé sera dit *orthoïque*, si, moyennant un choix convenable du nombre p et des cotes attribuées à x, y, \dots, u, v, \dots , il remplit à la fois les deux conditions suivantes:

1° Le système en question se trouve résolu par rapport à certaines dérivées, qui ne figurent, non plus que leurs propres dérivées, dans aucun des seconds membres, et ces derniers, si l'on y considère pour un instant x, y, \dots, u, v, \dots , et les diverses dérivées de u, v, \dots qui y figurent, comme autant de variables indépendantes distinctes, sont tous développables dans un même domaine.

2° Chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues ou dérivées) qui soient normales par rapport au premier membre correspondant.

10. Etant donné un système orthoïque, nous dirons que les fonctions

$$U(x, y, \dots), V(x, y, \dots), \dots$$

constituent pour lui un groupe d'*intégrales ordinaires*, si elles remplissent à la fois les deux conditions suivantes: 1° les fonctions $U(x, y, \dots), V(x, y, \dots), \dots$ sont développables dans quelque domaine, et les valeurs

qu'elles y acquièrent, prises conjointement avec celles de leurs dérivées et des variables indépendantes, restent toujours intérieures à un domaine où les divers seconds membres soient à la fois développables; 2° la substitution de $U(x, y, \dots)$, $V(x, y, \dots)$, ... à u, v, \dots , opérée entre les mêmes limites, transforme en identités les diverses équations du système.

La substitution d'intégrales ordinaires connues dans les équations du système en transforme tous les seconds membres en des fonctions composées des variables, des intégrales et de certaines de leurs dérivées. D'après la définition même des intégrales ordinaires, et entre les limites assignées par cette définition, les règles établies pour les fonctions composées sont applicables aux seconds membres dont il s'agit; d'ailleurs, les deux membres de chaque équation étant identiquement égaux après cette substitution, leurs dérivées semblables le sont aussi, et l'on peut, en conséquence, différentier indéfiniment les relations du système. Les relations ainsi obtenues peuvent ensuite être combinées de mille manières entre elles et avec les proposées, puis les résultats de ces combinaisons être différenciés à leur tour, et fournir les éléments de nouvelles combinaisons, qui seront elles-mêmes différenciées; et ainsi de suite indéfiniment. On peut, en un mot, déduire du système donné une foule de relations dont chacune est identiquement satisfaite par la substitution à u, v, \dots d'un groupe quelconque d'intégrales ordinaires.

Parmi les relations auxquelles peuvent conduire des calculs de cette nature, nous distinguerons spécialement celles qui, ayant pour premier membre une dérivée de quelque fonction inconnue, ne contiennent dans leur second membre aucune quantité anormale relativement au premier; et nous dirons, pour abrégé, qu'une semblable relation est *normale*, comme aussi l'expression fournie par elle pour la dérivée qui figure dans son premier membre.

Cette définition des relations et des expressions *normales* est d'ailleurs applicable dans tout système différentiel où chacune des variables et des inconnues a été affectée de cotes, conformément aux indications du n° 6.

11. Si sur une relation normale on exécute des différenciations quelconques, en remplaçant, avant ou après quelques-unes de ces différenciations, telles ou telles des dérivées qui figurent dans le second membre par des expressions normales des dérivées en question, on tombe encore sur une relation normale.

I. *Si sur une relation normale on exécute des différentiations quelconques, on tombe sur une relation de même nature.*

Soit en effet

$$(27) \quad \partial = f(x, y, \dots, \partial', \dots)$$

une relation normale, dans laquelle ∂', \dots désignent, conformément à nos définitions, des quantités toutes normales par rapport à ∂ . La relation déduite de (27) par une différentiation relative à x a pour premier membre $\frac{\partial \partial}{\partial x}$, et son second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que les quantités ∂', \dots et leurs dérivées premières par rapport à x . Or, les quantités ∂', \dots étant normales vis à vis de ∂ , les quantités $\frac{\partial \partial'}{\partial x}, \dots$ jouissent de la même propriété vis à vis de $\frac{\partial \partial}{\partial x}$ (6); d'un autre côté, si l'on désigne par c_1, c'_1, \dots, g_1 les cotes premières respectives de $\partial, \partial', \dots, x$, cette même hypothèse entraîne les relations

$$c_1 - c'_1 \geq 0, \dots,$$

d'où l'on déduit, à cause de $g_1 > 0$,

$$(c_1 + g_1) - c'_1 > 0, \dots,$$

et dès lors les quantités ∂', \dots sont toutes normales vis à vis de $\frac{\partial \partial}{\partial x}$.

Ainsi, la condition formulée dans la définition d'une relation normale ne cesse pas d'être satisfaite après une première différentiation exécutée sur la relation donnée. En vertu du même raisonnement, appliqué à la relation résultante, elle ne cesse pas de l'être après une deuxième, et ainsi de suite, quel que soit le nombre des différentiations.

II. *Si dans le second membre d'une relation normale on remplace telles ou telles dérivées par certaines de leurs expressions normales, on tombe encore sur une relation normale.*

Désignons par ∂ le premier membre de la relation donnée, et par ∂' l'une des dérivées figurant au second membre; puis, considérant une expression normale de ∂' , nommons ∂'' l'une des inconnues ou dérivées

qui y figurent. La quantité δ'' étant normale vis à vis de δ' , et δ' normale vis à vis de δ , la quantité δ'' jouit de la même propriété vis à vis de δ (6): en conséquence, les substitutions opérées dans le second membre de la relation donnée ne peuvent altérer la nature normale de cette dernière.

III. Le simple rapprochement des alinéas I et II prouve dans toute sa généralité l'exactitude de notre énoncé.

12. Relativement à un système différentiel ayant pour premiers membres certaines dérivées des fonctions inconnues, nous distinguerons les dérivées de tous ordres de ces inconnues en *principales* et *paramétriques*, suivant qu'elles seront principales ou paramétriques par rapport à l'ensemble que forment les premiers membres (5'). Nous nommerons en outre *relations primitives* toutes celles qui font partie du système ou qui s'en déduisent par de simples différentiations. D'après cela toute dérivée principale figure au moins une fois (souvent même plusieurs) dans les premiers membres des relations primitives, tandis que les dérivées paramétriques n'y figurent jamais: les expressions fournies par les relations primitives pour les dérivées principales seront, elles aussi, qualifiées de *primitives*.

Enfin, si nous considérons un groupe d'intégrales du système, et que nous supposons ces fonctions développables dans quelque domaine des valeurs initiales x_0, y_0, \dots , choisies pour x, y, \dots , nous nommerons, pour abrégé, *détermination initiale* de l'une d'entre elles, la portion de son développement formée par l'ensemble des termes qui, aux facteurs numériques connus près, ont pour coefficients les valeurs initiales de la fonction et de ses dérivées paramétriques de tous ordres: conformément aux explications du n° 5', cette portion provient donc d'une certaine *coupure*, pratiquée dans le développement total de la fonction.

13. Etant donné un système orthoïque, chacune des relations qui le composent est, par hypothèse, normale, et, en vertu du n° 11, toute autre relation primitive jouit de la même propriété.

De cette remarque découle immédiatement la proposition suivante:

Quand un système orthoïque possède quelque groupe d'intégrales ordinaires, les développements de ces intégrales par la formule de Taylor à partir des

valeurs particulières x_0, y_0, \dots peuvent être reconstruits, dès que l'on connaît seulement leurs valeurs initiales et celles de leurs dérivées paramétriques de tous ordres. [On suppose, bien entendu, que les valeurs x_0, y_0, \dots n'excèdent pas les limites indiquées par la définition même des intégrales ordinaires (10)].

Effectivement, si l'on donne aux variables x, y, \dots leurs valeurs initiales x_0, y_0, \dots , les intégrales dont il s'agit et leurs dérivées de tous ordres prennent, elles aussi, leurs valeurs initiales, et, comme celles des intégrales et de leurs dérivées paramétriques sont supposées connues, chaque relation primitive ne contient plus dans son second membre d'autres quantités inconnues que les valeurs initiales des dérivées principales de classes inférieures à son premier membre. Cela étant, et les relations primitives étant partagées en groupes successifs d'après les classes croissantes de leurs premiers membres, les relations du premier groupe fourniront tout d'abord les valeurs initiales des dérivées principales de première classe; ces dernières une fois connues, les relations primitives du deuxième groupe feront connaître les valeurs initiales des dérivées principales de deuxième classe; et ainsi de suite indéfiniment.

On connaîtra donc ainsi les valeurs initiales des intégrales, et de leurs dérivées, paramétriques et principales, de tous ordres; or, ces valeurs initiales ne sont autres, aux facteurs numériques connus près, que les coefficients des développements cherchés.

En vertu d'une définition donnée au n° 12, le théorème ci-dessus peut encore s'exprimer comme il suit:

Quand un système orthoïque possède quelque groupe d'intégrales ordinaires, leurs développements par la formule de Taylor peuvent être reconstruits, dès que l'on connaît seulement leurs déterminations initiales.

Nous savons d'ailleurs (12), (4) que la connaissance de ces déterminations initiales revient à celle de certaines fonctions ou constantes, en nombre essentiellement fini.

14. *Inversement, cherchons si, dans un système orthoïque, il existe quelque groupe d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données. (On suppose, bien entendu, que les valeurs initiales des variables, prises conjointement avec celles des intégrales hypothétiques et des dé-*

rivées paramétriques figurant dans les seconds membres du système donné, sont intérieures à un domaine où ces derniers soient développables.)

I. *Pour que de pareilles intégrales existent, il est tout d'abord nécessaire que les relations primitives s'accordent à fournir, pour chacune de leurs dérivées principales, une seule et même valeur initiale.*

Cette concordance a lieu d'elle-même pour les dérivées principales de première classe. Une pareille dérivée ne peut être en effet la dérivée d'aucun premier membre du système, car elle serait alors de classe supérieure à ce premier membre (8), par suite de classe supérieure à la classe minima, qui est 1: il en résulte que les expressions primitives des dérivées dont il s'agit sont toutes fournies par des équations du système donné, et, comme celui-ci a ses premiers membres tous distincts, chaque dérivée principale de première classe ne possède qu'une seule expression primitive. Mais, si l'on considère les dérivées principales des classes suivantes, elles *peuvent*, et c'est ce qui a lieu fréquemment, en posséder plusieurs distinctes.

Cela étant, supposons qu'il existe un groupe d'intégrales ordinaires répondant aux conditions initiales données, partageons les relations primitives en groupes successifs d'après les classes croissantes de leurs premiers membres, et pour effectuer, conformément aux indications du numéro 13, le calcul des valeurs initiales des dérivées principales, remplaçons dans les seconds membres les variables, les intégrales et les dérivées paramétriques par leurs valeurs initiales connues. Cela fait, et les valeurs initiales des dérivées principales de première classe ayant été calculées sans incompatibilité à l'aide des relations primitives du premier groupe, il faudra qu'en portant les valeurs trouvées dans les seconds membres des relations primitives du deuxième groupe, celles d'entre ces dernières qui ont pour premier membre une même dérivée principale de deuxième classe, s'accordent à fournir pour elle une même valeur initiale: car, s'il y en avait seulement deux dont les seconds membres fussent numériquement différents, leur soustraction membre à membre conduirait à une absurdité. Ces concordances étant supposées avoir lieu, il faudra ensuite qu'en portant toutes les valeurs déjà calculées dans les seconds membres des relations primitives du troisième groupe, celles d'entre ces dernières qui ont pour premier membre une même dérivée principale de

troisième classe, s'accordent à fournir pour elle une même valeur initiale. Et ainsi de suite indéfiniment.

II. *La concordance numérique des relations primitives étant supposée avoir lieu, la convergence des développements des intégrales hypothétiques correspondant aux données initiales choisies est encore une condition nécessaire à l'existence effective de ces intégrales.*

Il suffit, pour s'en convaincre, de se reporter à la définition même des intégrales ordinaires (10).

III. *Si, pour un choix déterminé des conditions initiales, les relations primitives s'accordent numériquement, et qu'en outre les développements des intégrales hypothétiques soient convergents, leurs sommes constituent des intégrales ordinaires du système orthoïque donné.*

Soient en effet:

x, y, \dots les variables indépendantes;

x_0, y_0, \dots leurs valeurs initiales;

u, v, \dots les fonctions inconnues;

U, V, \dots les sommes des développements, supposés convergents, des intégrales hypothétiques.

Considérons un domaine \mathfrak{D} des valeurs initiales x_0, y_0, \dots , dont les rayons soient suffisamment petits pour que les fonctions de x, y, \dots en lesquelles se transforment, par la substitution de U, V, \dots à u, v, \dots , les deux membres des diverses équations données, soient toutes développables dans le domaine dont il s'agit. En vertu même du calcul qui a fourni les coefficients des développements U, V, \dots , les valeurs initiales des variables indépendantes, prises conjointement avec celles des développements eux mêmes et de leurs dérivées de tous ordres, vérifient les relations primitives. Donc, les fonctions de x, y, \dots qui, après la substitution, figurent dans les deux membres d'une équation différentielle quelconque, sont égales, ainsi que leurs dérivées semblables de tous ordres, pour $x - x_0 = y - y_0 = \dots = 0$, et par suite sont identiquement égales entre elles dans toute l'étendue du domaine \mathfrak{D} .

IV. *Il ne peut y avoir enfin plus d'un groupe d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données.*

Car chaque relation primitive, étant du premier degré par rapport à la dérivée principale qui figure dans son premier membre, ne fournit pour cette dernière qu'une seule valeur initiale.

15. Nous dirons qu'un système orthoïque est *complètement intégrable*, s'il admet un groupe (nécessairement unique) d'intégrales ordinaires répondant à des données initiales arbitrairement choisies; *passif*, si la concordance numérique des relations primitives (14, I) a lieu pour toutes les données initiales possibles.

En vertu de ces définitions et des remarques faites au numéro précédent, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système orthoïque soit complètement intégrable, sont: 1° que le système en question soit passif; 2° que les développements, construits *a priori*, d'intégrales hypothétiques répondant à des données initiales quelconques, soient toujours convergents.

Nous nous occuperons tout d'abord de la passivité.

16. Un mécanisme très-simple, appliqué aux relations primitives d'un système orthoïque, permet, comme nous allons le voir, d'en déduire, pour les dérivées principales des classes successives, certaines expressions dépendant exclusivement des variables, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques.

Les relations primitives étant partagées en groupes successifs d'après les classes croissantes 1, 2, 3, ... de leurs premiers membres, désignons par \mathfrak{P}_1 ou par \mathfrak{M}_1 indifféremment le premier de ces groupes, par $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \dots$ les groupes suivants, et souvenons-nous que le groupe \mathfrak{P}_1 (ou \mathfrak{M}_1) a ses premiers membres nécessairement tous distincts, tandis que le contraire *peut* avoir lieu pour chacun des suivants $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \dots$ (14, I). Remplaçons maintenant dans les relations \mathfrak{P}_2 chacune des dérivées principales de première classe par son expression (unique) tirée de \mathfrak{M}_1 : comme une semblable expression dépend exclusivement des variables, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques, le groupe des relations résultantes, \mathfrak{M}_2 , fournira, pour les dérivées principales de seconde classe, des expressions

jouissant de la même propriété. Considérons ensuite les relations \mathfrak{P}_3 , et éliminons-en de toutes les manières possibles, à l'aide de $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$, les dérivées principales des deux premières classes; autrement dit, extrayons du groupe $[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2]$ un groupe partiel fournissant une expression et une seule pour chacune des dérivées principales des deux premières classes, éliminons ces dernières entre \mathfrak{P}_3 et les relations ainsi obtenues, et répétons l'opération en remplaçant successivement le groupe partiel considéré par tous les groupes analogues semblablement extraits de $[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2]$. Il est clair que le groupe des relations résultantes, \mathfrak{M}_3 , fournira, pour les dérivées principales de troisième classe, des expressions ne dépendant, comme les seconds membres de \mathfrak{M}_1 et \mathfrak{M}_2 , que des variables, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques. L'élimination des dérivées principales des trois premières classes, effectuée dans \mathfrak{P}_4 de toutes les manières possibles à l'aide de $[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3]$, conduira de même à un groupe \mathfrak{M}_4 fournissant, pour les dérivées principales de quatrième classe, des expressions exclusivement composées avec les quantités dont il s'agit. Et ainsi de suite indéfiniment.

Nous nommerons *ultimes* les relations

$$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \dots$$

obtenues à l'aide du mécanisme que nous venons de décrire, et aussi les expressions qu'elles fournissent pour les dérivées principales des classes 1, 2, 3,

D'après ce qui précède, et en considérant comme autant de variables indépendantes distinctes x, y, \dots, u, v, \dots et les dérivées de tous ordres de u, v, \dots , les relations primitives entraînent comme conséquences nécessaires les relations ultimes. Réciproquement d'ailleurs, il est facile de voir que ces dernières entraînent les premières.

Enfin, notre proposition du n° 11, d'où nous avons déjà déduit la nature normale des relations primitives, entraîne aussi de proche en proche celle des relations ultimes appartenant aux groupes successifs $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \dots$

17. Si l'on considère deux dérivées (distinctes) d'une fonction quelconque $F(x, y, \dots)$, et que l'on adjoigne mentalement à chacune d'elles la suite infinie de ses propres dérivées, tout terme commun aux deux ensembles illimités ainsi obtenus se nommera une *résultante* des deux dé-

rivées en question. Pour passer de la fonction F à l'une ou à l'autre de ces dernières, il faut exécuter sur elle certaines différentiations, dont quelques-unes peuvent être les mêmes de part et d'autre: en désignant par le symbole D . l'ensemble de ces différentiations communes, et par les symboles D' ., D'' . l'ensemble des différentiations restantes pour la première et la seconde dérivée respectivement, les deux dérivées considérées peuvent évidemment s'écrire

$$D.D'.F, D.D''.F,$$

et l'on voit sans peine: 1° qu'elles admettent $D.D'.D''.F$ comme résultante unique d'ordre minimum; 2° que l'ensemble complet de leurs résultantes s'obtient en adjoignant à celle d'ordre minimum la suite indéfinie de ses propres dérivées.

Considérons maintenant un système différentiel résolu par rapport à certaines dérivées des inconnues, et, dans ce système, deux équations ayant pour premiers membres respectifs deux dérivées d'une même inconnue; puis, prenons la résultante d'ordre minimum de ces dérivées, et répétons l'opération en faisant varier de toutes les manières possibles le choix de la fonction inconnue, et celui des deux équations sur les premiers membres desquelles on doit opérer: les résultantes, en nombre essentiellement limité, que nous obtiendrons ainsi, se nommeront, par rapport au système donné, les dérivées *cardinales* de ses diverses fonctions inconnues.

18. Cela posé, pour qu'un système orthoïque soit passif, il faut et il suffit que les diverses expressions ultimes d'une même dérivée cardinale quelconque soient égales identiquement, c'est à dire quelles que soient les valeurs attribuées aux variables, aux fonctions inconnues et à celles d'entre leurs dérivées paramétriques qui y figurent, ces trois sortes de quantités étant considérées pour un instant comme autant de variables indépendantes distinctes.¹

I. Comme nous l'avons dit plus haut (16), les relations primitives entraînent les relations ultimes, et réciproquement ces dernières entraînent les premières. Pour qu'un système orthoïque soit passif, il est donc nécessaire et suffisant que la concordance numérique des relations ultimes

¹ J'ai établi cette proposition en 1893 pour des systèmes différentiels de forme un peu moins générale. Voir les Annales de l'Ecole Normale, 1893, p. 76 à 86.

ait lieu pour toutes les données initiales possibles, ou, en d'autres termes, que les diverses expressions ultimes de chaque dérivée principale soient identiquement égales.

Toute dérivée cardinale étant principale, *les conditions posées sont donc évidemment nécessaires*, et il nous reste à prouver qu'elles sont suffisantes, c'est à dire que leur réalisation entraîne l'égalité identique des diverses expressions ultimes de chaque dérivée principale.

II. Des relations ultimes on peut, par un procédé analogue à celui qui nous les a fournies, en déduire de nouvelles.

Différentions un nombre quelconque de fois une relation ultime; puis, après la dernière différentiation, remplaçons les diverses dérivées principales contenues dans le second membre par telles ou telles de leurs expressions ultimes. Dans le premier membre de la relation résultante figure évidemment une dérivée principale, qui se trouve alors exprimée *directement* (c'est à dire sans l'intermédiaire d'aucune autre dérivée principale) à l'aide des variables indépendantes, des fonctions inconnues et de quelques-unes de leurs dérivées paramétriques. Pour abrégér, et bien qu'une foule d'autres relations déduites du système jouissent aussi de cette propriété, nous qualifierons spécialement de *directes* les relations auxquelles conduit l'application du mécanisme précédent (en y comprenant les relations ultimes elles-mêmes), et nous affecterons de la même qualification les expressions qui en résultent pour les diverses dérivées principales des fonctions inconnues.

Cela posé, si l'on forme, à l'aide du mécanisme décrit ci-dessus, une relation directe quelconque, il résulte immédiatement du n° 11 et de la nature normale des relations ultimes, que *les relations successivement rencontrées dans le cours d'un semblable calcul sont toutes normales*.

III. Dans un système orthoïque, chaque dérivée principale de première classe n'a qu'une expression directe.

Effectivement, nous avons déjà observé (14, I) qu'une dérivée principale de première classe ne peut être la dérivée d'aucun premier membre du système: il en résulte que les expressions directes des dérivées principales de première classe sont toutes fournies par des équations du système donné, et, comme les premiers membres y sont tous distincts, chacune des dérivées dont il s'agit n'a qu'une seule expression directe.

IV. Les relations directes, d'après la définition même que nous en avons donnée, appartiennent toutes à l'un ou à l'autre des trois groupes suivants:

les relations du système donné;

les relations obtenues en différenciant un nombre quelconque de fois une relation du système donné, et remplaçant, dans le second membre de la relation résultante, les diverses dérivées principales par telles ou telles de leurs expressions ultimes;

les relations obtenues en effectuant sur une relation du système donné l'opération précédente, puis sur la relation résultante une opération de même espèce.

Dans tous les cas, on part, pour former une relation directe quelconque, d'une certaine équation du système donné.

Cela posé, si, dans un système orthoïque, l'égalité identique a lieu entre les diverses expressions directes de chaque dérivée principale des classes $1, 2, \dots, j$, toutes les expressions directes d'une dérivée déterminée de classe $j + 1$ obtenues en partant d'une même équation du système proposé, sont nécessairement identiques.

La dérivée de classe $j + 1$ dont parle l'énoncé coïncide nécessairement, soit avec le premier membre de l'équation d'où l'on doit partir, soit avec quelque dérivée de ce premier membre.

Dans le premier cas, l'équation considérée ne peut fournir, pour la dérivée de classe $j + 1$ qui figure dans son premier membre, qu'une seule expression directe, son second membre.

Dans le second cas, que nous allons maintenant examiner, la formation des expressions directes visées par l'énoncé nécessite, sur l'équation d'où l'on part, certaines différentiations qui ont toujours lieu, dans divers ordres, par rapport aux mêmes variables respectives; tantôt on n'effectue de substitutions qu'après la dernière d'entre elles, tantôt on en effectue en outre après une des différentiations précédentes. Il s'agit d'établir que, de quelque façon qu'on procède, on arrivera toujours, pour la dérivée considérée de classe $j + 1$, à la même expression directe.

1° En premier lieu, si l'on n'opère de substitutions qu'après la dernière différentiation, les expressions directes auxquelles on est conduit pour la dérivée en question sont identiquement égales: car l'expression primitive résultant des seules différentiations est indépendante de l'ordre

dans lequel on les exécute, et, pour chacune des dérivées principales, de classes nécessairement inférieures à $j + 1$, qui y figurent, les diverses expressions directes, à plus forte raison les diverses expressions ultimes, sont par hypothèse identiques.

2° Si l'on ne change pas l'ordre relatif des différentiations, les expressions directes auxquelles on est conduit sont encore identiquement égales.

Désignons par (\mathfrak{a}) l'équation du système donné d'où l'on doit partir, par k le nombre des différentiations successives, exécutées sur (\mathfrak{a}) dans un ordre invariable, par ∂ la dérivée principale que l'exécution des $k - 1$ premières amènerait dans le premier membre, et par x la variable indépendante par rapport à laquelle la $k^{\text{ième}}$ différentiation doit avoir lieu: cette dernière, et éventuellement une des précédentes, doit être suivie de substitutions, et c'est l'exécution ou la non-exécution de cette partie éventuelle du calcul, comme aussi le moment où elle est effectuée, qui constituent les circonstances variables de l'opération actuellement considérée. Or, je vais établir que le résultat final auquel on est conduit est, quelles que soient ces circonstances variables, identique au résultat fourni par une opération bien déterminée que je vais d'abord décrire.

Observons à cet effet que, $\frac{\partial \partial}{\partial x}$ étant de classe $j + 1$, ∂ est au plus de classe j (8). Cela étant, l'opération dont je veux parler consiste à prendre la relation directe (unique) dont le premier membre est ∂ , à la différentier par rapport à x , et à remplacer ensuite, dans le second membre de la relation résultante, chacune des dérivées principales, de classes nécessairement inférieures à $j + 1$, qui y figurent, par son expression ultime (unique).

En effet, une semblable opération donne un résultat évidemment identique au résultat fourni par celle dont nous avons parlé antérieurement, si, dans cette dernière, la $k^{\text{ième}}$ différentiation doit être exécutée sur une relation ultime, et il reste alors à examiner le cas où la $k^{\text{ième}}$ différentiation doit être exécutée, non plus sur une relation ultime, mais sur une relation ultime déjà différenciée. Soit donc

$$(2S) \quad \partial = f(x, y, \dots, \sigma, \dots, \tau, \dots)$$

la relation dont il s'agit, où σ, \dots désignent les diverses dérivées principales figurant *effectivement* dans le second membre, et τ, \dots les diverses inconnues ou dérivées paramétriques y figurant aussi *effectivement*. La

relation (28) étant normale (II), les quantités $\sigma, \dots, \tau, \dots$ ont une cote première au plus égale à celle de ∂ , et par suite inférieure à celle de $\frac{\partial \partial}{\partial x}$; elles sont donc toutes normales vis à vis de $\frac{\partial \partial}{\partial x}$. D'autre part, les quantités σ, \dots et τ, \dots étant normales vis à vis de ∂ , les quantités $\frac{\partial \sigma}{\partial x}, \dots$ et $\frac{\partial \tau}{\partial x}, \dots$ le sont vis à vis de $\frac{\partial \partial}{\partial x}$ (6). Enfin, puisque $\frac{\partial \partial}{\partial x}$ est de classe $j+1$, les dérivées $\sigma, \dots, \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \dots$, et celles d'entre les dérivées $\frac{\partial \tau}{\partial x}, \dots$ qui sont principales, sont au plus de la classe j , et par suite chacune d'elles a une expression directe unique, qui se trouve être, à plus forte raison, son expression ultime unique. Désignons alors par

$$\Sigma, \dots, \Sigma_x, \dots$$

les expressions directes de

$$\sigma, \dots, \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \dots;$$

par $\left[\frac{\partial \Sigma}{\partial x} \right], \dots$ les résultats que donne la règle des fonctions composées quand on effectue sur Σ, \dots une différentiation relative à x ; enfin par $\left[\left[\frac{\partial \Sigma}{\partial x} \right] \right], \dots$ les résultats respectivement déduits de $\left[\frac{\partial \Sigma}{\partial x} \right], \dots$ en éliminant de ces dernières expressions les dérivées principales, de classes nécessairement inférieures à j , qui peuvent y figurer: il est clair, puisque les dérivées $\frac{\partial \sigma}{\partial x}, \dots$ sont au plus de la classe j , que les expressions directes $\left[\left[\frac{\partial \Sigma}{\partial x} \right] \right], \dots$ sont respectivement identiques aux expressions directes Σ_x, \dots

Cela posé, exécutons sur la relation (28) les opérations qui restent à exécuter, c'est à dire la différentiation relative à x , et ensuite l'élimination des dérivées principales du second membre. Il suffit pour cela de considérer la relation

$$\frac{\partial \partial}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \dots,$$

et de remplacer dans le second membre, d'une part les dérivées principales

$$\sigma, \dots, \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \dots$$

par leurs expressions ultimes

$$\Sigma', \dots, \Sigma_x, \dots,$$

d'autre part celles d'entre les dérivées $\frac{\partial \tau}{\partial x}, \dots$ qui sont principales par les expressions ultimes correspondantes. Or, en vertu des identités

$$\Sigma_x = \left[\left[\frac{\partial \Sigma'}{\partial x} \right] \right], \dots,$$

il revient évidemment au même de différencier par rapport à x la relation

$$\partial = f(x, y, \dots, \Sigma, \dots, \tau, \dots)$$

(relation directe unique ayant pour premier membre ∂), ce qui donne

$$\frac{\partial \partial}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \Sigma} \left[\frac{\partial \Sigma'}{\partial x} \right] + \dots + \frac{\partial f \partial \tau}{\partial x} + \dots,$$

puis de remplacer par leurs expressions ultimes les dérivées principales qui peuvent alors figurer dans le second membre.

3° Considérons deux quelconques des expressions directes dont le présent alinéa IV a pour but de démontrer l'identité, et qui se déduisent, comme nous l'avons expliqué, par différentiations et substitutions, d'une même équation du système. Si, sans changer de part ni d'autre l'ordre relatif des différentiations, on n'opère de substitutions qu'après la dernière d'entre elles, on tombe sur deux expressions directes respectivement identiques aux deux précédentes (2°), et l'on sait d'ailleurs (1°) qu'en procédant ainsi, le résultat est indépendant de l'ordre des différentiations.

V. Si, dans un système orthoïque, l'égalité identique a lieu, d'une part entre les diverses expressions directes de chaque dérivée principale des classes $1, 2, \dots, j$, d'autre part entre les diverses expressions ultimes de chaque dérivée cardinale de la classe $j + 1$, les deux expressions directes d'une même dérivée principale de classe $j + 1$ obtenues en partant de deux équations différentes du système proposé sont nécessairement identiques.

Supposons, pour fixer les idées, que ce soit la fonction u dont certaines dérivées figurent dans les premiers membres des deux équations consi-

dérivées. Pour passer de la fonction u à l'une ou à l'autre de ces deux dérivées, il faut exécuter sur elle certaines différentiations, dont quelques-unes peuvent être les mêmes de part et d'autre. Nous désignerons par le symbole D . l'ensemble de ces différentiations communes, et par les symboles D' ., D'' . l'ensemble des différentiations restantes pour la première et la seconde dérivée respectivement. Les deux équations peuvent donc s'écrire:

$$(29) \quad D.D'.u = \dots,$$

$$(30) \quad D.D''.u = \dots$$

Cela posé, la dérivée de classe $j + 1$ dont parle l'énoncé coïncide soit avec $D.D'.D''.u$, soit avec quelque dérivée de $D.D'.D''.u$, puisqu'elle est une résultante (17) des premiers membres de (29) et (30). — Dans le premier cas, en vertu de l'alinéa précédent IV, les opérations à effectuer soit sur l'équation (29), soit sur l'équation (30), pour en déduire une expression directe de $D.D'.D''.u$, pourront l'être comme il suit: on exécutera d'abord la différentiation D'' . s'il s'agit de l'équation (29), la différentiation D' . s'il s'agit de l'équation (30), et l'on remplacera ensuite, dans les seconds membres des formules résultantes, les dérivées principales des classes $1, 2, \dots, j$ par leurs expressions ultimes. Or, ce mécanisme engendre précisément deux expressions ultimes de la dérivée cardinale $D.D'.D''.u$, de classe $j + 1$, c'est à dire deux expressions qui, par hypothèse, sont identiquement égales l'une à l'autre. — Si la dérivée de classe $j + 1$ dont parle l'énoncé coïncide avec quelque dérivée de $D.D'.D''.u$, les opérations à effectuer soit sur l'équation (29), soit sur l'équation (30), pour en déduire une expression directe de la dérivée en question, pourront l'être comme il suit: 1° on effectuera d'abord la différentiation D'' . s'il s'agit de la première, la différentiation D' . s'il s'agit de la seconde, et l'on remplacera les dérivées principales figurant dans les seconds membres par leurs expressions ultimes; 2° on exécutera ensuite les différentiations restantes, qui sont les mêmes de part et d'autre, et l'on éliminera finalement des seconds membres les dérivées principales. Or $D.D'.D''.u$ étant, dans le cas actuel, de classe inférieure à $j + 1$ (8), il résulte encore de nos hypothèses que les résultats sont identiques après la première partie de l'opération, par suite aussi après la seconde.

VI. Comme nous l'avons déjà remarqué (III), chaque dérivée principale de première classe ne possède, dans un système orthoïque quelconque, qu'une seule expression directe. Si donc on suppose que les diverses expressions ultimes de chaque dérivée cardinale sont identiquement égales, l'application répétée des propositions ci-dessus (IV), (V) prouve que l'égalité identique entre les diverses expressions directes d'une même dérivée principale a encore lieu dans la deuxième classe, puis dans la troisième, et ainsi de suite indéfiniment. *Il n'y a, dès lors, pour une même dérivée principale quelconque, qu'une seule expression directe, et à plus forte raison qu'une seule expression ultime, ce que nous voulions établir (I).*

19. Si l'on partage en groupes les équations d'un système orthoïque, suivant celles d'entre les fonctions inconnues u, v, \dots dont quelque dérivée figure dans leurs premiers membres, à un groupe formé d'une seule équation ne correspondra aucune condition de passivité. En particulier, *si chaque groupe ne contient qu'une seule équation, le système sera nécessairement passif.*

Enfin, *si, dans un système orthoïque passif, on supprime les diverses équations dont les premiers membres, comparés à ceux de telles ou telles autres, en peuvent être considérés comme des dérivées, le système résultant admet les mêmes intégrales que le premier, et possède, comme lui, la forme orthoïque passive.* Effectivement, les dérivées respectivement principales et paramétriques seront les mêmes de part et d'autre; les relations primitives du second système concorderont numériquement, comme celles du premier, par rapport à des données initiales arbitraires, et fourniront, pour chaque dérivée principale, la même valeur initiale; enfin, les développements des intégrales hypothétiques étant de part et d'autre identiques, leur convergence ne pourra avoir lieu d'un côté sans avoir lieu en même temps de l'autre.

20. Dans un système orthoïque, supposé passif, la concordance numérique des relations primitives a lieu pour des données initiales quelconques, et, d'après ce que nous avons dit plus haut (14), la question de savoir si les intégrales hypothétiques répondant à des conditions initiales données existent effectivement, se résout par l'affirmative dans le cas où leurs développements construits *a priori* sont tous convergents, par la

négative dans le cas contraire. Comme nous allons le prouver par divers exemples, cette convergence n'a pas nécessairement lieu, d'où résulte que, dans les systèmes orthoïques passifs, il est impossible d'affirmer d'une manière générale l'existence d'intégrales répondant à des données initiales arbitraires.

I. Considérons d'abord l'équation aux dérivées partielles

$$(31) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

où u désigne une fonction inconnue des deux variables indépendantes x et y .¹ Cette équation constitue un système orthoïque, comme on le voit en attribuant à u la cote zéro, à x la cote 3 et à y la cote 1; d'ailleurs, un pareil système est nécessairement passif, puisqu'il est composé d'une seule équation (19); enfin, les dérivées paramétriques de u sont celles qui se rapportent à la seule variable y , en sorte qu'une intégrale hypothétique se trouve entièrement déterminée par la condition de se réduire à une fonction donnée de y pour $x = x_0$.

Pour construire *a priori* le développement de l'intégrale hypothétique se réduisant à $\varphi(y)$ pour $x = 0$, on remarquera que l'équation (31) entraîne comme conséquence nécessaire

$$(32) \quad \frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = \frac{\partial^{2\alpha+\beta} u}{\partial y^{2\alpha+\beta}}.$$

Effectivement, si $\alpha = 0$, l'équation (32) se réduit à une identité. En différenciant (31) β fois par rapport à y , il vient

$$(33) \quad \frac{\partial^{1+\beta} u}{\partial x \partial y^\beta} = \frac{\partial^{2+\beta} u}{\partial y^{2+\beta}},$$

et la relation (32) se trouve vérifiée pour $\alpha = 1$. Si l'on suppose main-

¹ M^{me} de KOWALEVSKY, dans l'exemple de divergence qu'elle a donné (Journal de Creille, tome 80), considère cette même équation $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, en assujettissant l'intégrale hypothétique à se réduire, pour $x = 0$, à la fonction méromorphe $\frac{1}{1-y}$; comme on le verra plus bas, la détermination initiale dont nous avons fait choix est exprimable par une série entière indéfiniment convergente.

tenant cette relation établie pour une valeur quelconque de α , et qu'on la différencie une fois par rapport à x , elle donne

$$\frac{\partial^{(\alpha+1)+\beta} u}{\partial x^{\alpha+1} \partial y^{\beta}} = \frac{\partial^{1+(2\alpha+\beta)} u}{\partial x \partial y^{2\alpha+\beta}} ;$$

on a d'ailleurs, en vertu de (33),

$$\frac{\partial^{1+(2\alpha+\beta)} u}{\partial x \partial y^{2\alpha+\beta}} = \frac{\partial^{2+2\alpha+\beta} u}{\partial y^{2+2\alpha+\beta}} = \frac{\partial^{2(\alpha+1)+\beta} u}{\partial y^{2(\alpha+1)+\beta}},$$

et il vient en conséquence

$$\frac{\partial^{(\alpha+1)+\beta} u}{\partial x^{\alpha+1} \partial y^{\beta}} = \frac{\partial^{2(\alpha+1)+\beta} u}{\partial y^{2(\alpha+1)+\beta}},$$

relation qui se déduit de (32) par le changement de α en $\alpha+1$.

Cela étant, le développement que nous cherchons à construire a pour terme général

$$(34) \quad \frac{\varphi^{2\alpha+1}(y)}{1 \cdot 2 \dots \alpha \cdot 1 \cdot 2 \dots \beta} x^{\alpha} y^{\beta}.$$

Or, je vais faire voir qu'en choisissant convenablement $\varphi(y)$, on tombe sur un développement divergent.

A. Si l'on pose $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, la quantité $\frac{S_n}{n}$ tend vers zéro pour n infini.

D'abord, cette variante diminue toujours lorsque n augmente, car l'inégalité

$$\frac{S_n}{n} > \frac{S_{n+1}}{n+1}$$

revient à

$$(n+1)S_n > nS_{n+1},$$

ou

$$(n+1)S_n > n\left(S_n + \frac{1}{n+1}\right),$$

ou

$$S_n > \frac{n}{n+1},$$

ce qui est évident.

Observons en second lieu que si, dans la série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$, on désigne par σ_1 le *premier* terme, par σ_2 la somme des *deux* termes suivants, par σ_3 la somme des *trois* termes qui viennent à la suite de ceux-ci, etc., chaque terme élémentaire de σ_k est inférieur à $\frac{1}{k}$, et que par suite σ_k est inférieur à 1. On a donc

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_k < k,$$

ou

$$\frac{S_{k(k+1)}}{2} < k.$$

On déduit de là

$$\frac{S_{k(k+1)}}{k(k+1)} < \frac{2}{k+1},$$

inégalité dont le second membre, et à plus forte raison le premier, tendent vers zéro pour k infini.

Ainsi, on peut trouver pour n des valeurs telles, que la quantité positive $\frac{S_n}{n}$ tombe au dessous de toute quantité donnée; comme d'un autre côté elle diminue toujours lorsque n augmente, elle tend nécessairement vers zéro.

B. La série entière

$$(35) \quad 1 + \frac{S_1}{2}x^2 + \frac{S_1 S_2}{3 \cdot 4}x^4 + \dots + \frac{S_1 S_2 \dots S_n}{(n+1)(n+2) \dots 2n}x^{2n} + \dots$$

où S_n garde la même signification que ci-dessus **A**, est indéfiniment convergente.

Car dans la série formée par les modules de ses termes, le rapport d'un terme au précédent a pour valeur

$$\frac{S_{n+1}}{2(2n+1)}(\text{mod } x)^2$$

ou

$$\frac{S_{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n+1}{2(2n+1)} \cdot (\text{mod } x)^2,$$

produit de trois facteurs dont le premier tend vers zéro et le second vers $\frac{1}{4}$, tandis que le troisième reste invariable; le rapport considéré tend donc lui-même vers zéro.

C. En désignant par $\phi(x)$ la fonction définie par la somme de la série (35), et prenant $\varphi(y) = \phi(y)$, la série entière en x et y qui a pour terme général (34) n'admet aucun système de rayons de convergence.

Car, dans cette dernière série, la partie indépendante de y a pour terme général

$$\frac{\phi^{(2a)}(0)}{1 \cdot 2 \dots a} x^a = S_1 S_2 \dots S_a x^a,$$

et le rapport

$$\frac{S_1 S_2 \dots S_a S_{a+1} x^{a+1}}{S_1 S_2 \dots S_a x^a} = x S_{a+1}$$

a un module infini avec α , quelque valeur particulière (non nulle) que l'on attribue à x .

II. En désignant par u une fonction inconnue des deux variables indépendantes x et y , par μ une constante positive quelconque, et par q un entier au moins égal à 2, l'équation différentielle partielle

$$(36) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \left[1 + y + y^2 + \dots + y^q + (1 + y + y^2 + \dots + y^q + y^{q+1}) \frac{\partial^q u}{\partial y^q} \right]$$

n'admet pas d'intégrale se réduisant, pour $x = 0$, à une fonction de y identiquement nulle.

L'équation (36) constitue un système orthoïque, comme on le voit en attribuant à u la cote zéro, à x la cote $q + 1$, et à y la cote 1; un pareil système, composé d'une seule équation, est d'ailleurs nécessairement passif; enfin, une intégrale hypothétique se trouve, comme dans l'exemple précédent (I), entièrement déterminée par la condition de se réduire à une fonction donnée de y pour $x = x_0$. Je me propose de démontrer qu'il n'existe pas d'intégrale se réduisant, pour $x = 0$, à une fonction de y identiquement nulle.

A. Pour effectuer cette démonstration, on peut à l'équation (36) substituer l'équation

$$(37) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \left[(1 + y)^q + (1 + y)^{q+1} \frac{\partial^q u}{\partial y^q} \right].$$

Effectivement, si l'on donne à la constante μ , dans l'équation (36), une valeur positive déterminée, et que l'on considère l'équation

$$(38) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \mu' \left[(1+y)^q + (1+y)^{q+1} \frac{\partial^q u}{\partial y^q} \right],$$

il est clair qu'en donnant à μ' , dans cette dernière, une valeur positive suffisamment petite, les deux polynomes

$$(39) \quad \mu(1+y+y^2+\dots+y^q), \quad \mu(1+y+y^2+\dots+y^q+y^{q+1}),$$

qui figurent dans l'équation (36), ont leurs coefficients respectivement supérieurs aux coefficients (positifs) semblables des deux polynomes

$$(40) \quad \mu'(1+y)^q, \quad \mu'(1+y)^{q+1},$$

qui figurent dans l'équation (38). Or, si l'on considère cette dernière, les expressions primitives des dérivées principales sont des sommes de produits pouvant contenir comme facteurs quatre sortes de quantités, savoir: certains entiers positifs; certains coefficients des polynomes (40); certaines puissances de y ; enfin, certaines dérivées de u . Et, pour l'équation (36), les expressions primitives des mêmes dérivées sont composées exactement de la même façon, à cela près que les coefficients des polynomes (40) se trouvent respectivement remplacés par les coefficients correspondants des polynomes (39), c'est à dire par des quantités positives qui leur sont respectivement supérieures. Cela étant, si l'on choisit pour la fonction u et ses dérivées paramétriques des valeurs initiales toutes nulles, et que l'on calcule les valeurs initiales des dérivées principales, d'abord à l'aide des relations primitives provenant de (36), puis à l'aide des relations primitives provenant de (38), on voit, par un raisonnement très-simple exécuté de proche en proche d'une classe à la suivante, que les valeurs positives ainsi calculées sont plus grandes dans le premier cas que dans le second.

En conséquence, si l'on parvient à établir pour l'équation (38) la divergence du développement de l'intégrale hypothétique qui répond aux données initiales choisies, cette divergence se trouvera, à plus forte raison, établie pour l'équation (36).

B. L'équation (37), où $q \geq 2$, n'admet pas d'intégrale s'annulant avec x , ce qui achève notre démonstration.

Je désignerai par P_1, P_2, P_3, \dots des fonctions inconnues de la seule variable y , par $P_1^{(q)}, P_2^{(q)}, P_3^{(q)}, \dots$ leurs dérivées respectives d'ordre q , et je poserai

$$u = P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + \dots$$

L'équation (37) deviendra alors

$$\begin{aligned} & 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 x + 3 \cdot P_3 x^2 + \dots \\ &= \mu(1+y)^q + \mu(1+y)^{q+1} [P_1^{(q)} x + P_2^{(q)} x^2 + P_3^{(q)} x^3 + \dots], \end{aligned}$$

d'où l'on tire, par l'identification,

$$(41) \quad \begin{cases} 1 \cdot P_1 = \mu(1+y)^q, \\ 2 \cdot P_2 = \mu(1+y)^{q+1} P_1^{(q)}, \\ 3 \cdot P_3 = \mu(1+y)^{q+1} P_2^{(q)}, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

On voit de proche en proche que

$$P_1, P_1^{(q)}, P_2, P_2^{(q)}, P_3, P_3^{(q)}, \dots$$

ont respectivement les formes

$$\mu_1(1+y)^q, \mu'_1, \mu_2(1+y)^{q+1}, \mu'_2(1+y), \mu_3(1+y)^{q+2}, \mu'_3(1+y)^2, \dots,$$

et d'une façon générale que P_n est de la forme

$$\mu_n(1+y)^{q+n-1},$$

où μ_n désigne une certaine constante positive. Il faut démontrer que, les polynômes P_1, P_2, P_3, \dots étant ainsi déterminés, la série entière en x et y fournie par le développement de $P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + \dots$ n'admet aucun système de rayons de convergence.

Or, en désignant par P un polynôme de la forme $\theta \cdot (1+y)^h$, où $\theta > 0$ et $h \geq q$, et par $\bar{\omega}, \bar{\omega}^{(q)}$ les valeurs numériques que prennent, pour $y=0$, ce polynôme et sa dérivée d'ordre q , on a

$$(42) \quad \bar{\omega}^{(q)} > (h-q+1)^q \bar{\omega};$$

car des relations

$$\bar{\omega} = \theta, \quad \bar{\omega}^{(q)} = h(h-1) \dots (h-q+1) \theta$$

on tire

$$\bar{\omega}^{(q)} = h(h-1) \dots (h-q+1) \bar{\omega},$$

d'où l'on déduit immédiatement la relation (42).

Si l'on détermine maintenant des constantes $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$ par les relations

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \rho_1 = \mu, \\ 2. \rho_2 = \mu. 1^q \rho_1, \\ 3. \rho_3 = \mu. 2^q \rho_2, \\ \dots \dots \dots \\ n. \rho_n = \mu. (n-1)^q \rho_{n-1}, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

on a, en désignant par $\bar{\omega}_n$ la valeur numérique que prend, pour $y=0$, le polynome P_n ,

$$(44) \quad \bar{\omega}_n > \rho_n.$$

Effectivement, les relations (41) et (43) nous donnent d'abord

$$1. \bar{\omega}_1 = \mu = 1. \rho_1, \quad \text{d'où} \quad \bar{\omega}_1 = \rho_1;$$

puis

$$2. \bar{\omega}_2 = \mu^2. 1. 2 \dots q, \quad 2. \rho_2 = \mu^2, \quad \text{d'où} \quad \bar{\omega}_2 > \rho_2;$$

et il nous suffit alors de faire voir qu'en supposant la relation (44) vérifiée pour une valeur quelconque de n , elle l'est encore pour la valeur suivante $n+1$. Or, on a

$$(n+1) \rho_{n+1} = \mu n^q \rho_n;$$

on a d'autre part, en désignant par $\bar{\omega}_n^{(q)}$ la valeur numérique que prend, pour $y=0$, la dérivée d'ordre q du polynome P_n ,

$$(n+1) \bar{\omega}_{n+1} = \mu \bar{\omega}_n^{(q)},$$

puis, en vertu de (42),

$$\bar{\omega}_n^{(q)} > n^q \bar{\omega}_n,$$

puis, en vertu de l'hypothèse,

$$\bar{\omega}_n > \rho_n,$$

relations de la combinaison desquelles on déduit

$$(n+1)\bar{\omega}_{n+1} > \mu n^q \rho_n,$$

c'est à dire

$$(n+1)\bar{\omega}_{n+1} > (n+1)\rho_{n+1} \quad \text{ou} \quad \bar{\omega}_{n+1} > \rho_{n+1}.$$

On a donc bien, quel que soit n , $\bar{\omega}_n > \rho_n$.

Cela posé, la série $\Sigma \rho_n x^n$ est divergente pour toute valeur non nulle attribuée à x : car on a, en multipliant membre à membre les n premières relations (43),

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \rho_n = \mu^n 1^q \cdot 2^q \dots (n-1)^q,$$

d'où

$$\rho_n x^n = (\mu x)^n \frac{1^q \cdot 2^q \dots (n-1)^q}{1 \cdot 2 \dots (n-1)n},$$

et le rapport

$$\frac{\rho_{n+1} x^{n+1}}{\rho_n x^n} = \mu x \frac{n^q}{n+1}$$

a un module infini avec n , puisque q est, par hypothèse, au moins égal à 2. Il en résulte, à cause de (44), que la série $\Sigma \bar{\omega}_n x^n$, partie indépendante de y dans la série entière en x et y provenant de

$$P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + \dots,$$

est elle-même divergente.

III. La divergence éventuelle des intégrales hypothétiques des systèmes orthoïques pourrait encore s'établir à l'aide des exemples suivants, que nous nous bornerons à formuler.

En désignant par u une fonction inconnue des deux variables indépendantes x et y , par μ une constante positive quelconque, et par q un entier au moins égal à 2, aucune des équations différentielles partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu \left[1 + (1 + y)u + (1 + y + y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu \left[1 + (1 + y + y^2)u + (1 + y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu \left[1 + (1 + y + y^2 + y^3)u + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]$$

n'admet d'intégrale se réduisant, pour $x = 0$, à une fonction de y identiquement nulle.

En attribuant à u, x, y, μ la même signification que ci-dessus, et désignant par q un entier au moins égal à 3, l'équation différentielle partielle

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu \left[1 + (1 + y + y^2)u + \frac{\partial^q u}{\partial y^q} \right]$$

n'admet pas non plus d'intégrale qui satisfasse à cette condition initiale.

TROISIÈME PARTIE.

Systèmes orthonomes; convergence des développements des intégrales.

21. Un système orthoïque (9) sera dit *orthonome* dans le cas, particulièrement remarquable, où les cotes *premières* des diverses variables indépendantes se trouvent être toutes égales à un même entier (positif).

Exemple I. Dans son Mémoire sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles, M^{me} de KOWALEVSKY considère un système composé d'équations en nombre égal à celui des inconnues, et tel, qu'en désignant par

$$u_1, u_2, \dots, u_g$$

les inconnues dont il s'agit, et par

$$k_1, k_2, \dots, k_g$$

les ordres respectifs du système par rapport à elles, ce dernier soit résolvable par rapport aux dérivées

$$\frac{\partial^{k_1} u_1}{\partial x^{k_1}}, \frac{\partial^{k_2} u_2}{\partial x^{k_2}}, \dots, \frac{\partial^{k_g} u_g}{\partial x^{k_g}},$$

toutes relatives à une même variable x . Or, il est aisé de voir que, cette résolution une fois effectuée, le système résultant satisfait à notre définition de l'orthonomie.

En premier lieu, le système se trouve résolu par rapport à certaines dérivées, qui ne figurent, non plus que leurs propres dérivées, dans aucun des seconds membres.

Attribuons d'autre part:

1° à toutes les variables indépendantes une cote première égale à 1, et aux fonctions inconnues u_1, u_2, \dots, u_g les cotes premières $-k_1, -k_2, \dots, -k_g$;

2° à la variable x une cote seconde égale à 1, à toutes les autres variables une cote seconde nulle, et aux fonctions inconnues u_1, u_2, \dots, u_g les cotes secondes $-k_1, -k_2, \dots, -k_g$.

Si l'on désigne par i, j deux entiers, distincts ou non, pris dans la suite 1, 2, ..., g , et que l'on considère l'équation du système qui a pour premier membre $\frac{\partial^{k_i} u_i}{\partial x^{k_i}}$, le second membre de l'équation dont il s'agit peut, d'après la définition des systèmes de M^{me} de KOWALEVSKY, contenir la fonction u_j et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k_j inclusivement, à l'exception de la dérivée $\frac{\partial^{k_j} u_j}{\partial x^{k_j}}$. Or, la cote première du premier membre est zéro, et les cotes premières de u_j et de ses dérivées d'ordres 1, 2, ..., k_j sont respectivement égales aux quantités

$$-k_j, -k_j + 1, -k_j + 2, \dots, -k_j + k_j,$$

lesquelles sont toutes inférieures à zéro, à l'exception de la dernière qui est nulle. D'un autre côté, la cote seconde du premier membre est encore zéro, et la cote seconde d'une dérivée d'ordre k_j de u_j figurant au second membre est au plus égale à

$$-k_j + (k_j - 1) = -1 < 0,$$

puisque, dans la formation de cette dérivée, il y a au plus $k_j - 1$ différentiations relatives à la variable x .

Si donc on désigne par c_1, c_2 les cotes première et seconde du premier membre, et par c'_1, c'_2 celles d'une inconnue ou dérivée figurant au second membre, on aura nécessairement, ou bien

$$c_1 - c'_1 > 0,$$

ou bien

$$c_1 - c'_1 = 0, \quad c_2 - c'_2 > 0.$$

Nous avons d'ailleurs choisi pour les diverses variables indépendantes des cotes premières toutes égales entre elles.

Exemple II. Désignant par u, v, \dots, w certaines fonctions inconnues des variables indépendantes x, y, \dots, s, t , nous adopterons pour celles-ci un ordre déterminé, par exemple

$$(45) \quad x, y, \dots, s, t,$$

et de même pour les inconnues un ordre déterminé, par exemple

$$(46) \quad u, v, \dots, w.$$

Puis, nous rangerons comme il suit, sur une ligne indéfinie allant de droite à gauche, les dérivées de tous ordres des diverses fonctions inconnues. Nous écrirons d'abord l'ensemble des dérivées premières, puis à gauche de celui-ci l'ensemble des dérivées secondes, puis à gauche de ce dernier l'ensemble des dérivées troisièmes, et ainsi de suite indéfiniment. Chaque ensemble sera ensuite divisé en ensembles partiels, dont le premier à gauche contiendra les dérivées appartenant à la fonction u , le suivant les dérivées appartenant à la fonction v , et ainsi jusqu'au dernier qui contiendra les dérivées appartenant à la fonction w . En désignant maintenant par $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \mu$ les ordres partiels d'une dérivée quelconque relatifs à x, y, \dots, s, t respectivement, chacun des ensembles résultants sera lui-même divisé en ensembles partiels se succédant de gauche à droite d'après les valeurs décroissantes de l'ordre partiel α ; chaque sous-ensemble en sous-ensembles partiels se succédant de gauche à droite d'après les valeurs décroissantes de l'ordre partiel β ; et ainsi jusqu'à l'ordre partiel λ (inclusivement). Chacun des ensembles définitifs

se compose alors d'une dérivée unique, et les dérivées de tous ordres de nos fonctions inconnues se trouvent rangées, sur une ligne indéfinie allant de droite à gauche, dans un ordre bien déterminé. Nous qualifierons de *taxique* la suite ainsi obtenue, et nous dirons qu'une dérivée de fonction inconnue est *antérieure* ou *postérieure* à une autre, selon que, dans la suite taxique, elle figure à gauche ou à droite de cette autre.

Cela étant, un système différentiel sera dit *taxique*, s'il se trouve résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qu'il implique, et si l'on peut trouver, pour les variables et les inconnues, deux ordres respectifs, (45), (46), tels, que chaque second membre ne contienne, outre les variables et les inconnues, que des dérivées paramétriques postérieures au premier membre correspondant.¹

Or, un pareil système est nécessairement orthonome.

Effectivement, si une dérivée de fonction inconnue est antérieure à une autre, il arrive forcément de trois choses l'une:

ou bien elle est d'ordre supérieur à cette autre;

ou bien elle est de même ordre, mais la fonction inconnue à laquelle elle appartient précède, dans la suite (46), la fonction inconnue à laquelle appartient cette autre;

ou bien enfin, les deux dérivées considérées sont de même ordre et appartiennent à une même fonction inconnue, mais en désignant par

$$\alpha', \beta', \dots, \lambda', \mu',$$

$$\alpha'', \beta'', \dots, \lambda'', \mu''$$

leurs ordres partiels relatifs à

$$x, y, \dots, s, t,$$

les différences

$$\alpha' - \alpha'', \beta' - \beta'', \dots, \lambda' - \lambda''$$

ne sont pas toutes nulles, et la première d'entre elles qui ne s'évanouit pas est positive.

Cela étant, et en désignant par h le nombre des variables indé-

¹ Il va sans dire que les seconds membres sont supposés tous développables dans un même domaine.

pendantes, il suffit, pour se convaincre de la nature orthonome d'un système taxique, d'attribuer:

aux variables des cotes premières toutes égales à 1, et aux inconnues des cotes premières toutes nulles;

aux variables des cotes secondes toutes nulles, et aux inconnues successives u, v, \dots, w des cotes secondes dont la valeur aille en décroissant;

aux variables et aux inconnues des cotes troisièmes toutes nulles, à l'exception de x qui aura pour cote troisième l'unité;

aux variables et aux inconnues des cotes quatrièmes toutes nulles, à l'exception de y qui aura pour cote quatrième l'unité;

etc.;

finalement, aux variables et aux inconnues des cotes $(h + 1)^{\text{ièmes}}$ toutes nulles, à l'exception de l'avant dernière variable s , qui aura pour cote $(h + 1)^{\text{ième}}$ l'unité.

Car toute dérivée postérieure à une autre est alors normale vis à vis de cette autre; les inconnues elles-mêmes le sont évidemment vis à vis d'une dérivée quelconque; enfin, les cotes premières des diverses variables indépendantes ont été choisies égales entre elles.

22. *Tout système orthonome passif est complètement intégrable, c'est à dire admet un groupe (unique) d'intégrales ordinaires répondant à des données initiales arbitrairement choisies.*

Tout revient, comme nous l'avons vu (15), à prouver la convergence des développements des intégrales hypothétiques.

I. Si les fonctions $f(x, y, \dots)$, $\varphi(x, y, \dots)$ sont toutes deux développables dans quelque domaine des valeurs x_0, y_0, \dots , si de plus les valeurs de $\varphi(x, y, \dots)$ et de toutes ses dérivées en x_0, y_0, \dots sont réelles, positives, et supérieures aux modules des valeurs correspondantes de $f(x, y, \dots)$ et de ses dérivées semblables, la fonction φ sera dite *majorante* de f par rapport aux valeurs x_0, y_0, \dots .

II. Soient

$f(x, y, \dots)$ une fonction développable dans un domaine des valeurs x_0, y_0, \dots ;

admet un groupe d'intégrales u, v, \dots, w , développables dans un domaine de la valeur x_0 , et se réduisant, pour $x = x_0$, aux valeurs respectives u_0, v_0, \dots, w_0 .

IV. Considérons le système différentiel

$$\frac{\partial^a u}{\partial x^a} = H_u, \quad \frac{\partial^{\beta} v}{\partial x^{\beta}} = H_v, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{\lambda} w}{\partial x^{\lambda}} = H_w,$$

où u, v, \dots, w désignent des fonctions inconnues de la variable indépendante x ; $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ des entiers positifs quelconques; et H_u, H_v, \dots, H_w des fonctions données de toutes les quantités

$$(47) \quad x, \left\{ \begin{array}{l} u, \frac{\partial u}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial^{a-1} u}{\partial x^{a-1}}, \\ v, \frac{\partial v}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial^{b-1} v}{\partial x^{b-1}}, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ w, \frac{\partial w}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial^{l-1} w}{\partial x^{l-1}}. \end{array} \right.$$

Si les fonctions H_u, H_v, \dots, H_r sont développables dans un domaine des valeurs

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0, \\ u_0, \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0, \dots, \left(\frac{\partial^{\alpha-1} u}{\partial x^{\alpha-1}} \right)_0, \\ v_0, \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0, \dots, \left(\frac{\partial^{\beta-1} v}{\partial x^{\beta-1}} \right)_0, \\ \dots \\ w_0, \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0, \dots, \left(\frac{\partial^{\lambda-1} w}{\partial x^{\lambda-1}} \right)_0. \end{array} \right.$$

le système proposé admet un groupe d'intégrales u, v, \dots, w , développables dans un domaine de x_0 , et telles, que, pour $x = x_0$, les fonctions (47) se réduisent respectivement aux quantités numériques (48).

Effectivement, le système différentiel proposé équivaut au suivant au point de vue de l'intégration:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= u', & \frac{\partial u'}{\partial x} &= u'', & \dots, & \frac{\partial u^{(\alpha-1)}}{\partial x} &= H_u, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= v', & \frac{\partial v'}{\partial x} &= v'', & \dots, & \frac{\partial v^{(\beta-1)}}{\partial x} &= H_v, \\ & \dots & & & & & \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= w', & \frac{\partial w'}{\partial x} &= w'', & \dots, & \frac{\partial w^{(\lambda-1)}}{\partial x} &= H_w; \end{aligned}$$

il va sans dire que, dans les seconds membres H_u, H_v, \dots, H_w , figurant à l'extrémité des lignes horizontales respectives du tableau ci-dessus, on a substitué aux dérivées

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^{\alpha-1} u}{\partial x^{\alpha-1}}, \\ \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^{\beta-1} v}{\partial x^{\beta-1}}, \\ \dots \\ \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^{\lambda-1} w}{\partial x^{\lambda-1}} \end{aligned}$$

les nouvelles inconnues respectives

$$\begin{aligned} u', u'', \dots, u^{(\alpha-1)}, \\ v', v'', \dots, v^{(\beta-1)}, \\ \dots \\ w', w'', \dots, w^{(\lambda-1)}. \end{aligned}$$

Cela étant, la proposition qui fait l'objet du présent alinéa IV se présente comme une conséquence immédiate du précédent.

V.¹ Revenant au système différentiel que vise notre énoncé général,

¹ Les alinéas V, VI, VII, VIII et IX du n° 31 (*infra*) sont, comme je le répète plus loin (31), identiques aux alinéas correspondants du présent numéro 22, à part quelques modifications que je vais indiquer au fur et à mesure.

partageons-y les fonctions inconnues en catégories suivant la valeur de leurs cotes premières, et supposons, pour fixer les idées, que le nombre des catégories ainsi obtenues soit égal à 3. Les dérivées de tous ordres des inconnues se partagent naturellement alors en trois catégories, suivant qu'elles appartiennent à telle ou telle inconnue.

Cela posé, désignons par γ la valeur commune (positive) des cotes premières attribuées aux diverses variables indépendantes; par $\gamma', \gamma'', \gamma'''$ les cotes premières attribuées aux inconnues des trois catégories respectives; par N l'ordre maximum des premiers membres du système donné; par I' un entier fixe choisi sous la seule condition d'être à la fois supérieur aux trois quantités

$$\gamma N + \gamma', \gamma N + \gamma'', \gamma N + \gamma''';$$

enfin, par K', K'', K''' les plus petits entiers qui, substitués à K , vérifient *respectivement* les relations

$$\gamma K + \gamma' \geq I', \gamma K + \gamma'' \geq I', \gamma K + \gamma''' \geq I'.$$

Nous établirons successivement les points suivants:

A. *Les entiers K', K'', K''' sont tous supérieurs à N .*

Effectivement, si l'on avait, par exemple, $K' \leq N$, on aurait aussi $\gamma K' + \gamma' \leq \gamma N + \gamma'$, et, comme $\gamma N + \gamma'$ est inférieur à I' , il viendrait, contrairement à la définition de K' ,

$$\gamma K' + \gamma' < I'.$$

B. *Les dérivées dont la cote première tombe au dessous de I' sont: pour la première catégorie, celles d'ordre inférieur à K' ; pour la deuxième, celles d'ordre inférieur à K'' ; pour la troisième, celles d'ordre inférieur à K''' . (Quant aux inconnues elles-mêmes, leurs cotes premières tombent évidemment au dessous de I').*

Effectivement, si une dérivée de première catégorie est d'ordre $K < K'$, sa cote première $\gamma K + \gamma'$ est au plus égale à $\gamma(K' - 1) + \gamma'$, par suite inférieure à I' , en vertu de la définition de K' . Réciproquement, la relation $\gamma K + \gamma' < I'$ entraîne comme conséquence nécessaire $K < K'$: car, si l'on avait $K \geq K'$, on aurait aussi

$$\gamma K + \gamma' \geq \gamma K' + \gamma',$$

et, comme $\gamma K' + \gamma'$ est supérieur ou égal à I' , il viendrait, contrairement à l'hypothèse,

$$\gamma K + \gamma' \geq I'.$$

C. Si l'on dresse, par classes croissantes, la liste des dérivées principales des inconnues, et qu'on y supprime toutes les dérivées de première catégorie dont l'ordre est inférieur à K' , toutes celles de deuxième catégorie dont l'ordre est inférieur à K'' , enfin toutes celles de troisième catégorie dont l'ordre est inférieur à K''' , cette suppression équivaut à celle d'un certain nombre de classes en tête de la liste.

Ce point est évident, si l'on observe d'une part que les dérivées principales supprimées sont celles dont la cote première tombe au dessous de I' , et si l'on se reporte d'autre part à la classification des dérivées principales (7), (8).

D. Si l'on considère une relation primitive dont le premier membre soit
ou de première catégorie et d'ordre K' ,
ou de deuxième catégorie et d'ordre K'' ,
ou de troisième catégorie et d'ordre K''' ;

1° Toute dérivée de fonction inconnue figurant au second membre est d'ordre au plus égal à K' , K'' ou K''' , suivant que cette même dérivée est de première, seconde ou troisième catégorie.

2° Le second membre de la relation considérée est linéaire par rapport à l'ensemble de toutes les dérivées qui sont, soit de première catégorie et d'ordre K' , soit de deuxième catégorie et d'ordre K'' , soit de troisième catégorie et d'ordre K''' .

1° Supposons, par exemple, que le premier membre de la relation considérée soit de première catégorie et d'ordre K' : sa cote première est alors $\gamma K' + \gamma'$. D'ailleurs une dérivée d'ordre K figurant dans le second membre a pour cote première l'une ou l'autre des trois quantités

$$\gamma K + \gamma', \quad \gamma K + \gamma'', \quad \gamma K + \gamma''',$$

suivant qu'elle est de première, seconde ou troisième catégorie. Enfin, toute dérivée figurant au second membre a une cote première au plus

égale à celle du premier membre. Nous sommes donc ramenés, pour établir le premier point, à prouver que les relations

$$(49) \quad \gamma K + \gamma' \leq \gamma K' + \gamma', \quad \gamma K + \gamma'' \leq \gamma K' + \gamma', \quad \gamma K + \gamma''' \leq \gamma K' + \gamma'$$

entraînent *respectivement*, comme conséquence nécessaire,

$$K \leq K', \quad K \leq K'', \quad K \leq K''''.$$

Or, la première relation (49) entraîne évidemment $K \leq K'$.

Si la deuxième relation (49) était vérifiée pour quelque valeur de K supérieure à K'' , soit $K = K'' + r$, où $r > 0$, on aurait

$$\gamma(K'' + r) + \gamma'' \leq \gamma K' + \gamma'.$$

d'où

$$\gamma(K' - r) + \gamma' \geq \gamma K'' + \gamma''.$$

et à plus forte raison

$$\gamma(K' - r) + \gamma' \geq \Gamma,$$

ce qui est contradictoire avec la définition de K' . Donc la deuxième relation (49) entraîne $K \leq K''$.

On verrait, par un raisonnement semblable, que la troisième entraîne $K \leq K'''$.

2° Les entiers K', K'', K''' étant tous supérieurs à l'ordre maximum des premiers membres du système donné, la relation primitive que l'on considère se déduit de quelque relation du système donné par une différenciation d'ordre *positif*. Elle a dès lors son second membre linéaire par rapport à l'ensemble des dérivées qu'indique la deuxième partie de l'énoncé **D**.

VI. Désignons désormais par S le système proposé, et par (S) le système que forment les diverses relations primitives dont les premiers membres sont, ou de première catégorie et d'ordre K' , ou de deuxième catégorie et d'ordre K'' , ou de troisième catégorie et d'ordre K''' . Il est clair que, dans ces deux systèmes, les dérivées principales et paramétriques des fonctions inconnues sont respectivement les mêmes, à cela près que les dérivées principales du système S dont la cote première tombait au dessous de Γ , sont devenues paramétriques dans le système (S) ; et si l'on

dresse, d'après la classe croissante de leurs premiers membres, la liste des relations primitives des deux systèmes, les groupes illimités ainsi obtenus sont les mêmes de part et d'autre, à cela près que, pour le système (S) , un certain nombre de relations ont disparu *en tête de la liste*. Si donc on impose, d'une part aux intégrales de S les conditions initiales choisies, d'autre part à celles de (S) des conditions initiales identiques, en ayant soin seulement de prendre, pour les anciennes dérivées principales devenues paramétriques, les valeurs initiales calculées à l'aide des relations primitives disparues, on pourra, dans le système (S) comme dans le proposé, connaître à l'aide des relations primitives, numériquement concordantes, les valeurs initiales de toutes les dérivées principales, et l'on obtiendra de part et d'autre, pour les développements ainsi construits *a priori* des intégrales hypothétiques, des résultats identiques. Tout revient donc à établir la convergence des développements des intégrales hypothétiques de (S) répondant aux conditions initiales que nous venons d'indiquer.

Or on peut, moyennant un simple changement de fonctions, remplacer le système (S) par un autre où les déterminations initiales des inconnues soient toutes identiquement nulles. Effectivement, soient u, v, \dots les fonctions inconnues du système (S) , et I_u, I_v, \dots les déterminations initiales de ces inconnues respectives. Nous observerons tout d'abord que, parmi les dérivées de I_u, I_v, \dots , celles qui sont respectivement semblables aux dérivées principales de u, v, \dots ont toutes zéro pour valeur initiale, et qu'elles sont, par suite, identiquement nulles, puisque leurs propres dérivées, nécessairement semblables à des dérivées principales de u, v, \dots , ont toutes aussi pour valeur initiale zéro; quant aux valeurs initiales de I_u, I_v, \dots et de leurs dérivées restantes, elles sont précisément égales aux valeurs initiales de u, v, \dots et de leurs dérivées (paramétriques) semblables. Cela posé, effectuons dans le système (S) la transformation

$$\begin{cases} u = I_u + \mathfrak{u}, \\ v = I_v + \mathfrak{v}, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

où $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \dots$ désignent de nouvelles fonctions inconnues, et soit (\mathfrak{S}) le système ainsi obtenu: il va sans dire que, dans cette transformation, nous

conservons aux variables indépendantes leurs cotes respectives, et que nous attribuons aux nouvelles fonctions inconnues les mêmes cotes respectives qu'aux anciennes correspondantes. Si aux relations du nouveau système (**S**) on adjoint maintenant toutes celles qui s'en déduisent par de simples différentiations, il résulte de la remarque faite ci-dessus que le groupe illimité ainsi formé peut se déduire des relations primitives de (*S*) en remplaçant les dérivées principales de u, v, \dots par les dérivées semblables de $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \dots$, puis les fonctions u, v, \dots et leurs dérivées paramétriques par $I_u + \mathfrak{u}, I_v + \mathfrak{v}, \dots$ et les dérivées semblables de ces sommes. De là on conclut immédiatement: 1° que chaque équation du système (**S**) est normale; 1° que, sauf le changement de u, v, \dots en $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \dots$, les deux systèmes (*S*) et (**S**) ont mêmes premiers membres, et par suite que les dérivées des fonctions inconnues s'y répartissent de la même manière en principales et paramétriques; 3° que si, sans changer les valeurs initiales des variables indépendantes, on impose, d'une part aux intégrales hypothétiques de (*S*) les déterminations initiales déjà indiquées, d'autre part à celles de (**S**) des déterminations initiales identiquement nulles, les relations primitives, numériquement concordantes dans le premier cas, le seront aussi dans le second, et fourniront, pour les dérivées principales semblables des inconnues correspondantes, les mêmes valeurs initiales. En conséquence, *tout revient à prouver la convergence des développements des intégrales hypothétiques qui, dans le système (**S**), dépendent à des déterminations initiales identiquement nulles.*

Comme on a attribué aux nouvelles fonctions inconnues $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \dots$ les mêmes cotes respectives qu'aux anciennes u, v, \dots , il est clair que les inconnues engagées dans le système (**S**) et les dérivées de ces inconnues se partageront encore en trois catégories. Pour faciliter le langage, et faute d'une dénomination meilleure, nous nommerons *dominantes* les dérivées de $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \dots$ qui sont

ou de première catégorie et d'ordre K' ,

¹ Dans la démonstration du n° 31 (*infra*), on substituera à ce membre de phrase le suivant:

» 1° que, pour chaque équation du système (**S**), toute inconnue ou dérivée figurant effectivement dans le second membre a une cote première au plus égale à celle du premier membre.»

ou de deuxième catégorie et d'ordre K'' ,
 ou de troisième catégorie et d'ordre K''' ,
 et *secondaires* toutes celles qui sont
 ou de première catégorie et d'ordre $< K'$;
 ou de deuxième catégorie et d'ordre $< K''$,
 ou de troisième catégorie et d'ordre $< K'''$.

On voit par là que l'ensemble des dérivées secondaires équivaut exactement à celui des dérivées dont la cote première tombe au dessous de Γ . On observera en outre que le système (\mathfrak{S}) ne contient, outre les variables et les inconnues, que des dérivées dominantes et secondaires, et que chacune de ses équations, linéaire par rapport à l'ensemble des dérivées dominantes, a pour premier membre une de celles-ci.

Nous nommerons, dans ce qui suit:

coefficients du système (\mathfrak{S}) les diverses fonctions (des variables, inconnues et dérivées secondaires) qui figurent dans les seconds membres, soit comme multiplicateurs des dérivées dominantes, soit comme termes indépendants de ces dérivées;

x_0, y_0, \dots les valeurs initiales de x, y, \dots ;

\mathfrak{f}, \dots les diverses quantités du groupe formé par les inconnues u, v, \dots et leurs dérivées secondaires (toutes ces quantités ont des valeurs initiales nulles, puisque les déterminations initiales sont identiquement nulles);

u', v', \dots les inconnues de première catégorie, g' leur nombre, $g'_1, g'_2, \dots, g'_{K'-1}$ les nombres respectifs de leurs dérivées des ordres $1, 2, \dots, K' - 1$;

u'', v'', \dots les inconnues de deuxième catégorie, g'' leur nombre, $g''_1, g''_2, \dots, g''_{K''-1}$ les nombres respectifs de leurs dérivées des ordres $1, 2, \dots, K'' - 1$;

u''', v''', \dots les inconnues de troisième catégorie, g''' leur nombre, $g'''_1, g'''_2, \dots, g'''_{K'''-1}$ les nombres respectifs de leurs dérivées des ordres $1, 2, \dots, K''' - 1$.¹

¹ Dans la démonstration du n° 31 (*infra*), on nommera en outre *termes anormaux* du système (\mathfrak{S}) tous ceux qui, dans quelque second membre de (\mathfrak{S}) , contiennent une dérivée anormale par rapport au premier membre correspondant; et *termes normaux* du système (\mathfrak{S}) tous les autres termes des seconds membres.

D'ailleurs, les seconds membres du système primitif S étant, par la définition même des intégrales ordinaires, développables dans un domaine des valeurs initiales choisies pour les diverses quantités qui y figurent, on voit sans peine que les coefficients du système (\mathbf{S}), fonctions des diverses quantités

$$x, y, \dots, f, \dots,$$

sont développables dans un domaine des valeurs initiales

$$x_0, y_0, \dots, 0, \dots$$

VII. Soient

ε une constante positive moindre que $\frac{1}{3}$ (c'est-à-dire moindre que le quotient de 1 par le nombre des catégories d'inconnues du système donné);

μ une constante positive quelconque;

$$\left\{ \begin{array}{l} K', K'', K''', \\ g', g'_1, g'_2, \dots, g'_{K'-1}, \\ g'', g''_1, g''_2, \dots, g''_{K''-1}, \\ g''', g'''_1, g'''_2, \dots, g'''_{K'''-1}, \end{array} \right.$$

les entiers définis dans ce qui précède (V), (VI);

w', w'', w''' trois fonctions inconnues de la variable indépendante t .

Si l'on pose

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} z = t + g'w' + g'_1 \frac{\partial w'}{\partial t} + \dots + g'_{K'-1} \frac{\partial^{K'-1} w'}{\partial t^{K'-1}} \\ \quad + g''w'' + g''_1 \frac{\partial w''}{\partial t} + \dots + g''_{K''-1} \frac{\partial^{K''-1} w''}{\partial t^{K''-1}} \\ \quad + g'''w''' + g'''_1 \frac{\partial w'''}{\partial t} + \dots + g'''_{K'''-1} \frac{\partial^{K'''-1} w'''}{\partial t^{K'''-1}}, \end{array} \right.$$

et $\theta(z) = \frac{1}{1-z}$, le système différentiel

$$(51) \quad \begin{cases} \frac{\partial^{K'} w'}{\partial t^{K'}} = \frac{\mu \theta(z)}{1 - 3\varepsilon \theta(z)}, \\ \frac{\partial^{K''} w''}{\partial t^{K''}} = \frac{\mu \theta(z)}{1 - 3\varepsilon \theta(z)}, \\ \frac{\partial^{K'''} w'''}{\partial t^{K'''}} = \frac{\mu \theta(z)}{1 - 3\varepsilon \theta(z)} \end{cases}$$

admet un groupe d'intégrales satisfaisant aux conditions initiales

$$(52) \quad \begin{cases} w' = \frac{\partial w'}{\partial t} = \dots = \frac{\partial^{K'-1} w'}{\partial t^{K'-1}} = 0 \\ w'' = \frac{\partial w''}{\partial t} = \dots = \frac{\partial^{K''-1} w''}{\partial t^{K''-1}} = 0 \\ w''' = \frac{\partial w'''}{\partial t} = \dots = \frac{\partial^{K'''-1} w'''}{\partial t^{K'''-1}} = 0 \end{cases} \text{ pour } t = 0.$$

Les dérivées restantes de ces intégrales ont d'ailleurs, pour $t = 0$, des valeurs initiales essentiellement positives.

D'abord, l'existence d'un groupe d'intégrales répondant aux conditions initiales (52) résulte immédiatement de l'alinéa IV du présent numéro 22.

D'un autre côté, si l'on développe $\theta(z)$ par la formule

$$1 + z + z^2 + \dots,$$

et que, après avoir remplacé z par le second membre de (50), on ordonne le résultat par rapport aux puissances de

$$\begin{aligned} & t, \\ & w', \quad \frac{\partial w'}{\partial t}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{K'-1} w'}{\partial t^{K'-1}}, \\ & w'', \quad \frac{\partial w''}{\partial t}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{K''-1} w''}{\partial t^{K''-1}}, \\ & w''', \quad \frac{\partial w'''}{\partial t}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{K'''-1} w'''}{\partial t^{K'''-1}}, \end{aligned}$$

on voit immédiatement que les valeurs initiales de la fonction ainsi ob-

tenue et de ses dérivées partielles de tous ordres sont essentiellement positives. Il en est de même de la fonction $\frac{1}{1-3\varepsilon\theta(z)}$, qu'on peut, à cause de $\varepsilon < \frac{1}{3}$, développer suivant la formule

$$1 + 3\varepsilon\theta + 3^2\varepsilon^2\theta^2 + \dots,$$

par suite enfin du produit

$$\mu\theta(z) \cdot \frac{1}{1-3\varepsilon\theta(z)},$$

second membre commun aux équations du système (51). Les valeurs initiales des dérivées principales de nos intégrales jouissent donc, elles aussi, de la propriété annoncée: car l'attribution aux quantités

$$t, w', w'', w'''$$

des cotes respectives

$$1, -K', -K'', -K'''$$

met tout d'abord en évidence la nature orthonome du système (51), et, cela étant, on aperçoit sans peine que le calcul des valeurs initiales des dérivées principales, effectué de proche en proche pour les classes successives à l'aide des relations primitives, conduit nécessairement à des résultats tous positifs.

Nous désignerons par $W'(t)$, $W''(t)$, $W'''(t)$ les intégrales considérées du système (51).

Nous ferons en outre observer ce qui suit.

Si l'on nomme $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon''_1, \varepsilon''_2, \dots, \varepsilon'''_1, \varepsilon'''_2, \dots$, des quantités positives (en nombre limité) vérifiant les relations

$$\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \dots = \varepsilon,$$

$$\varepsilon''_1 + \varepsilon''_2 + \dots = \varepsilon,$$

$$\varepsilon'''_1 + \varepsilon'''_2 + \dots = \varepsilon,$$

le système (51) entraîne évidemment comme conséquence

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^{K'} w'}{\partial t^{K'}} = \mu \theta(z) + \varepsilon'_1 \theta(z) \frac{\partial^{K'} w'}{\partial t^{K'}} + \varepsilon'_2 \theta(z) \frac{\partial^{K'} w'}{\partial t^{K'}} + \dots \\ \quad + \varepsilon''_1 \theta(z) \frac{\partial^{K''} w''}{\partial t^{K''}} + \varepsilon''_2 \theta(z) \frac{\partial^{K''} w''}{\partial t^{K''}} + \dots \\ \quad + \varepsilon'''_1 \theta(z) \frac{\partial^{K'''} w'''}{\partial t^{K'''}} + \varepsilon'''_2 \theta(z) \frac{\partial^{K'''} w'''}{\partial t^{K'''}} + \dots, \\ \frac{\partial^{K''} w''}{\partial t^{K''}} = \text{idem}, \\ \frac{\partial^{K'''} w'''}{\partial t^{K'''}} = \text{idem}. \end{array} \right.$$

D'ailleurs, le système (51) entraînant aussi comme conséquence les relations

$$\frac{\mu \varepsilon \theta^2(z)}{1 - 3\varepsilon \theta(z)} = \varepsilon \theta(z) \frac{\partial^{K'} w'}{\partial t^{K'}} = \varepsilon \theta(z) \frac{\partial^{K''} w''}{\partial t^{K''}} = \varepsilon \theta(z) \frac{\partial^{K'''} w'''}{\partial t^{K'''}} ,$$

si, dans l'une quelconque des équations (53), on remplace telle ou telle des sommes

$$\begin{aligned} & \varepsilon'_1 \theta(z) \frac{\partial^{K'} w'}{\partial t^{K'}} + \varepsilon'_2 \theta(z) \frac{\partial^{K'} w'}{\partial t^{K'}} + \dots, \\ & \varepsilon''_1 \theta(z) \frac{\partial^{K''} w''}{\partial t^{K''}} + \varepsilon''_2 \theta(z) \frac{\partial^{K''} w''}{\partial t^{K''}} + \dots, \\ & \varepsilon'''_1 \theta(z) \frac{\partial^{K'''} w'''}{\partial t^{K'''}} + \varepsilon'''_2 \theta(z) \frac{\partial^{K'''} w'''}{\partial t^{K'''}} + \dots, \end{aligned}$$

par la quantité $\frac{\mu \varepsilon \theta^2(z)}{1 - 3\varepsilon \theta(z)}$, on tombe encore sur une conséquence de (51).

VIII. *Le système déduit de (S) en y remplaçant les coefficients des seconds membres par certaines majorantes relatives aux valeurs initiales*

$$x_0, y_0, \dots, 0, \dots$$

des quantités

$$x, y, \dots, f, \dots$$

possède un groupe d'intégrales qui s'annulent, ainsi que leur dérivées secondaires, pour

$$x - x_0 = y - y_0 = \dots = 0,$$

tandis que toutes leurs autres dérivées ont des valeurs initiales positives.

Aux variables indépendantes et aux fonctions inconnues

$$x, y, \dots, u', v', \dots, u'', v'', \dots, u''', v''', \dots$$

du système (S) faisons correspondre autant de constantes positives

$$(54) \quad \xi, \eta, \dots, \nu', \psi', \dots, \nu'', \psi'', \dots, \nu''', \psi''', \dots,$$

que nous nommerons, pour abrégé, leurs *poids* respectifs; considérant ensuite l'une quelconque des dérivées des inconnues, appelons *poids* de cette dérivée le quotient obtenu en divisant le poids de la fonction à laquelle elle appartient par ceux de toutes les variables de différentiation, distinctes ou non; désignons enfin d'une manière générale par φ, \dots les poids respectifs des quantités \mathbf{f}, \dots

Cela posé, considérons une équation, conséquence de (51), subsistant entre

$$\sim, \frac{\partial K' w'}{\partial t^{K'}}; \frac{\partial K'' w''}{\partial t^{K''}}, \frac{\partial K''' w'''}{\partial t^{K'''}};$$

et remplaçons-y la somme z par la somme

$$s = \xi^*(x - x_0) + \eta(y - y_0) + \dots + \varphi f + \dots;$$

substituons d'autre part à la dérivée $\frac{\partial^{K'} w'}{\partial t^{K'}}$, qui peut figurer dans divers termes de l'équation considérée, divers produits obtenus chacun en multipliant l'une quelconque des dérivées dominantes de u', v', \dots par son poids; effectuons enfin des substitutions analogues pour chacune des dérivées $\frac{\partial^{K''} w''}{\partial t^{K''}}$ et pour chacune des dérivées $\frac{\partial^{K'''} w'''}{\partial t^{K'''}}$: la relation résultante sera, comme il est bien facile de s'en rendre compte, identiquement vérifiée pour

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} u' &= \frac{1}{\zeta'} W' [\tilde{z}(x - x_0) + \eta(y - y_0) + \dots], \\ v' &= \frac{1}{\zeta'} W' [\tilde{z}(x - x_0) + \eta(y - y_0) + \dots], \\ u'' &= \frac{1}{\zeta''} W'' [\tilde{z}(x - x_0) + \eta(y - y_0) + \dots], \\ v'' &= \frac{1}{\zeta''} W'' [\tilde{z}(x - x_0) + \eta(y - y_0) + \dots], \\ u''' &= \frac{1}{\zeta'''} W''' [\tilde{z}(x - x_0) + \eta(y - y_0) + \dots], \\ v''' &= \frac{1}{\zeta'''} W''' [\tilde{z}(x - x_0) + \eta(y - y_0) + \dots], \end{aligned} \right.$$

Prenons maintenant, dans le système (S), une équation quelconque (5), et désignons par q' , q'' , q''' les nombres respectifs (≥ 0) des dérivées dominantes de première, seconde, troisième catégorie, qui figurent *effectivement* dans son second membre; par

$$\begin{aligned} \Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_{q'}, \\ \Delta''_1, \Delta''_2, \dots, \Delta''_{q''}, \\ \Delta'''_1, \Delta'''_2, \dots, \Delta'''_{q'''} \end{aligned}$$

ces dérivées respectives, par

$$\begin{aligned} \bar{\omega}'_1, \bar{\omega}'_2, \dots, \bar{\omega}'_{q'}, \\ \bar{\omega}''_1, \bar{\omega}''_2, \dots, \bar{\omega}''_{q''}, \\ \bar{\omega}'''_1, \bar{\omega}'''_2, \dots, \bar{\omega}'''_{q'''} \end{aligned}$$

leurs poids respectifs, par Δ le premier membre de (5), et par $\bar{\omega}$ le poids de Δ . Si l'entier q' n'est pas nul, on remplacera l'ensemble des termes en $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_{q'}$ qui figurent dans le second membre de (5) par

$$\frac{\varepsilon}{q'} \bar{\omega}'_1 \theta(s) \Delta'_1 + \frac{\varepsilon}{q'} \bar{\omega}'_2 \theta(s) \Delta'_2 + \dots + \frac{\varepsilon}{q'} \bar{\omega}'_{q'} \theta(s) \Delta'_{q'};$$

si q' est nul, on remplacera cet ensemble absent par $\frac{\mu \varepsilon \theta^2(s)}{1 - 3\varepsilon \theta(s)}$. On effectuera des substitutions analogues pour les termes en $\Delta''_1, \Delta''_2, \dots, \Delta''_{q''}$, et pour les termes en $\Delta'''_1, \Delta'''_2, \dots, \Delta'''_{q'''}$ qui figurent dans le second membre de (5). Quant au terme indépendant des dérivées dominantes, on le remplacera par $\mu \theta(s)$. On remplacera enfin le premier membre Δ par $\bar{\omega} \Delta$, et on multipliera les deux membres par $\frac{1}{\bar{\omega}}$. L'équation finalement obtenue (5) ne différera alors de (5) que par les coefficients, fonctions de x, y, \dots, f, \dots , qui figurent dans le second membre. A chaque équation du système (S) on fera correspondre de même une équation telle que (5); on obtiendra finalement un système (S) ne différant de (S) que par les coefficients des seconds membres, et identiquement vérifié par la substitution aux inconnues des seconds membres de (55), c'est à dire de fonctions qui, elles et toutes leurs dérivées secondaires, prennent

en x_0, y_0, \dots des valeurs initiales nulles, tandis que leurs dérivées restantes y prennent des valeurs initiales positives. Chacun des nouveaux coefficients s'obtient d'ailleurs en faisant le produit de $\theta(s)$ par quelque constante positive, et y ajoutant parfois le produit de $\frac{\theta^2(s)}{1 - 3\varepsilon\theta(s)}$ par quelque autre constante positive. La première de ces deux constantes, qui seule est importante à considérer, et que nous nommerons, pour abrégé, *caractéristique* du coefficient, dépend de ε ou de μ suivant que le coefficient où elle figure multiplie ou non quelque dérivée dominante. Son produit par $\theta(s)$ est identique au coefficient de $\langle\!\langle S \rangle\!\rangle$ dont il s'agit, ou l'admet pour majorante relativement aux valeurs $x_0, y_0, \dots, 0, \dots$ de x, y, \dots, f, \dots .

La constante positive ε étant choisie sous la seule condition d'être inférieure à $\frac{1}{3}$, fixons maintenant les valeurs des constantes positives (54). Considérons à cet effet le domaine des valeurs

$$(56) \quad x_0, y_0, \dots, 0, \dots$$

à l'intérieur duquel les coefficients des seconds membres de (S) sont développables, et soient

r une quantité positive moindre que tous ses rayons;

M une quantité positive supérieure à toutes celles que l'on obtient, lorsque, après avoir développé les divers coefficients du système (S) à partir des valeurs (56), on remplace dans ces développements les coefficients par leurs modules, et les quantités

$$x - x_0, y - y_0, \dots, f, \dots$$

par la constante r ; ¹

¹ Dans la démonstration du n° 31 (*infra*), on remplacera cette phrase par la suivante:

» M une quantité positive supérieure à toutes celles que l'on obtient, lorsque, après avoir développé à partir des valeurs (56) les coefficients des termes normaux du système (S) et les dérivées premières des coefficients des termes anormaux, on remplace dans ces développements les coefficients par leurs modules, et les quantités

$$x - x_0, y - y_0, \dots, f, \dots$$

par la constante r . »

P la plus grande des deux quantités $M, \frac{1}{r}$;

Q un entier positif supérieur à la plus grande valeur que puisse atteindre, pour une équation quelconque du système (S), le nombre des dérivées dominantes figurant au second membre;

h_2, h_3, \dots, h_p les plus petites valeurs que puissent respectivement atteindre les cotes seconde, troisième, \dots , $p^{\text{ième}}$ des diverses variables indépendantes;

G_2, G_3, \dots, G_p les plus grandes valeurs que puissent respectivement atteindre celles des quantités f, \dots , c'est à dire des fonctions inconnues et de leurs dérivées secondaires;

j_2, j_3, \dots, j_p les plus petites valeurs, et J_2, J_3, \dots, J_p les plus grandes valeurs que puissent respectivement atteindre celles des diverses dérivées dominantes.

Désignant en outre par

$$\alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$$

$p + 1$ constantes positives dont les valeurs vont être fixées dans un instant, nous prendrons: 1° pour le poids d'une variable indépendante, un produit de puissances de $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, \dots , $p^{\text{ième}}$ de cette variable; 2° pour le poids d'une fonction inconnue, le quotient de α par des puissances de $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, \dots , $p^{\text{ième}}$ de la fonction inconnue considérée. — Le poids d'une dérivée de fonction inconnue aura alors pour valeur le quotient de α par des puissances de $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, \dots , $p^{\text{ième}}$ de la dérivée dont il s'agit.

Cela étant,¹ on déterminera successivement les quantités $\theta_p, \theta_{p-1}, \dots, \theta_2, \theta_1$ et α de manière à vérifier les inégalités:

¹ Dans la démonstration du n° 31 (*infra*), on remplacera la fin du présent alinéa VIII par ce qui suit:

»Cela étant, on déterminera successivement les quantités $\theta_p, \theta_{p-1}, \dots, \theta_2, \theta_1$ et α de manière à vérifier les inégalités

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_p > 1, \\ \theta_p > \frac{PQ}{\varepsilon}; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \theta_{p-1} > 1, \\ \theta_{p-1} > \frac{PQ}{\varepsilon} \theta_p^{I_p-j_p}; \end{array} \right. \\ \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \theta_2 > 1, \\ \theta_2 > \frac{PQ}{\varepsilon} \theta_3^{I_3-j_3} \dots \theta_p^{I_p-j_p}; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 > 1, \\ \theta_1 > \frac{PQ}{\varepsilon} \theta_2^{I_2-j_2} \theta_3^{I_3-j_3} \dots \theta_p^{I_p-j_p}, \\ \theta_1 > P \theta_2^{I_2-h_2} \theta_3^{I_3-h_3} \dots \theta_p^{I_p-h_p}, \\ \alpha > P \theta_1^{I_1-1} \theta_2^{I_2} \theta_3^{I_3} \dots \theta_p^{I_p}. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \theta_p &> 1, \\ \theta_p &> \frac{PQ}{\varepsilon}; \\ \theta_{j-1} &> 1, \\ \theta_{j-1} &> \frac{PQ}{\varepsilon} \theta_p^{j-1}; \\ \theta_2 &> 1, \\ \theta_1 &> \frac{PQ}{\varepsilon} \theta_p^{j_2-j_1} \theta_p^{j_3-j_2} \dots \theta_p^{j_p-j_{p-1}}, \\ \theta_1 &> \frac{PQ}{\varepsilon} \theta_p^{j_2-j_1} \theta_p^{j_3-j_2} \dots \theta_p^{j_p-j_{p-1}}, \\ \theta_1 &> \frac{PQ}{\varepsilon} \theta_p^{j_2-j_1} \theta_p^{j_3-j_2} \dots \theta_p^{j_p-j_{p-1}}, \\ \theta_1 &> \frac{PQ}{\varepsilon} \theta_p^{j_2-j_1} \theta_p^{j_3-j_2} \dots \theta_p^{j_p-j_{p-1}}, \\ a &> P \theta_1^{l-1} \theta_2^{G_2} \theta_3^{G_3} \dots \theta_p^{G_p}, \\ a &> \frac{PQ}{\varepsilon} \theta_1^{l-1} \theta_2^{j_2-j_1+G_2} \theta_3^{j_3-j_2+G_3} \dots \theta_p^{j_p-j_{p-1}+G_p} \end{aligned}$$

Dans ces conditions, les quantités $\xi, \eta, \dots, \varphi, \dots$ et les caractéristiques dépendant de ε ne peuvent manquer, comme nous allons le voir, d'être toutes supérieures à P .

et on raisonnera comme il suit pour établir que les coefficients du système désigné par ((S)) sont majorants pour les coefficients correspondants de (S).

En premier lieu, les constantes $\xi, \eta, \dots, \varphi, \dots$ ne peuvent manquer d'être toutes supérieures à P . Car, les quantités $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ étant toutes plus grandes que 1, et les cotes premières des variables indépendantes au moins égales à 1, les quantités ξ, η, \dots sont toutes au moins égales à

$$\theta_1 \theta_2^{h_2} \theta_3^{h_3} \dots \theta_p^{h_p},$$

par suite supérieures à P ; et, d'un autre côté, puisque les quantités \mathbf{f}, \dots ont toutes des cotes premières moindres que 1, les quantités φ, \dots sont toutes au moins égales à

$$\frac{\alpha}{\theta_1^{i_1-1} \theta_2^{i_2} \theta_3^{i_3} \dots \theta_p^{i_p}},$$

par suite aussi supérieures à P .

Si l'on considère maintenant une équation quelconque du système ((S)), et, dans le second membre de cette équation, une dérivée dominante qui soit normale par rapport au premier membre, la dérivée dont il s'agit a nécessairement: soit une cote première inférieure à celle du premier membre; soit une cote première égale à celle du premier membre, avec une cote seconde inférieure; ...; soit des cotes première, seconde, ..., $(p-2)^{\text{ième}}$ respectivement égales à celles du premier membre avec une cote $(p-1)^{\text{ième}}$ inférieure; soit enfin des cotes première, seconde, ..., $(p-1)^{\text{ième}}$ respectivement égales à celles du premier membre avec une cote $p^{\text{ième}}$ inférieure. Comme les quantités $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ sont toutes supérieures à 1, les caractéristiques dépendant de ε dans les termes normaux des seconds membres de ((S)) ont donc, suivant le cas, une valeur supérieure à l'une ou à l'autre des quantités

$$\frac{\varepsilon}{Q} \theta_p^{j_p - J_p} \dots \theta_3^{j_3 - J_3} \theta_2^{j_2 - J_2} \theta_1,$$

$$\frac{\varepsilon}{Q} \theta_p^{j_p - J_p} \dots \theta_3^{j_3 - J_3} \theta_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{\varepsilon}{Q} \theta_p^{j_p - J_p} \theta_{p-1},$$

$$\frac{\varepsilon}{Q} \theta_p;$$

elles sont donc toutes supérieures à P .

Passons aux termes anormaux. Le coefficient d'un terme anormal a d'abord, dans ((S)), une valeur initiale positive, au lieu d'une valeur initiale nulle qu'il possède dans (S). On observera ensuite que la dérivée première, par rapport à l'une quelconque des quantités

Effectivement, les quantités $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ étant toutes supérieures à 1, et les cotes premières des variables indépendantes au moins égales à 1, les quantités ξ, η, \dots sont toutes au moins égales à

$$\theta_1 \theta_2^{h_2} \theta_3^{h_3} \dots \theta_p^{h_p},$$

par suite supérieures à P ; et, d'un autre côté, puisque les quantités f, \dots ont toutes des cotes premières moindres que 1 , les quantités φ, \dots sont toutes au moins égales à

$$\frac{\alpha}{\theta_1^{l-1} \theta_2^{g_2} \theta_3^{g_3} \dots \theta_p^{g_p}},$$

par suite aussi supérieures à P .

x, y, \dots, f, \dots , du coefficient d'un terme anormal, est le produit de $\theta^i(s)$ par une constante positive, et que cette constante positive est au moins égale à la plus petite des quantités

$$\frac{\xi}{Q} \theta_2^{j_2-J_2} \theta_3^{j_3-J_3} \dots \theta_p^{j_p-J_p},$$

$$\frac{\eta}{Q} \theta_2^{j_2-J_2} \theta_3^{j_3-J_3} \dots \theta_p^{j_p-J_p},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{\varphi}{Q} \theta_2^{j_2-J_2} \theta_3^{j_3-J_3} \dots \theta_p^{j_p-J_p},$$

$$\dots \dots \dots$$

par suite au moins égale à la plus petite des deux quantités

$$\frac{\xi}{Q} \theta_1 \theta_2^{j_2+J_2-J_2} \theta_3^{j_3+J_3-J_3} \dots \theta_p^{j_p+J_p-J_p},$$

$$\frac{\xi}{Q} \frac{\alpha}{\theta_1^{l-1}} \theta_2^{j_2-J_2-G_2} \theta_3^{j_3-J_3-G_3} \dots \theta_p^{j_p-J_p-G_p},$$

par suite encore supérieure à P .

Finalement, si, désignant par ω le poids maximum des premiers membres du système ((S)), on prend $\mu > P\omega$, toute caractéristique dépendant de μ , étant au moins égale à $\frac{P}{\omega}$, sera, elle aussi, supérieure à P .

En rapprochant tout ce qui précède des alinéas I et II du n° 22, on voit sans peine que les divers coefficients du système (S) admettent comme majorantes, par rapport aux valeurs (56), les coefficients correspondants du système ((S)). Nous avons d'ailleurs déjà remarqué que ce dernier admet un groupe d'intégrales qui, elles et toutes leurs dérivées secondaires, prennent en x_0, y_0, \dots des valeurs initiales nulles, tandis que leurs dérivées restantes y prennent des valeurs initiales positives.»

Si l'on considère maintenant une équation quelconque du système $\langle\langle S \rangle\rangle$, chacune des dérivées dominantes figurant au second membre a nécessairement: soit une cote première inférieure à celle du premier membre; soit une cote première égale à celle du premier membre, avec une cote seconde inférieure; ...; soit des cotes première, seconde, ..., $(p-2)^{\text{ième}}$ respectivement égales à celles du premier membre, avec une cote $(p-1)^{\text{ième}}$ inférieure; soit enfin des cotes première, seconde, ..., $(p-1)^{\text{ième}}$ respectivement égales à celle du premier membre, avec une cote $p^{\text{ième}}$ inférieure. Comme les quantités $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ sont toutes supérieures à 1, les caractéristiques dépendant de ε ont donc, suivant le cas, une valeur supérieure à l'une ou à l'autre des quantités

$$\frac{\varepsilon}{Q} \theta_p^{j_p - j_p} \dots \theta_3^{j_3 - j_3} \theta_2^{j_2 - j_2} \theta_1,$$

$$\frac{\varepsilon}{Q} \theta_p^{j_p - j_p} \dots \theta_3^{j_3 - j_3} \theta_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{\varepsilon}{Q} \theta_p^{j_p - j_p} \theta_{p-1},$$

$$\frac{\varepsilon}{Q} \theta_p;$$

elles sont donc toutes supérieures à P .

Finalement, si, désignant par ω le poids maximum des premiers membres du système $\langle\langle S \rangle\rangle$, on prend $\mu > P\omega$, toute caractéristique dépendant de μ , étant au moins égale à $\frac{\mu}{\omega}$, sera, par suite, supérieure à P .

En rapprochant des alinéas I et II tout ce qui précède, on voit sans peine que les divers coefficients du système $\langle S \rangle$ admettent comme majorantes, par rapport aux valeurs (56), les coefficients correspondants du système $\langle\langle S \rangle\rangle$. Nous avons d'ailleurs déjà remarqué que ce dernier admet un groupe d'intégrales qui, elles et toutes leurs dérivées secondaires, prennent en x_0, y_0, \dots des valeurs initiales nulles, tandis que leurs dérivées restantes y prennent des valeurs initiales positives.

IX. *Les intégrales hypothétiques de $\langle S \rangle$ qui, pour $x - x_0 = y - y_0 = \dots = 0$, ont des déterminations initiales identiquement nulles, ont leurs développements nécessairement convergents, ce qui achève la démonstration.*

Il suffit, pour l'établir, de prouver que, dans le système $\langle\langle S \rangle\rangle$, les dérivées de tous ordres des intégrales effectives dont nous venons de constater l'existence ont des valeurs initiales positives (ou nulles), supérieures (ou égales) aux modules des valeurs initiales que doivent prendre les dérivées semblables des intégrales hypothétiques de (S) . Le point en question se trouve déjà établi pour les dérivées paramétriques, car leurs valeurs initiales sont nulles dans le système (S) , tandis qu'elles sont positives ou nulles dans le système $\langle\langle S \rangle\rangle$: il reste donc à l'établir pour les dérivées principales.

Or, si l'on prend dans les systèmes (S) et $\langle\langle S \rangle\rangle$ deux relations primitives correspondantes (p) et $\langle\langle p \rangle\rangle$, le second membre de la première est une somme de produits pouvant contenir en facteurs quatre sortes de quantités, savoir: certains entiers positifs; certains coefficients des seconds membres de (S) ; certaines dérivées partielles de ces coefficients; enfin certaines dérivées, principales ou paramétriques, des fonctions inconnues. Et le second membre de la deuxième est composé exactement de la même façon avec les entiers positifs dont il s'agit, les majorantes des coefficients de (S) , leurs dérivées partielles, et les dérivées principales ou paramétriques des fonctions inconnues. D'un autre côté, comme nous l'avons déjà dit, les valeurs initiales des dérivées paramétriques des intégrales effectives de $\langle\langle S \rangle\rangle$ sont positives, et supérieures aux modules de celles que possèdent les dérivées semblables des intégrales hypothétiques de (S) . Si donc on ordonne par rapport aux dérivées principales les seconds membres de (p) et $\langle\langle p \rangle\rangle$, et qu'on y remplace par leurs valeurs initiales les variables, les inconnues, et les dérivées paramétriques, le second des polynômes ainsi obtenus aura ses coefficients positifs et supérieurs aux modules des coefficients correspondants du premier. On voit alors, par un raisonnement effectué de proche en proche pour les classes successives, que les valeurs initiales des dérivées principales des intégrales effectives de $\langle\langle S \rangle\rangle$ sont positives, et supérieures aux modules de celles que possèdent les dérivées semblables des intégrales hypothétiques de (S) : c'est ce qui restait à établir.¹

¹ Dans la démonstration du n° 31 (*infra*), on remplacera la dernière phrase de l'alinéa IX par la suivante:

» En observant maintenant que toutes les dérivées principales anormales par rapport

premier membre développable dans un domaine de ces valeurs, si de plus la dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial x}$ ne s'annule pas pour les valeurs dont il s'agit, l'équation (57) équivaut algébriquement, dans le voisinage de x_0, y_0, \dots , à une équation

$$(58) \quad x = \Xi(y, \dots),$$

dont le second membre, développable dans un domaine des valeurs y_0, \dots , se réduit, pour ces dernières, à x_0 .

Ecrire la formule (58), c'est ce qu'on appelle résoudre au point de vue algébrique l'équation (57) par rapport à x dans le voisinage de x_0, y_0, \dots .

24. Etant donné un système différentiel S , dont les second membres sont nuls et les premiers développables dans quelque domaine, on peut, dans les circonstances générales, et sauf la rencontre de relations non identiques entre les seules variables indépendantes, en déduire sans changement de variables ni intégration un second système admettant les mêmes intégrales, et composé: 1° d'un groupe orthonome passif où se trouvent engagées certaines des inconnues du système proposé; 2° d'un groupe de relations exprimant les inconnues restantes à l'aide des variables indépendantes, des inconnues du premier groupe, et des dérivées de celles-ci.¹

(Il va sans dire que ces deux groupes de relations peuvent éventuellement se réduire à un seul.)

Nous présenterons tout d'abord une remarque générale sur le genre de raisonnement que l'on est obligé de faire dans une semblable question, quel que soit d'ailleurs le mode de réduction adopté. On doit en effet, quel que soit ce mode, résoudre algébriquement par rapport aux fonctions inconnues et à leurs dérivées, considérées dans un certain ordre, certaines relations dont les unes sont données, et dont les autres s'introduisent au fur et à mesure des calculs. Or, on suppose essentiellement que chacune des résolutions successives, auxquelles on est ainsi conduit, peut s'effectuer conformément au principe du numéro précédent 23, sans que les résolutions antérieures en soient troublées. Cette présomption,

¹ Cette proposition et la démonstration qui suit ont été publiées, en juin 1893, dans les Annales de l'Ecole Normale (p. 151 et suiv.): on trouvera toutefois, dans la rédaction actuelle, quelques légères améliorations.

à laquelle les faits peuvent, dans tel ou tel cas, ne pas donner raison, se justifie toutefois assez fréquemment pour que nos déductions conservent toute leur valeur générale: mais, à vrai dire, la très-grande généralité du problème posé ne nous permettra d'obtenir, dans les raisonnements de l'alinéa III (*infra*), ni une rigueur absolue, ni une précision irréprochable.

Cela posé, voici comment on peut s'y prendre pour établir la proposition générale formulée ci-dessus.

I. *Si dans un système différentiel, résolu par rapport à certaines dérivées des inconnues, on attribue, conformément aux indications du n° 6, p cotes à chacune des variables et des inconnues, et si chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités normales par rapport au premier membre correspondant, on peut, sans changer les cotes, en déduire un système orthoïque équivalent, composé d'un nombre égal d'équations ayant respectivement les mêmes premiers membres.*

Si le système donné \mathfrak{H} n'est pas orthoïque, on désignera par C la cote première maxima de ses premiers membres; puis, de l'ensemble des relations déduites de \mathfrak{H} par différentiations, on extraira un groupe \mathfrak{H}' choisi de telle sorte, que, dans le système simultané

$$(59) \quad (\mathfrak{H}, \mathfrak{H}'),$$

chacune des dérivées principales (12) dont la cote première ne surpasse pas C figure comme premier membre une fois et une seule. Les équations du système (59), rangées à la suite les unes des autres d'après la classe croissante de leurs premiers membres (8), sont successivement résolubles par rapport aux dérivées qui figurent dans ces premiers membres, et, en effectuant la résolution dont il s'agit, nous sommes conduit à un système

$$(60) \quad (\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'),$$

composé de deux groupes d'équations dont les premiers membres sont respectivement identiques à ceux des groupes \mathfrak{H} et \mathfrak{H}' , tandis que les seconds membres, indépendants de toute quantité anormale, le sont en outre de toute dérivée principale. De là résulte immédiatement la nature orthoïque du système \mathfrak{R} , et nous allons prouver maintenant qu'au point de vue de l'intégration ce système équivaut à \mathfrak{H} .

1° Toute solution de \mathfrak{H} vérifie \mathfrak{R} .

Car elle vérifie (59), et par conséquent aussi (60).

2° Toute solution de \mathfrak{R} vérifie \mathfrak{H} .

Effectivement, les équations du système (59) étant disposées les unes à la suite des autres dans leur ordre de résolution successive, et celles du système (60) dans l'ordre correspondant, désignons par \mathfrak{h}_i et \mathfrak{r}_i les équations de rang i de ces deux systèmes respectifs. Si l'on observe que la relation \mathfrak{h}_1 fait nécessairement partie du groupe \mathfrak{H} , que dès lors \mathfrak{r}_1 fait partie du groupe \mathfrak{R} , et que, les relations \mathfrak{h}_1 et \mathfrak{r}_1 étant identiques entre elles, toute solution de \mathfrak{R} vérifie \mathfrak{h}_1 et \mathfrak{r}_1 , il nous suffit évidemment de faire voir qu'en supposant vérifiées les diverses équations du système \mathfrak{R} et celles des deux suites

$$\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \dots, \mathfrak{h}_q,$$

$$\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots, \mathfrak{r}_q,$$

les équations $\mathfrak{h}_{q+1}, \mathfrak{r}_{q+1}$ le sont également. Or, si \mathfrak{r}_{q+1} fait partie du groupe \mathfrak{R} , elle est vérifiée par hypothèse, donc aussi \mathfrak{h}_{q+1} , qui peut être considérée comme une combinaison de $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots, \mathfrak{r}_q, \mathfrak{r}_{q+1}$. Si \mathfrak{r}_{q+1} fait partie du groupe \mathfrak{R}' , \mathfrak{h}_{q+1} fait partie du groupe \mathfrak{H}' , et peut se déduire par différentiation de quelque-une des équations $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \dots, \mathfrak{h}_q$; elle est donc vérifiée en même temps que ces dernières, par suite aussi \mathfrak{r}_{q+1} , qui s'obtient par une combinaison de $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots, \mathfrak{r}_q, \mathfrak{h}_{q+1}$.

II. Si l'on considère diverses fonctions

$$(61) \quad u, v, \dots, w$$

des variables indépendantes

$$x, y, \dots, z,$$

et que l'on forme successivement, avec des dérivées de u, v, \dots, w , divers ensembles (limités) dont chacun ne contienne que des dérivées paramétriques relativement à tous les précédents, le nombre de ces ensembles est forcément limité.¹

¹ Cette proposition, dont j'ai publié la démonstration en juin 1893 (Annales de l'Ecole Normale, 1893, p. 171, 172 et 173), contient comme cas particulier la sui-

sembles postérieurs à E' . Si l'on désigne par E'' l'un de ces derniers ensembles, et par

$$(64) \quad \frac{\partial^{l+\mu''+\dots+\nu''} u}{\partial x^l \partial y^{\mu''} \dots \partial z^{\nu''}}$$

l'une des dérivées de u de la catégorie (63) qui figurent dans E'' , il y a encore, à la suite de E'' , un nombre illimité d'ensembles contenant des dérivées de u de cette même catégorie; pour chacune des dérivées en question, l'un au moins des ordres partiels μ, \dots, ν relatifs à y, \dots, z est inférieur à l'ordre partiel correspondant de (64), et chacune d'elles appartient, à plus forte raison, à quelqueune des

$$(\mu'' + 1) + \dots + (\nu'' + 1)$$

catégories que définissent respectivement les couples de relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = l, \\ \mu = 0; \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \lambda = l, \\ \mu = 1; \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \lambda = l, \\ \mu = 2; \end{array} \right\} \dots; \left\{ \begin{array}{l} \lambda = l, \\ \mu = \mu''; \end{array} \right\}$$

$$\dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \lambda = l, \\ \nu = 0; \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \lambda = l, \\ \nu = 1; \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \lambda = l, \\ \nu = 2; \end{array} \right\} \dots; \left\{ \begin{array}{l} \lambda = l, \\ \nu = \nu''. \end{array} \right\}$$

De ces nouvelles catégories, une au moins, par exemple

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = l, \\ \mu = m, \end{array} \right\}$$

fournit donc nécessairement des dérivées de u à un nombre illimité d'ensembles postérieurs à E'' . En poursuivant ce raisonnement et désignant par \dots, n des entiers convenablement choisis, on arrivera à cette conclusion absurde que la catégorie

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = l, \\ \mu = m, \\ \dots \dots \dots \\ \nu = n, \end{array} \right\}$$

ne comprenant évidemment qu'une seule dérivée de u , en fournit à un nombre illimité d'ensembles.

III. Pour démontrer la proposition dont l'énoncé figure en tête du présent numéro 24, nous adopterons pour les variables, et aussi pour les inconnues engagées dans le système S , un ordre déterminé, et nous attribuerons des cotes à toutes ces quantités, conformément aux indications données dans l'exemple II du n° 21. Considérant alors la suite taxique, nous chercherons quel est, dans cette suite, le terme le plus éloigné (vers la gauche) qui figure effectivement dans les équations du système, nous résoudrons par rapport au terme dont il s'agit l'une des équations où il figure, et nous en porterons la valeur dans les équations restantes: nous aurons ainsi, outre la formule de résolution, un nouveau système S' contenant une équation de moins que le proposé, et dans lequel ne figure plus la dérivée éliminée ni aucune des dérivées situées à sa gauche dans la suite taxique. Nous considérerons, parmi les dérivées restantes, la plus éloignée (vers la gauche) de celles qui figurent effectivement dans S' , nous résoudrons par rapport à elle l'une des équations de S' où elle figure, et nous en porterons la valeur dans les équations restantes, ce qui nous donnera, outre les deux formules successives de résolution, un troisième système contenant deux équations de moins que le proposé. Et ainsi de suite. En d'autres termes, nous déduirons des équations données, par résolutions successives, des formules dont les premiers membres se trouvent rangés suivant l'ordre taxique, et, en poursuivant ce calcul jusqu'à ce que les équations non encore résolues ne contiennent plus aucune dérivée, nous tomberons sur un système composé de deux groupes, l'un différentiel, l'autre fini. Si le groupe fini, résolu par rapport aux fonctions inconnues successives, ne nous conduit pas à une relation non identique entre les seules variables indépendantes, auquel cas le système proposé serait impossible, il nous permettra d'exprimer certaines des fonctions inconnues à l'aide des autres et des variables indépendantes, et par suite aussi les dérivées des premières en fonctions composées différentielles des secondes. Le groupe différentiel pourra alors être transformé en un système d'ordre au plus égal à S , et qui sera de même nature que S , avec cette différence que le nombre des fonctions inconnues s'y trouvera diminué, ainsi que le nombre des équations. Sur ce système on opérera comme sur le proposé, et ainsi de suite. Finalement, et sauf la rencontre

d'une relation non identique entre les seules variables indépendantes, le système proposé se trouvera remplacé par un groupe différentiel exclusivement composé de relations normales, et par quelques groupes finis. Si, dans chacun de ces derniers, on tient compte de ceux qui ont été obtenus après lui, on voit que leur ensemble exprime quelques-unes des fonctions inconnues à l'aide des variables indépendantes et des fonctions inconnues restantes. Celles-ci sont seules impliquées dans le groupe différentiel, que l'on peut, en vertu de l'alinéa I, remplacer par un système taxique \mathfrak{U} , composé d'un nombre égal d'équations ayant respectivement les mêmes premiers membres.

Si le système \mathfrak{U} n'est point passif, on considérera, parmi les conditions de passivité, celles qui ne se réduisent pas à des identités, et l'on observera qu'elles constituent autant de relations auxquelles les intégrales du proposé doivent nécessairement satisfaire. De ces relations on déduira alors, par résolutions successives, des formules dont les premiers membres se trouvent rangés suivant l'ordre taxique; si, une fois ces formules obtenues, les conditions de passivité ne fournissent en outre aucune relation finie, on adjoindra au système \mathfrak{U} les formules dont il vient d'être question, et l'on substituera au système total ainsi formé, où les équations sont toutes normales, un système taxique \mathfrak{U}' , composé d'un nombre égal d'équations ayant respectivement les mêmes premiers membres (I). Si le système \mathfrak{U}' n'est pas passif, on le traitera comme le système \mathfrak{U} , et, sauf la rencontre d'un système passif, on continuera ainsi tant que les systèmes $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}', \dots$ successivement obtenus ne fourniront, par la résolution de leurs conditions de passivité, aucune relation finie. Si, à un moment donné, on tombe sur un système non passif où cette circonstance cesse d'être réalisée, on considérera le groupe différentiel et le groupe fini déduits des conditions de passivité; du groupe fini, supposé possible, on tirera un certain nombre des fonctions inconnues exprimées à l'aide des variables indépendantes et des autres fonctions inconnues, et le système dont il s'agit, préalablement augmenté du groupe différentiel, pourra, grâce aux formules résultantes, être transformé en un système de même nature que S , mais impliquant moins de fonctions inconnues encore que n'en impliquait le système \mathfrak{U} .

Sur le système résultant, on recommencera à nouveau toutes les opérations successives précédemment exécutées sur S , et ainsi de suite.

Or il est facile de voir que l'application d'un pareil mécanisme conduit forcément soit à une impossibilité, soit à un système passif, soit à l'élimination complète des dérivées. Effectivement, dans l'hypothèse contraire, elle ne pourrait manquer de conduire à un système taxique non passif qui, traité comme l'a été tout-à-l'heure le système \mathfrak{U} , engendrerait, sans réduction ultérieure du nombre des fonctions inconnues, une suite *illimitée* de systèmes également taxiques et non passifs. En comparant entre eux deux systèmes consécutifs de cette dernière suite, on trouverait dans le second deux groupes: l'un composé d'équations en nombre égal à celles du premier système et ayant respectivement les mêmes premiers membres; l'autre résolu par rapport à des dérivées paramétriques du premier. En vertu de l'alinéa II, toutes les dérivées des fonctions inconnues finiraient donc par devenir principales, et les conditions de passivité ne fourniraient plus alors que des relations finies; on serait donc conduit, contrairement à ce qui précède, soit à une impossibilité, soit à une réduction du nombre des fonctions inconnues.

25. Ainsi donc, *étant donné un système différentiel dont les seconds membres sont nuls et les premiers développables dans quelque domaine:*

Ou bien ce système n'admet aucune solution;

Ou bien il équivaut à quelque système fini que l'on en peut déduire, sans changement de variables, par de simples résolutions d'équations, combinées avec des différentiations;

Ou bien enfin son intégration se ramène de la même manière à celle de quelque système orthonome passif.

26. La réduction des systèmes différentiels quelconques aux systèmes orthonomes passifs peut encore s'opérer à l'aide d'une méthode un peu différente, fondée sur le théorème suivant:

Etant donné un système différentiel S dont les seconds membres sont nuls et les premiers développables dans quelque domaine, on peut, dans les circonstances générales, et sauf la rencontre d'une relation non identique entre les seules variables x, y, \dots , en déduire sans changement de variables ni intégration un second système admettant les mêmes intégrales, et formé de deux groupes d'équations S_1, S_2 qui jouissent de la double propriété ci-après énoncée: 1° l'une des fonctions inconnues, u , du système proposé ne se trouve plus impliquée dans le groupe S_2 ; 2° en substituant aux inconnues restantes,

v, \dots , des intégrales quelconques du groupe S_2 , on transforme le groupe S_1 , soit en une formule unique exprimant directement la fonction u à l'aide des variables x, y, \dots , soit en un système orthonome passif à la seule fonction inconnue u .¹

Nous ne traiterons provisoirement comme inconnue qu'une seule des fonctions u, v, \dots , la fonction u par exemple, nous adopterons pour les variables indépendantes un ordre déterminé, et nous attribuerons des cotes à u, x, y, \dots , conformément aux indications données dans l'exemple II du n° 21. Formant alors, avec les dérivées de u , la suite taxique, à laquelle nous adjoindrons, sur sa droite, la fonction u elle-même, nous chercherons quel est, dans cette suite, le terme le plus éloigné (vers la gauche) qui figure effectivement dans les équations du système, nous résoudrons par rapport au terme dont il s'agit l'une des équations où il figure, et nous en porterons la valeur dans les équations restantes: nous aurons ainsi, outre la formule de résolution, un nouveau système S' , contenant une équation de moins que le proposé, et dans lequel ne figure plus la dérivée éliminée, ni aucune des dérivées situées à sa gauche. Parmi les dérivées restantes, nous considérerons la plus éloignée (vers la gauche) de celles qui figurent effectivement dans S' , nous résoudrons par rapport à elle l'une des équations de S' où elle figure, et nous en porterons la valeur dans les équations restantes, ce qui nous donnera, outre les deux formules successives de résolution, un troisième système contenant deux équations de moins que le proposé. Et ainsi de suite. En poursuivant ce calcul jusqu'à ce que les équations non encore résolues ne contiennent plus la fonction u ni aucune de ses dérivées, nous tomberons sur un système composé de deux groupes, savoir: 1° les formules de résolution A successivement obtenues; 2° les équations non encore résolues B . Si parmi ces dernières figure quelque relation non identique entre les seules variables x, y, \dots , le système proposé est impossible. Si parmi les premières figure une relation a résolue par rapport à u , elle ne contient dans son second membre ni u ni aucune de ses dérivées, et la fonction u se trouve ainsi exprimée à l'aide des variables indépendantes x, y, \dots , des fonctions restantes v, \dots et de leurs dérivées; les diverses dérivées de u peuvent donc, elles aussi, s'exprimer de la même manière, et en portant

¹ Voir les Annales de l'Ecole Normale, juin 1893, p. 178, 179 et 180.

leurs valeurs, avec celle de u , dans les formules de résolution précédentes, nous obtiendrons certaines relations \mathfrak{G} ne contenant plus la fonction u ni aucune de ses dérivées: le groupe S_1 se composera alors de la relation unique \mathfrak{a} , et le groupe S_2 des relations \mathfrak{B} , \mathfrak{G} .

Si aucun de ces cas ne se présente, on pourra, en vertu d'une proposition démontrée plus haut (24, I), remplacer le système \mathfrak{A} par un système taxique \mathfrak{C} , composé d'un nombre égal d'équations ayant respectivement les mêmes premiers membres. On observera alors que les conditions de passivité du système \mathfrak{C} constituent autant de relations auxquelles les intégrales du proposé doivent nécessairement satisfaire. On traitera ces relations comme on a traité le système proposé S , et l'on en déduira de même: 1° un premier groupe \mathfrak{A}' d'équations, obtenues par résolutions successives, ayant pour premiers membres certaines dérivées de u et éventuellement cette fonction même; 2° un deuxième groupe \mathfrak{B}' de relations ne contenant plus la fonction u ni aucune de ses dérivées. Si parmi les dernières \mathfrak{B}' figure quelque relation non identique entre les seules variables x, y, \dots , le système proposé est impossible. Si dans le groupe \mathfrak{A}' figure une relation \mathfrak{a}' résolue par rapport à u , la fonction u et ses dérivées peuvent s'exprimer à l'aide des variables indépendantes x, y, \dots , des fonctions restantes v, \dots et de leurs dérivées, et en portant les valeurs ainsi obtenues dans les relations précédentes du groupe \mathfrak{A}' et dans celles du groupe \mathfrak{C} , on obtiendra certaines relations \mathfrak{G}' ne contenant plus la fonction inconnue u ni aucune de ses dérivées: le groupe S_1 se composera alors de la relation unique \mathfrak{a}' , et le groupe S_2 des relations \mathfrak{B} , \mathfrak{B}' , \mathfrak{G}' . Si le groupe \mathfrak{A}' n'existe pas, le groupe S_1 se compose des relations \mathfrak{C} , et le groupe S_2 des relations \mathfrak{B} , \mathfrak{B}' .

Si aucun de ces cas ne se présente, on pourra déduire du système $(\mathfrak{C}, \mathfrak{A}')$ un système taxique \mathfrak{C}' , composé d'un nombre égal d'équations ayant respectivement les mêmes premiers membres. Sur le système \mathfrak{C}' on opérera comme sur \mathfrak{C} , et ainsi de suite.

Or, un pareil mécanisme ne peut manquer de conduire finalement soit à une impossibilité, soit à une équation résolue par rapport à u , soit à des conditions de passivité indépendantes de u et de ses dérivées. Car, dans le cas contraire, il conduirait à une suite illimitée de systèmes taxiques possédant la propriété suivante: chacun des systèmes dont il s'agit comprendrait un premier groupe d'équations en nombre égal à

celles du système précédent et ayant respectivement les mêmes premiers membres, puis un deuxième groupe d'équations résolues par rapport à des dérivées paramétriques du précédent. Il résulte de cette circonstance que toutes les dérivées de u finiraient par devenir principales (24, II), et à partir de ce moment les conditions de passivité demeurerait finies par rapport à u , ce qui est évidemment incompatible avec notre hypothèse.

27. Au système S_2 on pourra appliquer la proposition du numéro précédent, et continuer ainsi jusqu'à épuisement des fonctions inconnues. Dès lors:

Etant donné un système différentiel dont les seconds membres sont nuls et les premiers développables dans quelque domaine, on peut, dans les circonstances générales, et sauf la rencontre de relations non identiques entre les seules variables indépendantes, en déduire, sans changement de variables ni intégration, un second système admettant les mêmes intégrales, et formé de groupes successifs d'équations

$$G_1, G_2, \dots, G_r,$$

qui jouissent des propriétés suivantes:

1° Ces groupes sont en nombre égal à celui des inconnues

$$u_1, u_2, \dots, u_r.$$

2° Dans le groupe G_k ($k = 1, 2, \dots, r$) se trouvent engagées les seules inconnues

$$u_k, u_{k+1}, \dots, u_r.$$

3° Si le groupe G_k n'est pas entièrement dépourvu d'équations, la substitution à

$$u_{k+1}, \dots, u_r$$

d'intégrales quelconques du système

$$G_{k+1}, \dots, G_r,$$

transforme G_k , soit en une formule exprimant l'inconnue u_k à l'aide des variables indépendantes, soit en un système orthonome passif à la seule inconnue u_k .

L'intégration du système proposé se ramène ainsi à l'intégration successive de divers systèmes orthonomes passifs n'impliquant chacun

qu'une seule fonction inconnue, et la seule connaissance des premiers membres de

$$G_1, G_2, \dots, G_r$$

permet de fixer avec une entière précision l'économie des conditions initiales dont la donnée détermine entièrement un groupe d'intégrales du système proposé.

27 bis. Plus généralement:

Etant donné un système différentiel S , dont les seconds membres sont nuls et les premiers développables dans quelque domaine, on peut, dans les circonstances générales, et sauf la rencontre de relations non identiques entre les seules variables indépendantes, en déduire, sans changement de variables ni intégration, un second système admettant les mêmes intégrales, et formé des groupes successifs d'équations

$$S_1, S_2, \dots, S_q,$$

auxquels correspondent les groupes successifs d'inconnues

$$s_1, s_2, \dots, s_q$$

de la façon suivante:

1° *L'ensemble de ces derniers reproduit une fois et une seule chacune des inconnues du système proposé S .*

2° *Dans le groupe S_k ($k = 1, 2, \dots, q$) se trouvent engagées les seules inconnues*

$$s_k, s_{k+1}, \dots, s_q.$$

3° *Si le groupe S_k n'est pas entièrement dépourvu d'équations, la substitution aux inconnues*

$$s_{k+1}, \dots, s_q$$

d'intégrales quelconques du système

$$S_{k+1}, \dots, S_q$$

transforme S_k , soit en un groupe de formules exprimant les inconnues s_k à l'aide des variables indépendantes, soit en un système orthonome passif aux seules inconnues s_k .

L'intégration du système proposé S se ramène ainsi à l'intégration successive de divers systèmes orthonomes passifs, et la seule connaissance des premiers membres de

$$S_1, S_2, \dots, S_i$$

permet de fixer avec une entière précision l'économie des conditions initiales dont la donnée détermine entièrement un groupe d'intégrales du système S .

CINQUIÈME PARTIE.

Propositions diverses sur les systèmes non orthonomes.

28. Nous nous proposons, dans le présent chapitre, d'examiner certaines formes différentielles non orthonomes, et d'établir, pour des données initiales convenablement choisies, l'existence de leurs intégrales.

Une fonction $f(x, y, \dots)$ de variables en nombre quelconque sera dite *quasi-exponentielle*, si, en désignant par M_0, α des constantes positives convenablement choisies, et par x_0, y_0, \dots des valeurs particulières convenablement choisies de x, y, \dots , elle admet pour majorante (22, I), relativement aux valeurs x_0, y_0, \dots , la fonction

$$\Psi(x, y, \dots) = M_0 e^{\alpha[(x-x_0)+(y-y_0)+\dots]}.$$

D'après cette définition, une fonction quasi-exponentielle est développable à l'aide d'une série entière indéfiniment convergente. En outre, comme nous allons maintenant le prouver, elle jouit, en tout point analytique (x_1, y_1, \dots) , d'une propriété semblable à celle que la définition précédente lui assigne en (x_0, y_0, \dots) . Effectivement, si l'on développe, à partir de x_0, y_0, \dots , les deux quantités

$$f(x_1, y_1, \dots), \quad \Psi(x_1, y_1, \dots),$$

il résulte de la définition des majorantes que chaque terme du premier

développement a un module inférieur à celui du terme correspondant du second; à plus forte raison le module du premier développement est-il moindre que la somme des modules des termes du second; or, le second ayant tous ses coefficients positifs, il est clair qu'en désignant par ξ_1, η_1, \dots les modules respectifs des différences $x_1 - x_0, y_1 - y_0, \dots$, la somme des modules de ses termes est

$$M_0 e^{\alpha(\xi_1 + \eta_1 + \dots)};$$

on aura donc

$$\text{mod } f(x_1, y_1, \dots) < M_0 e^{\alpha(\xi_1 + \eta_1 + \dots)}.$$

Un raisonnement semblable, appliqué aux fonctions

$$f_{x,y,\dots}^{(p,q,\dots)}(x, y, \dots), \quad \Psi_{x,y,\dots}^{(p,q,\dots)}(x, y, \dots) = M_0 \alpha^{p+q+\dots} e^{\alpha[(x-x_0)+(y-y_0)+\dots]},$$

dont la première a pour majorante la seconde; conduira à l'inégalité

$$\text{mod } f_{x,y,\dots}^{(p,q,\dots)}(x_1, y_1, \dots) < M_0 \alpha^{p+q+\dots} e^{\alpha(\xi_1 + \eta_1 + \dots)}.$$

En posant $M_0 e^{\alpha(\xi_1 + \eta_1 + \dots)} = M_1$, il vient finalement

$$\begin{aligned} \text{mod } f(x_1, y_1, \dots) &< M_1, \\ \text{mod } f_{x,y,\dots}^{(p,q,\dots)}(x_1, y_1, \dots) &< M_1 \alpha^{p+q+\dots}, \end{aligned}$$

ce qui revient à dire que, relativement aux valeurs x_1, y_1, \dots , la fonction $f(x, y, \dots)$ a pour majorante

$$M_1 e^{\alpha[(x-x_1)+(y-y_1)+\dots]}.$$

Les fonctions quasi-exponentielles donnent encore lieu aux remarques suivantes:

I. *Toutes les dérivées d'une fonction quasi-exponentielle $f(x, y, \dots)$ sont elles-mêmes quasi-exponentielles.*

Posons en effet

$$f_{x,y,\dots}^{(p',q',\dots)}(x, y, \dots) = \varphi(x, y, \dots)$$

et

$$M_0 \alpha^{p'+q'+\dots} = M'_0.$$

La fonction $f(x, y, \dots)$ étant quasi-exponentielle, il résulte de la définition que l'on a, pour toutes valeurs positives ou nulles des entiers p, q, \dots ,

$$\text{mod } f_{x, y, \dots}^{(p'+p, q'+q, \dots)}(x_0, y_0, \dots) < M_0 \alpha^{(p'+p)+(q'+q)+\dots}$$

ou

$$\text{mod } \varphi_{x, y, \dots}^{(p, q, \dots)}(x_0, y_0, \dots) < M'_0 \alpha^{p+q+\dots}.$$

La fonction $\varphi(x, y, \dots)$ a donc pour majorante, relativement aux valeurs x_0, y_0, \dots ,

$$M'_0 e^{a[(x-x_0)+(y-y_0)+\dots]}.$$

II. Si l'on effectue sur une fonction quasi-exponentielle un nombre quelconque de quadratures simples, en ayant soin que le résultat de chacune d'elles se réduise, pour une valeur particulière donnée de la variable qu'elle intéresse, à une fonction quasi-exponentielle des variables restantes, le résultat final de l'opération est lui-même une fonction quasi-exponentielle.

On peut évidemment se borner au cas d'une seule quadrature, relative, par exemple, à la variable x . Cela étant, supposons que le résultat d'une pareille quadrature, exécutée sur la fonction quasi-exponentielle $f(x, y, \dots)$, doive se réduire, pour $x = x_0$, à la fonction quasi-exponentielle $\omega(y, \dots)$, et soient y_0, \dots des valeurs particulières quelconques de y, \dots ,

$$\sum_{p, q, \dots} a_{p, q, \dots} \frac{(x - x_0)^p}{1 \cdot 2 \dots p} \frac{(y - y_0)^q}{1 \cdot 2 \dots q} \dots,$$

$$\sum_{q, \dots} b_{q, \dots} \frac{(y - y_0)^q}{1 \cdot 2 \dots q} \dots$$

les développements respectifs de $f(x, y, \dots)$, $\omega(y, \dots)$ à partir de x_0, y_0, \dots . L'intégrale, développée à partir des mêmes valeurs, a évidemment pour expression

$$F(x, y, \dots) = \sum_{q, \dots} b_{q, \dots} \frac{(y - y_0)^q}{1 \cdot 2 \dots q} \dots + \sum_{p, q, \dots} a_{p, q, \dots} \frac{(x - x_0)^{p+1}}{1 \cdot 2 \dots p(p+1)} \frac{(y - y_0)^q}{1 \cdot 2 \dots q} \dots$$

D'un autre côté, si l'on désigne par M_0, α, N_0, β quatre constantes po-

sitives convenablement choisies, on a, puisque $f(x, y, \dots)$ et $\omega(y, \dots)$ sont quasi-exponentielles,

$$\text{mod } a_{p, q, \dots} < M_0 \alpha^{p+q+\dots}, \text{ mod } b_{q, \dots} < N_0 \beta^{q+\dots},$$

ou

$$\text{mod } a_{p, q, \dots} < \frac{M_0}{\alpha} \alpha^{(p+1)+q+\dots}, \text{ mod } b_{q, \dots} < N_0 \beta^{q+\dots};$$

on en tire à plus forte raison, en désignant par P_0 la plus grande des quantités $\frac{M_0}{\alpha}$, N_0 , et par γ la plus grande des quantités α , β ,

$$\text{mod } a_{p, q, \dots} < P_0 \gamma^{(p+1)+q+\dots}, \text{ mod } b_{q, \dots} < P_0 \gamma^{q+\dots},$$

c'est à dire

$$\text{mod } F_{x, y, \dots}^{(p+1, q, \dots)}(x_0, y_0, \dots) < P_0 \gamma^{(p+1)+q+\dots},$$

$$\text{mod } F_{x, y, \dots}^{(0, q, \dots)}(x_0, y_0, \dots) < P_0 \gamma^{q+\dots}.$$

La fonction $F(x, y, \dots)$ est donc elle-même quasi-exponentielle, ce que nous voulions établir.

III. *Toute fonction composée à l'aide d'une composante entière et de fonctions simples quasi-exponentielles est elle-même quasi-exponentielle.*¹

Il suffit évidemment d'établir cette propriété pour une somme et un produit de deux fonctions quasi-exponentielles.

Or, si les fonctions $f(x, y, \dots)$, $\varphi(x, y, \dots)$ sont toutes deux quasi-exponentielles, on a, en désignant par M_0 , α , N_0 , β quatre constantes positives convenablement choisies, et pour toutes valeurs positives ou nulles des entiers p, q, \dots ,

$$\text{mod } f_{x, y, \dots}^{(p, q, \dots)}(x_0, y_0, \dots) < M_0 \alpha^{p+q+\dots},$$

$$\text{mod } \varphi_{x, y, \dots}^{(p, q, \dots)}(x_0, y_0, \dots) < N_0 \beta^{p+q+\dots}.$$

En désignant par P_0 la plus grande des deux quantités M_0 , N_0 , et par γ la plus grande des deux quantités α , β , on aura à plus forte raison

¹ Voir la note de la page 264.

$$\text{mod } f_{x,y,\dots}^{(p,q,\dots)}(x_0, y_0, \dots) < P_0 f^{p+q+\dots},$$

$$\text{mod } \varphi_{x,y,\dots}^{(p,q,\dots)}(x_0, y_0, \dots) < P_0 f^{p+q+\dots},$$

d'où l'on déduit, par addition membre à membre,

$$\text{mod } f_{x,y,\dots}^{(p,q,\dots)}(x_0, y_0, \dots) + \text{mod } \varphi_{x,y,\dots}^{(p,q,\dots)}(x_0, y_0, \dots) < 2P_0 f^{p+q+\dots},$$

et à plus forte raison

$$\text{mod } [f_{x,y,\dots}^{(p,q,\dots)}(x_0, y_0, \dots) + \varphi_{x,y,\dots}^{(p,q,\dots)}(x_0, y_0, \dots)] < 2P_0 f^{p+q+\dots}.$$

La somme des deux fonctions données est donc quasi-exponentielle.

Si l'on considère maintenant le produit

$$f(x, y, \dots) = f(x, y, \dots) \cdot \varphi(x, y, \dots),$$

et qu'on le différencie p fois par rapport à x , q fois par rapport à y , etc., sans effectuer jamais la réduction des termes semblables, on a finalement une somme composée de $2^{p+q+\dots}$ termes; chacun de ces termes est d'ailleurs un produit de deux dérivées appartenant respectivement à f et à φ , et dont les ordres totaux respectifs ont pour somme $p + q + \dots$. On a donc, en donnant à P_0 et γ la même signification que ci-dessus,

$$\text{mod } G_{x,y,\dots}^{(p,q,\dots)}(x_0, y_0, \dots) < 2^{p+q+\dots} P_0^2 f^{p+q+\dots},$$

ou

$$\text{mod } G_{x,y,\dots}^{(p,q,\dots)}(x_0, y_0, \dots) < P_0^2 (2\gamma)^{p+q+\dots}.$$

Le produit $G(x, y, \dots)$ est donc quasi-exponentiel.

29. Si dans un système orthoïque passif, linéaire par rapport à l'ensemble des inconnues et de leurs dérivées, les termes indépendants de ces quantités sont tous quasi-exponentiels, et que les autres coefficients se réduisent tous à des constantes; si, de plus, les fonctions, en nombre fini, dont la donnée détermine entièrement un groupe d'intégrales hypothétiques du système, sont toutes quasi-exponentielles: les intégrales dont il s'agit existent effectivement et sont elles-mêmes quasi-exponentielles.

I. Nous observerons tout d'abord qu'en vertu des nos 2, 3, 4, et des remarques faites au numéro précédent 28, les déterminations initiales des intégrales hypothétiques sont toutes quasi-exponentielles.

Cela étant, soient u, v, \dots les fonctions inconnues du système proposé, que nous désignerons par (S) ; I_u, I_v, \dots leurs déterminations initiales respectives; $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \dots$ de nouvelles fonctions inconnues. Si, comme à l'alinéa VI du n° 22, on effectue la transformation

$$\begin{cases} u = I_u + \mathfrak{u}, \\ v = I_v + \mathfrak{v}, \\ \dots \dots \dots, \end{cases}$$

en attribuant à $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \dots$ les mêmes cotes respectives qu'à u, v, \dots , on voit immédiatement: 1° que le système (\mathfrak{S}) ainsi obtenu est orthoïque comme le proposé, et que, sauf le changement de u, v, \dots en $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \dots$, les dérivées des fonctions inconnues s'y répartissent de la même manière en principales et paramétriques; 2° que le système (\mathfrak{S}) est, comme le proposé, linéaire par rapport à l'ensemble des inconnues et de leurs dérivées, que les termes indépendants de ces quantités y sont tous quasi-exponentiels, et les autres coefficients tous constants; 3° enfin, que si l'on impose d'une part aux intégrales hypothétiques de (S) les déterminations initiales I_u, I_v, \dots , d'autre part à celles de (\mathfrak{S}) des déterminations initiales identiquement nulles, les relations primitives, numériquement concordantes dans le premier cas, le seront aussi dans le second, et fourniront, pour les dérivées principales semblables des inconnues correspondantes, les mêmes valeurs initiales. En conséquence, *tout revient à prouver: 1° la convergence des développements des intégrales hypothétiques qui, dans le système (\mathfrak{S}) , répondent à des déterminations initiales identiquement nulles; 2° la nature quasi-exponentielle de ces intégrales.*

II. Si, dans les seconds membres de (\mathfrak{S}) , on remplace les termes indépendants par certaines majorantes relatives aux valeurs initiales x_0, y_0, \dots des variables x, y, \dots , puis tous les autres coefficients (non nuls) par certaines constantes positives respectivement supérieures à leurs modules, le système résultant (\mathfrak{S}) admet un groupe d'intégrales qui s'annulent toutes en x_0, y_0, \dots , tandis que leurs dérivées de tous ordres y prennent des valeurs initiales essentiellement positives.

Les termes indépendants qui figurent dans les seconds membres de (\mathfrak{S}) étant tous quasi-exponentiels, on peut assigner deux constantes po-

sitives. H, γ , telles, que les termes indépendants dont il s'agit admettent tous pour majorante, relativement aux valeurs x_0, y_0, \dots , la fonction

$$He^{\gamma[(x-x_0)+(y-y_0)+\dots]}.$$

Je désigne en outre par μ une constante positive quelconque, qui sera fixée ultérieurement.

Cela étant, je considère une équation quelconque (5) du système (S), j'appelle n l'ordre du premier membre, r l'ordre du second, et je pose

$$(65) \quad M = \gamma^n - M_0 - M_1\gamma - M_2\gamma^2 - \dots - M_r\gamma^r;$$

dans la formule (65), $M_0, M_1, M_2, \dots, M_r$ désignent autant de constantes positives ou nulles; la constante M_0 sera choisie positive ou nulle, suivant que l'équation (5) contiendra ou non dans son second membre quelqu'une des fonctions inconnues u, v, \dots du système (S); même alternative pour la constante M_1 , suivant que l'équation (5) contiendra ou non dans son second membre quelque dérivée première de u, v, \dots ; pour la constante M_2 , suivant que l'équation (5) contiendra ou non dans son second membre quelque dérivée seconde de u, v, \dots ; et ainsi de suite jusqu'à M_r ; enfin, celles des constantes $M_0, M_1, M_2, \dots, M_r$ qui ne sont pas nulles seront choisies suffisamment petites pour que la valeur de M définie par la formule (65) soit positive. Désignant alors par w une fonction inconnue de la variable indépendante t , je considère l'équation différentielle

$$(66) \quad \frac{\partial^n w}{\partial t^n} = M_0\mu + M\mu e^{\gamma t} + M_0w + M_1\frac{\partial w}{\partial t} + \dots + M_r\frac{\partial^r w}{\partial t^r},$$

et je remarque qu'en vertu de la relation (65) elle admet l'intégrale

$$W(t) = \mu(e^{\gamma t} - 1),$$

qui s'annule pour $t = 0$, tandis que ses dérivées de tous ordres y prennent des valeurs initiales essentiellement positives. Cette équation (66) peut d'ailleurs s'écrire sous une forme un peu différente, comme il suit: je laisse intacts le premier membre et les deux premiers termes du second membre; si M_0 n'est pas nul, j'appelle q_0 le nombre des termes qui, dans le second membre de (5), contiennent quelqu'une des fonctions inconnues

u, v, \dots , et je remplace, dans le second membre de (66), le terme $M_0 w$ par une somme de q_0 termes égaux chacun à $\frac{M_0}{q_0} w$; si M_1 n'est pas nul, j'appelle q_1 le nombre des termes qui, dans le second membre de (S), contiennent quelque dérivée première de u, v, \dots , et je remplace, dans le second membre de (66), le terme $M_1 \frac{\partial w}{\partial t}$ par une somme de q_1 termes égaux chacun à $\frac{M_1}{q_1} \frac{\partial w}{\partial t}$; et ainsi de suite jusqu'au dernier terme $M_r \frac{\partial^r w}{\partial t^r}$. De cette manière, je fais correspondre à l'équation (S) du système (S) une certaine équation différentielle

$$(66 \text{ bis}),$$

écrite d'une certaine manière, et impliquant la fonction inconnue w de la variable indépendante t ; au terme indépendant qui figure dans le second membre de (S) correspond, dans l'équation (66 bis), $M_0 \mu + M \mu e^{\gamma t}$; à tout autre terme (supposé effectif) du second membre de (S) correspond le produit d'une constante positive par l'une ou l'autre des quantités $w, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \dots$, suivant que le terme considéré de (S) est d'ordre 0, 1, 2, ...

Cela posé, aux variables indépendantes et aux fonctions inconnues

$$x, y, \dots, u, v, \dots$$

du système orthoïque (S), faisons correspondre autant de constantes positives

$$\xi, \eta, \dots, \vartheta, \phi, \dots,$$

que nous nommerons, pour abrégé, leurs *poids* respectifs; considérant ensuite l'une quelconque des dérivées des inconnues, appelons *poids* de cette dérivée le quotient obtenu en divisant le poids de la fonction à laquelle elle appartient par ceux de toutes les variables de différentiation, distinctes ou non. Dans l'équation (66 bis), nous remplacerons le terme indépendant $M_0 \mu + M \mu e^{\gamma t}$ par

$$M_0 \mu + M \mu e^{\gamma[\xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)+\dots]},$$

considérant ensuite le premier membre de (66 bis) ou tout autre terme du second membre, nous le comparerons au terme correspondant de l'équation (S), nous remplacerons la dérivée de w (d'ordre positif ou nul) qui

figure dans le terme considéré de (66 bis) par la dérivée de u, v, \dots (d'ordre égal) qui figure dans le terme correspondant de (5), et, cette substitution une fois faite, nous multiplierons la dérivée en question par son poids; enfin, nous réduirons à l'unité le coefficient du premier membre. On voit immédiatement que l'équation résultante (5) est identiquement vérifiée pour

$$(67) \quad \begin{cases} u = \frac{1}{\eta} W[\xi(x-x_0) + \eta(y-y_0) + \dots], \\ v = \frac{1}{\xi} W[\xi(x-x_0) + \eta(y-y_0) + \dots], \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

A chaque équation du système (S) on fera correspondre de même une équation telle que (5), et l'on tombera ainsi sur un système (S'), identiquement vérifié par la substitution à u, v, \dots des seconds membres des formules (67), c'est à dire de fonctions qui s'annulent pour

$$x - x_0 = y - y_0 = \dots = 0,$$

tandis que leurs dérivées de tous ordres prennent des valeurs initiales essentiellement positives.

Dans ce qui suit, je nommerai

P une constante positive supérieure au plus grand module que puissent atteindre, dans le système (S), les coefficients (constants) des termes non indépendants des seconds membres;

h_2, h_3, \dots, h_p les plus petites valeurs que puissent respectivement atteindre les cotes seconde, troisième, \dots , $p^{\text{ième}}$ des diverses variables indépendantes;

j_2, j_3, \dots, j_p les plus petites valeurs et J_2, J_3, \dots, J_p les plus grandes valeurs que puissent respectivement atteindre celles des fonctions u, v, \dots et de leurs diverses dérivées figurant effectivement dans le système (S);

ε la plus petite valeur que puissent atteindre, dans l'équation différentielle (66 bis) et autres analogues, les coefficients (constants) des termes non indépendants que contiennent effectivement leurs seconds membres.

Désignant en outre par

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta,$$

p constantes positives dont les valeurs vont être fixées dans un instant, nous prendrons: 1° pour chacune des quantités ξ, η, \dots un produit de puissances de $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, $\dots, p^{\text{ième}}$ de la variable correspondante; 2° pour chacune des quantités ν, ϕ, \dots le quotient de 1 par des puissances de $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, $\dots, p^{\text{ième}}$ de la fonction inconnue correspondante. Le poids d'une dérivée quelconque (y compris l'ordre zéro) aura alors pour valeur le quotient de 1 par des puissances de $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, $\dots, p^{\text{ième}}$ de la dérivée considérée.

Cela étant, nous déterminerons successivement $\theta_p, \theta_{p-1}, \dots, \theta_2, \theta_1$ à l'aide des relations

$$\begin{cases} \theta_p > 1, \\ \theta_p > \frac{P}{\varepsilon}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_{p-1} > 1, \\ \theta_{p-1} > \frac{P}{\varepsilon} \theta_p^{j_p - j_p}; \end{cases}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\begin{cases} \theta_2 > 1, \\ \theta_2 > \frac{P}{\varepsilon} \theta_p^{j_p - j_p} \dots \theta_p^{j_p - j_p}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1 > 1, \\ \theta_1 > \frac{P}{\varepsilon} \theta_2^{j_2 - j_2} \theta_3^{j_3 - j_3} \dots \theta_p^{j_p - j_p}, \\ \theta_1 > \theta_2^{-h_2} \theta_3^{-h_3} \dots \theta_p^{-h_p}. \end{cases}$$

Dans ces conditions, tout coefficient non indépendant pris dans les seconds membres du système (S) a, comme nous allons le faire voir, un module inférieur au coefficient correspondant (positif) du système (S).

Considérons en effet deux équations correspondantes, (5) et (5'), des deux systèmes, et une dérivée (d'ordre positif ou nul) figurant effectivement dans le second membre de (5). En vertu de la définition des systèmes orthoïques, cette dérivée (d'ordre positif ou nul) possède: soit une cote première

inférieure à celle du premier membre; soit une cote première égale à celle du premier membre, avec une cote seconde inférieure; ...; soit des cotes première, seconde, ..., $(p-2)^{\text{ième}}$ respectivement égales à celles du premier membre, avec une cote $(p-1)^{\text{ième}}$ inférieure; soit enfin des cotes première, seconde, ..., $(p-1)^{\text{ième}}$ respectivement égales à celles du premier membre, avec une cote $p^{\text{ième}}$ inférieure. Comme les quantités $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ sont toutes plus grandes que 1, le coefficient de la dérivée considérée dans le second membre de l'équation (§5) possède, suivant le cas, une valeur supérieure à l'une ou à l'autre des quantités

[illegible]

il est donc forcément supérieur à P , et par suite au module du coefficient correspondant du second membre de l'équation (5).

Les quantités ξ, γ, \dots sont en outre toutes supérieures à 1: car, la cote première de toute variable étant positive et au moins égale à 1, chacune des quantités dont il s'agit est au moins égale à

$$\theta_1, \theta_2^{h_2}, \theta_3^{h_3}, \dots, \theta_p^{h_p},$$

par suite supérieure à 1.

Si, après avoir ainsi fixé $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$, on désigne par ω le poids maximum des premiers membres de (\mathfrak{S}) , par λ la plus petite des constantes M définies par la relation (65) et autres analogues, et que l'on prenne $\mu > \frac{\omega H}{\lambda}$, le coefficient de

$$e^{\gamma[\xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)+\dots]}$$

dans l'un quelconque des termes indépendants des seconds membres de
 («S»), ayant une valeur au moins égale à $\frac{\mu\lambda}{\omega}$, sera par suite supérieur à
 H ; donc le terme indépendant considéré, dans lequel figure, outre l'ex-

ponentielle dont je viens de parler, une constante additive supérieure à zéro, est une majorante pour

$$He^{[\xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)+\dots]};$$

à plus forte raison, puisque les quantités ξ, η, \dots sont toutes supérieures à 1, sera-t-il une majorante pour

$$He^{[(x-x_0)+(y-y_0)+\dots]},$$

à plus forte raison enfin pour le terme indépendant qui lui correspond dans le système (S).

En résumé donc, si l'on considère dans les seconds membres de (S) un terme indépendant quelconque, ce dernier a pour majorante le terme indépendant qui lui correspond dans le système (S); les autres coefficients (constants et non nuls) des seconds membres de (S) se trouvent remplacés dans (S) par certaines constantes positives respectivement supérieures à leurs modules; enfin le système (S) admet un groupe d'intégrales qui s'annulent en x_0, y_0, \dots , tandis que leurs dérivées de tous ordres y prennent des valeurs initiales positives.

III. Les intégrales hypothétiques de (S) qui, pour

$$x - x_0 = y - y_0 = \dots = 0,$$

ont des déterminations initiales identiquement nulles, ont des développements nécessairement convergents et sont quasi-exponentielles, ce qui achève la démonstration.

La convergence se prouve par un raisonnement tout semblable à celui de l'alinéa IX du n° 22, en établissant que les développements des fonctions (67) sont majorants pour ceux des intégrales hypothétiques de (S) qui répondent à des déterminations initiales identiquement nulles.

D'ailleurs, en désignant par b la plus petite des quantités ν, ϕ, \dots , et par A la plus grande des quantités ξ, η, \dots , toute dérivée partielle d'ordre n des fonctions (67) a une valeur initiale dont le module tombe au dessous de $\frac{\mu}{b} (A\gamma)^n$; les fonctions (67) ont donc pour majorante commune

$$\frac{\mu}{b} e^{A\gamma[(x-x_0)+(y-y_0)+\dots]};$$

à plus forte raison les intégrales de (S) dont nous venons de démontrer l'existence admettent-elles pour majorante commune cette même fonction.

IV. L'énoncé formulé au début du présent numéro 29 cesserait d'être exact, si l'on substituait aux fonctions quasi-exponentielles, que j'y considère, certaines fonctions exprimables par un développement entier indéfiniment convergent: nous avons effectivement constaté, à l'alinéa I du n° 20, que si l'on assujettit une intégrale hypothétique de l'équation $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ à se réduire, pour $x = 0$, à une certaine série entière en y indéfiniment convergente, le développement, construit *a priori*, de l'intégrale est divergent.

30. Considérons un système différentiel où se trouvent réalisées à la fois les diverses conditions énoncées ci-après:

1° Le système est résolu par rapport à certaines dérivées, dont l'ensemble, comparé à celui des dérivées figurant dans les seconds membres, n'offre avec lui aucune variable de différentiation commune (de cette première hypothèse résulte, comme nous le verrons dans un instant, la nature orthoïque du système).

2° Si l'on forme un premier groupe (x, y, \dots) avec les variables de différentiation des premiers membres, et un deuxième groupe (z, s, \dots) avec toutes les variables restantes, les seconds membres, supposés linéaires par rapport aux inconnues et à leurs dérivées, ont de plus la forme entière par rapport aux variables du groupe (z, s, \dots) ; relativement à celles-ci, les termes indépendants des inconnues et de leurs dérivées ont des degrés quelconques, et le coefficient de tout autre terme un degré au plus égal à l'ordre du terme; relativement aux variables (x, y, \dots) , ces diverses fonctions sont développables dans un même domaine.

3° Les conditions de passivité du système sont supposées satisfaites.

Cela étant, et les fonctions, en nombre fini, dont la donnée détermine entièrement un groupe d'intégrales hypothétiques (ordinaires) du système, étant choisies sous la seule restriction d'être entières par rapport aux variables (z, s, \dots) , les intégrales dont il s'agit existent effectivement, et ont elles-mêmes la forme entière par rapport aux variables (z, s, \dots) .

I. De la première des conditions supposées résulte la nature orthoïque du système.

Effectivement, le système est résolu par rapport à certaines dérivées, qui ne figurent, non plus que leurs propres dérivées, dans aucun des seconds membres. Si d'autre part on désigne par Q un entier supérieur à l'ordre maximum des dérivées figurant dans les seconds membres, et que l'on attribue aux fonctions inconnues la cote zéro, aux variables x, y, \dots la cote Q , et aux variables z, s, \dots la cote 1, chaque premier membre aura une cote au moins égale à Q , et chaque inconnue ou dérivée figurant dans les seconds membres une cote inférieure à Q .

II. On peut, dans la démonstration de la convergence des développements des intégrales, se borner au cas où les déterminations initiales sont toutes identiquement nulles.

Effectivement, les déterminations initiales sont, d'après l'hypothèse, forcément entières en z, s, \dots . Cela étant, si on les ramène, par la transformation connue (22, VI), à être toutes identiquement nulles, le système transformé est identique au proposé, à cela près que les termes indépendants des inconnues et de leurs dérivées se trouvent remplacés par d'autres qui sont, comme eux, entiers par rapport aux variables z, s, \dots .

III. Je considère un polynome entier de degré N en $z - z_0, s - s_0, \dots$ les coefficients de ce polynome étant des fonctions de x, y, \dots développables dans un domaine de x_0, y_0, \dots , et j'appelle

r une première constante positive moindre que les rayons du domaine;

M une deuxième supérieure à toutes celles que l'on obtient, lorsque, après avoir développé ces mêmes fonctions à partir de x_0, y_0, \dots , on remplace dans ces développements les coefficients par leurs modules, et les différences $x - x_0, y - y_0, \dots$ par la constante r ;

$\alpha_x, \alpha_y, \dots$ des constantes positives au moins égales à $\frac{1}{r}$;

m un entier positif;

$\theta_N(t)$ la fonction entière $1 + t + t^2 + \dots + t^N$.

Cela étant, la fonction

$$\Omega(x, y, \dots, z, s, \dots) = \frac{M\theta_N[(z - z_0) + (s - s_0) + \dots]}{[1 - \alpha_x(x - x_0) - \alpha_y(y - y_0) - \dots]^m}$$

est une majorante du polynome proposé, $P(x, y, \dots, z, s, \dots)$, relativement aux valeurs particulières $x_0, y_0, \dots, z_0, s_0, \dots$.

Posons en effet

$$\Psi(x, y, \dots) = \frac{M}{[1 - \alpha_x(x - x_0) - \alpha_y(y - y_0) - \dots]^m},$$

d'où l'on tire

$$\Omega(x, y, \dots, z, s, \dots) = \Psi(x, y, \dots) \cdot \theta_N[(z - z_0) + (s - s_0) + \dots]$$

et

$$(68) \quad \frac{\partial^{i+l+\dots+k+g+\dots}\Omega}{\partial x^i \partial y^l \dots \partial z^k \partial s^g \dots} = \frac{\partial^{i+l+\dots}\Psi}{\partial x^i \partial y^l \dots} \cdot \frac{\partial^{k+g+\dots}\theta_N}{\partial z^k \partial s^g \dots}.$$

Puisque P et Ω sont des polynômes de degré N en $z - z_0, s - s_0, \dots$, toute dérivée de P ou Ω a une valeur initiale nulle, dès que la somme de ses ordres partiels relatifs à z, s, \dots est supérieure à N . On a d'ailleurs, pour $i + l + \dots \geq 0$, et en faisant suivre de l'indice zéro les notations des diverses fonctions à considérer et de leurs dérivées pour désigner leurs valeurs particulières en $x_0, y_0, \dots, z_0, s_0, \dots$,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^{i+l+\dots}\Psi}{\partial x^i \partial y^l \dots} \right]_0 &= M \alpha_x^i \alpha_y^l \dots \times m(m+1) \dots (m+i-1) \\ &\quad \times (m+i)(m+i+1) \dots (m+i+l-1) \\ &\quad \times \dots \end{aligned}$$

et à plus forte raison

$$\left[\frac{\partial^{i+l+\dots}\Psi}{\partial x^i \partial y^l \dots} \right]_0 \geq M \frac{1 \cdot 2 \dots i}{r^i} \cdot \frac{1 \cdot 2 \dots l}{r^l} \dots,$$

d'où l'on tire, en désignant par $A_{k,g,\dots}$ le coefficient du terme en

$$(z - z_0)^k (s - s_0)^g \dots$$

dans le polynome P ,

$$(69) \quad \left[\frac{\partial^{i+l+\dots}\Psi}{\partial x^i \partial y^l \dots} \right]_0 > \text{mod} \left[\frac{\partial^{i+l+\dots} A_{k,g,\dots}}{\partial x^i \partial y^l \dots} \right]_0.$$

On a d'autre part, pour $0 \leq k + g + \dots \leq N$,

$$(70) \quad \left[\frac{\partial^{k+g+\dots}\theta_N}{\partial z^k \partial s^g \dots} \right]_0 = 1 \cdot 2 \dots (k + g + \dots) \geq 1 \cdot 2 \dots k \cdot 1 \cdot 2 \dots g \dots$$

Des relations (68), (69) et (70) on déduit

$$\left[\frac{\partial^{i+l+\dots+k+g+\dots}\Omega}{\partial x^i \partial y^l \dots \partial z^k \partial s^g \dots} \right]_0 > 1 \cdot 2 \dots k \times 1 \cdot 2 \dots g \times \dots \times \text{mod} \left[\frac{\partial^{i+l+\dots} A_{k,g,\dots}}{\partial x^i \partial y^l \dots} \right]_0$$

c'est à dire

$$\left[\frac{\partial^{i+l+\dots+l+g+\dots} Q}{\partial x^i \partial y^l \dots \partial z^k \partial s^g \dots} \right]_0 > \text{mod} \left[\frac{\partial^{i+l+\dots+l+g+\dots} P}{\partial x^i \partial y^l \dots \partial z^k \partial s^g \dots} \right]_0.$$

IV. Si l'on désigne par w une fonction inconnue des deux variables indépendantes ξ et σ , par $\Theta_n(\sigma)$ la fonction entière $1 + \sigma + \sigma^2 + \dots + \sigma^n$, et par $M, r, g_0, g_1, g_2, \dots, g_K$ des constantes positives quelconques, l'équation aux dérivées partielles

$$(71) \quad \frac{\partial^m}{\partial \xi^m} = \frac{M}{1-r} \left[\Theta_h(\sigma) + g_0 w + g_1 \Theta_1(\sigma) \frac{\partial w}{\partial \sigma} + g_2 \Theta_2(\sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial \sigma^2} + \dots + g_K \Theta_K(\sigma) \frac{\partial^K w}{\partial \sigma^K} \right]$$

admet quelque intégrale possédant la double propriété: 1° d'être entière en σ ; 2° de prendre, elle et ses dérivées partielles de tous ordres, des valeurs initiales positives ou nulles pour $\xi = \sigma = 0$.

Pour le démontrer, je pose

$$(72) \quad w = u_0 + u_1 \sigma + u_2 \sigma^2 + \dots + u_K \sigma^K,$$

$u_0, u_1, u_2, \dots, u_K$ étant des fonctions inconnues de la seule variable ξ . L'équation (71) devient:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + \sigma \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \sigma^2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \dots + \sigma^K \frac{\partial u_K}{\partial \xi} \\ &= \frac{M}{1-r} \left[1 + \sigma + \sigma^2 + \dots + \sigma^K \right] \\ &+ \frac{M}{1-r} g_0 [u_0 + u_1 \sigma + u_2 \sigma^2 + \dots + u_K \sigma^K] \\ &+ \frac{M}{1-r} g_1 (1 + \sigma) [1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 \sigma + \dots + K \cdot u_K \sigma^{K-1}] \\ &+ \frac{M}{1-r} g_2 (1 + \sigma + \sigma^2) [1 \cdot 2 \cdot u_2 + 2 \cdot 3 \cdot u_3 \sigma + \dots + (K-1) K u_K \sigma^{K-2}] \\ &\dots \dots \dots \\ &+ \frac{M}{1-r} g_K (1 + \sigma + \sigma^2 + \dots + \sigma^K) \cdot 1 \cdot 2 \dots K u_K, \end{aligned}$$

et l'on voit que ses deux membres sont alors de degré K en σ . En égalant les coefficients des diverses puissances de σ dans les deux membres, on a un système différentiel dont les premiers membres sont respectivement

$$\frac{\partial u_0}{\partial \xi}, \frac{\partial u_1}{\partial \xi}, \frac{\partial u_2}{\partial \xi}, \dots, \frac{\partial u_K}{\partial \xi},$$

chaque second membre étant le produit de $\frac{M}{1 - \frac{\sigma}{r}}$ par une fonction linéaire

de $u_0, u_1, u_2, \dots, u_K$ à coefficients positifs ou nuls; si donc on assujettit les fonctions inconnues $u_0, u_1, u_2, \dots, u_K$ à prendre, pour $\xi=0$, des valeurs initiales positives ou nulles, il est clair que les relations primitives fourniront, pour leurs dérivées de tous ordres, des valeurs initiales jouissant de la même propriété. De là résulte, en vertu de la formule (72), que w et ses dérivées partielles de tous ordres prendront, pour $\xi=\sigma=0$, des valeurs initiales positives ou nulles.

V. Je reviens maintenant à l'énoncé général, en supposant, comme cela est permis (II), les déterminations initiales identiquement nulles.

Pour l'établir, j'évalue le degré maximum, par rapport à z, s, \dots , des fonctions de x, y, \dots, z, s, \dots qui jouent le rôle de coefficients dans les seconds membres; j'évalue aussi l'ordre maximum des seconds membres, et je désigne par K le plus grand de ces deux entiers. Je désigne ensuite par L l'ordre maximum des premiers membres du système donné (S); par g_0 le nombre des fonctions inconnues; par g_1 celui de leurs dérivées premières relatives aux seules variables du groupe (z, s, \dots) ; et de même par g_2, \dots, g_K les nombres de leurs dérivées d'ordres respectifs $2, \dots, K$ qui se rapportent aux seules variables de ce groupe. Soient $x_0, y_0, \dots, z_0, s_0, \dots$ les valeurs initiales choisies pour les variables. Chaque coefficient des seconds membres étant, d'après l'hypothèse, entier en $z - z_0, s - s_0, \dots$, a lui-même des coefficients, fonctions développables de x, y, \dots , que je nommerai, pour abrégier, *sous-coefficients* du système. Je désignerai maintenant par r une quantité positive inférieure aux rayons du domaine de x_0, y_0, \dots où les divers sous-coefficients du système sont supposés à la fois développables; par M' une quantité positive supérieure à toutes celles qu'on obtient lorsque, après avoir développé ces derniers à partir de x_0, y_0, \dots , on remplace, dans

les développements obtenus, les différences $x - x_0, y - y_0, \dots$ par r , et les constantes jouant le rôle de coefficients par leurs modules; enfin, je désignerai par M une dernière quantité positive supérieure à la fois aux diverses quantités

$$M', M' \frac{r}{1}, M' \frac{r^2}{1 \cdot 2}, \dots, M' \frac{r^{L-1}}{1 \cdot 2 \dots (L-1)}.$$

Cela posé, je considère l'équation aux dérivées partielles (71), et j'y adjoins toutes celles qui s'en déduisent par $1, 2, \dots, L-1$ différentiations relatives à la variable ξ . J'aurai ainsi un système

$$(73)$$

comprenant L équations dont les premiers membres sont respectivement

$$\frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \dots, \frac{\partial^L w}{\partial \xi^L}.$$

En vertu de l'alinéa IV, l'équation (71), et par suite le système (73), admettent une intégrale entière en σ , de la forme

$$u_0 + u_1 \sigma + u_2 \sigma^2 + \dots + u_K \sigma^K,$$

où $u_0, u_1, u_2, \dots, u_K$ désignent certaines fonctions de ξ , et cette intégrale possède, ainsi que ses dérivées partielles de tous ordres, des valeurs initiales positives ou nulles pour $\xi = \sigma = 0$. Nous la désignerons, pour abréger, par $W(\xi, \sigma)$.

Je considère maintenant une équation déterminée du système proposé (S), et à cette équation j'en fais correspondre une de la manière suivante. Désignant par q l'ordre du premier membre de l'équation considérée (q est l'un des entiers $1, 2, \dots, L$), je choisis dans le système (73) l'équation qui a pour premier membre $\frac{\partial^q w}{\partial \xi^q}$, savoir

$$(74) \quad \frac{\partial^q w}{\partial \xi^q} = \frac{1 \cdot 2 \dots (q-1)}{r^{q-1}} \frac{M}{\left(1 - \frac{\xi}{r}\right)^q} \left[\theta_K(\sigma) + g_0 w + g_1 \theta_1(\sigma) \frac{\partial w}{\partial \sigma} + \dots \right. \\ \left. + g_K \theta_K(\sigma) \frac{\partial^h w}{\partial \sigma^h} \right] + \Sigma;$$

dans le second membre de cette dernière, Σ désigne une somme de pro-

duits (en nombre limité) dont chacun peut contenir en facteurs: 1° une constante positive; 2° une puissance de $\frac{1}{1 - \frac{\xi}{r}}$; 3° une fonction $\theta(\sigma)$ (affectée

d'un certain indice); 4° une dérivée de w intéressant au moins une fois la variable ξ . Dans cette équation (74), je remplace le premier membre $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}$ par celui de l'équation considérée du système (S); dans le premier des deux termes du second membre de (74), je remplace ξ par la somme $(x - x_0) + (y - y_0) + \dots$, σ par la somme $(z - z_0) + (s - s_0) + \dots$, $g_0 w$ par la somme des inconnues du système, $g_1 \frac{\partial w}{\partial \sigma}$ par la somme de leurs dérivées premières relatives aux seules variables z, s, \dots , etc., $g_K \frac{\partial^K w}{\partial \sigma^K}$

par la somme de leurs dérivées d'ordre K relatives aux mêmes variables; enfin, dans le second terme Σ du second membre de (74), je remplace ξ et σ par les sommes respectives $(x - x_0) + (y - y_0) + \dots$ et $(z - z_0) + (s - s_0) + \dots$, puis $\frac{\partial^{\alpha+\beta} w}{\partial \xi^\alpha \partial \sigma^\beta}$ par $W_{\xi, \sigma}^{(\alpha, \beta)}[(x - x_0) + (y - y_0) + \dots, (z - z_0) + (s - s_0) + \dots]$.

A chaque équation du système proposé (S) j'en fais correspondre une de la manière que je viens de dire; j'obtiens ainsi un système (S'), identiquement vérifié quand on y remplace toutes les fonctions inconnues par $W[(x - x_0) + (y - y_0) + \dots, (z - z_0) + (s - s_0) + \dots]$. En vertu des propriétés démontrées de la composante $W(\xi, \sigma)$, les intégrales dont nous venons de constater l'existence effective dans le système (S) sont entières en z, s, \dots , et admettent, ainsi que leurs dérivées partielles de tous ordres, des valeurs initiales positives ou nulles.

Observons maintenant que le système (S') ne diffère du proposé (S) qu'en ce que chaque coefficient (indépendant ou non) des seconds membres s'y trouve remplacé par une majorante. D'autre part, puisque les déterminations initiales sont supposées identiquement nulles pour les intégrales hypothétiques de (S), les intégrales effectives de (S') et leurs dérivées paramétriques ont des valeurs initiales au moins égales aux modules de celles qui ont été choisies pour les intégrales hypothétiques de (S) et leurs dérivées semblables. En faisant alors le raisonnement ordinaire, on verra que la même propriété subsiste pour les dérivées principales. Donc les développements des intégrales hypothétiques de (S)

sont, comme ceux des intégrales effectives de $\langle\langle S \rangle\rangle$, convergents et entiers en z, s, \dots

31. Considérons un système différentiel S , où chacune des variables et des inconnues se trouve affectée de p cotes, et *supposons essentiellement que les cotes premières de toutes les variables indépendantes aient été choisies égales à un même entier positif.*

Supposons d'autre part que les circonstances suivantes se trouvent simultanément réalisées dans le système S :

1° Ce système, impliquant g fonctions inconnues, et composé de g équations, est résolu par rapport à g dérivées appartenant respectivement aux g fonctions inconnues, et ces g dérivées, non plus que leurs propres dérivées, ne figurent dans aucun des seconds membres, qui d'ailleurs sont supposés tous développables dans un même domaine.

2° Toute inconnue ou dérivée figurant *effectivement* dans le second membre d'une équation du système, possède une cote première au plus égale à celle du premier membre correspondant.

Finalement, dressons, pour chaque équation du système S , la liste des diverses quantités (fonctions inconnues ou dérivées) qui, figurant effectivement dans le second membre, se trouvent être anormales (6) vis à vis du premier; égalons à zéro les dérivées premières de chaque second membre, prises par rapport aux quantités anormales correspondantes, et désignons par (A) le groupe des équations ainsi obtenues.

Cela étant, si le groupe des équations (A) n'existe pas, ou, en d'autres termes, si aucun des seconds membres du système ne contient de quantité qui soit anormale vis à vis du premier membre correspondant, le système S rentre, comme cas particulier, dans la catégorie des systèmes orthonomes passifs, et l'on sait, d'après ce qui a été vu dans la troisième partie, que les intégrales ordinaires répondant à des déterminations initiales quelconques existent effectivement.

Nous allons maintenant nous occuper du cas où quelque-une des équations du système S contient dans son second membre des quantités anormales vis à vis du premier, et établir à ce sujet la proposition suivante:

Le groupe des équations (A) étant supposé exister, si l'on impose à des

intégrales ordinaires hypothétiques du système S des déterminations initiales (12) arbitrairement choisies sous la seule restriction que les équations (A) se trouvent numériquement vérifiées par les valeurs initiales des quantités qu'elles contiennent, les intégrales dont il s'agit ne peuvent manquer d'exister effectivement.

I. Pour abréger, et faute d'une dénomination meilleure, nous qualifierons de *conforme* toute relation déduite du système S et satisfaisant à la fois aux deux conditions suivantes:

1° La relation dont il s'agit a pour premier membre quelque dérivée d'inconnue, et toute inconnue ou dérivée figurant effectivement dans le second membre possède une cote première au plus égale à celle du premier membre.

2° Toute dérivée première du second membre, prise par rapport à une quantité qui soit anormale vis à vis du premier, fournit, par son équation à zéro, une relation conséquence algébrique de (A).

Cela posé, si sur une relation conforme on exécute des différentiations quelconques, on tombe sur une relation de même nature.

Cette proposition est évidente dans le cas très-particulier où le second membre de la relation donnée ne contiendrait que les seules variables indépendantes.

Plaçons-nous actuellement dans le cas général, et supposons qu'on exécute sur la relation donnée une différentiation première se rapportant, par exemple, à la variable x . On voit tout d'abord que la relation résultante satisfait, comme la proposée, à la première des deux conditions formulées dans la définition ci-dessus: car, en désignant par γ la cote première (positive) commune aux diverses variables indépendantes, la cote première du premier membre a augmenté de γ , et la cote première maxima des inconnues ou dérivées figurant dans le second membre a augmenté aussi de γ . Je dis qu'elle satisfait aussi à la deuxième condition.

Soit en effet

$$(75) \quad \partial = f(\dots, \partial', \dots)$$

la relation proposée, dans laquelle ∂', \dots désignent les diverses inconnues

ou dérivées qui ont la même cote première que δ . En différentiant la relation (75) par rapport à x , il vient

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = \dots + \frac{\partial f}{\partial \delta'} \frac{\partial \delta'}{\partial x} + \dots$$

Les inconnues ou dérivées qui, dans le second membre de cette dernière relation, ont même cote première que $\frac{\partial \delta}{\partial x}$, sont $\frac{\partial \delta'}{\partial x}$, ..., et les dérivées premières du second membre, prises successivement par rapport aux quantités

$$\frac{\partial \delta'}{\partial x}, \dots$$

sont respectivement

$$\frac{\partial f}{\partial \delta'}, \dots$$

Si la dérivée $\frac{\partial \delta'}{\partial x}$ est anormale par rapport à $\frac{\partial \delta}{\partial x}$, la quantité δ' l'est par rapport à δ , et comme la relation (75) est, par hypothèse, conforme, l'équation $\frac{\partial f}{\partial \delta'} = 0$ est conséquencé algébrique de (A). D'ailleurs, en dehors des quantités $\frac{\partial \delta'}{\partial x}, \dots$, aucune des inconnues ou dérivées figurant dans le second membre ne peut être anormale vis à vis de $\frac{\partial \delta}{\partial x}$, puisqu'elles ont une cote première inférieure.

On voit par là que la nature conforme de la relation (75) persiste après une première différentiation exécutée sur elle. En vertu du même raisonnement, appliqué à la relation résultante, elle persiste après une seconde, et ainsi de suite quel que soit le nombre des différentiations.

II. *Toutes les relations primitives du système S sont conformes.*

Car les relations qui font partie du système le sont évidemment, et par suite aussi (I) toutes celles qu'on en déduit par différentiations.

III. *En supposant, comme nous l'avons fait, que les relations (A) se trouvent numériquement vérifiées par les valeurs initiales des variables, des inconnues et des dérivées paramétriques qui y figurent, les relations primitives fournissent, sans incompatibilité, les valeurs initiales de toutes les dérivées principales, et, en conséquence, les développements par la formule de Taylor*

des intégrales hypothétiques répondant aux conditions initiales données peuvent être entièrement reconstruits.

En attribuant aux variables, aux inconnues et aux dérivées paramétriques les valeurs initiales données, on transforme, comme nous allons le voir, chaque second membre des relations primitives en une simple fonction des dérivées principales dont les classes sont inférieures à celle du premier membre correspondant. Effectivement, l'opération dont il s'agit transforme chaque second membre du système S en une simple quantité numérique. D'un autre côté, si, sur une relation du système S , on exécute une différentiation d'ordre quelconque, le second membre de la relation résultante a la forme linéaire par rapport aux dérivées dont la cote première est égale à celle du premier membre, et en particulier par rapport aux dérivées principales anormales; le coefficient d'une dérivée principale anormale n'est alors autre chose que la dérivée première du second membre, prise par rapport à la dérivée principale anormale dont il s'agit, et, comme la relation est conforme, ce coefficient ne peut manquer de s'annuler quand les relations (A) se trouvent numériquement vérifiées, et par suite quand on attribue aux variables, aux inconnues et aux dérivées paramétriques les valeurs initiales données.

Cela étant, donnons aux variables indépendantes x, y, \dots leurs valeurs initiales. Dans ces conditions, les intégrales hypothétiques et leurs dérivées de tous ordres prennent également leurs valeurs initiales, et, comme celles des intégrales et de leurs dérivées paramétriques sont supposées données, chaque relation primitive ne contient plus dans son second membre d'autres quantités inconnues que les valeurs initiales des dérivées principales de classes inférieures à son premier membre. Si donc on partage les relations primitives en groupes successifs d'après la classe croissante de leurs premiers membres, si d'autre part on observe que chaque dérivée principale figure une fois et une seule dans les premiers membres de ces relations, on voit que les relations primitives du premier groupe fourniront, sans incompatibilité, les valeurs initiales des dérivées principales de première classe; puis, ces dernières une fois connues, que les relations primitives du deuxième groupe fourniront, sans incompatibilité, les valeurs initiales des dérivées principales de deuxième classe; et ainsi de suite indéfiniment.

IV. *Les intégrales hypothétiques répondant aux conditions initiales données ne peuvent manquer d'exister effectivement, si leurs développements, construits a priori à partir des valeurs initiales choisies pour les variables, sont convergents.*

On raisonnera comme à l'alinéa III du n° 14.

En conséquence, tout revient à prouver la convergence de ces développements.

V, VI, VII, VIII et IX. Il suffit maintenant, pour achever la démonstration, de répéter textuellement les alinéas V, VI, VII, VIII et IX du n° 22, avec les quelques modifications qui s'y trouvent indiquées par voie d'annotations.

APPENDICE.

Je me propose de faire voir, dans cet Appendice:

1° que tous les types de systèmes différentiels complètement intégrables étudiés jusqu'à ce jour ne sont que des cas particuliers du type que j'appelle aujourd'hui *orthonome*;

2° que les résultats exposés par M. GOURSAT dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences du 2 novembre 1897 sont contenus, comme cas particulier, dans ceux que j'expose au n° 31 du présent Mémoire.

I. Je ferai observer tout d'abord que le mot *orthonome*, tel qu'il se trouve défini au n° 21, possède une signification plus large que dans mes travaux antérieurs. Dans les travaux en question, j'ai considéré en effet un type de système différentiel auquel j'ai donné d'abord le nom d'*harmonique* (Annales de l'Ecole Normale, 1893), puis d'*orthonome* (Recueil des savants étrangers, tome 32, n° 3), et je me propose actuellement d'établir qu'un pareil type rentre, comme cas particulier, dans celui que je qualifie aujourd'hui d'*orthonome*, et qui fait l'objet de la troisième partie du présent Mémoire.

Je rappellerai tout d'abord les définitions de ces systèmes.

Désignant par x, y, \dots les variables indépendantes, et par u, v, \dots les fonctions inconnues d'un système différentiel, faisons correspondre à chacune des quantités

$$x, y, \dots, u, v, \dots$$

p entiers positifs, nuls ou négatifs, que nous nommerons respectivement *cote première, cote seconde, ..., cote $p^{\text{ième}}$* de cette quantité. Considérant ensuite une dérivée quelconque de l'une des fonctions inconnues, nommons *cote $q^{\text{ième}}$* ($q = 1, 2, \dots, p$) de la dérivée en question l'entier obtenu en ajoutant à la cote $q^{\text{ième}}$ de la fonction inconnue les cotes $q^{\text{ièmes}}$ de toutes les variables de différentiation, distinctes ou non.

Supposons enfin que le système se trouve résolu par rapport à certaines dérivées, qui ne figurent, non plus que leurs propres dérivées, dans aucun des seconds membres, et que ces derniers, si l'on y considère pour un instant x, y, \dots, u, v, \dots , et les diverses dérivées de u, v, \dots qui y figurent, comme autant de variables indépendantes distinctes, soient tous développables dans un même domaine.

Cela étant:

A. *Définition des systèmes harmoniques (ou anciens systèmes orthonomes).*

Le système en question sera dit *harmonique*, s'il satisfait à la condition suivante:

Les diverses dérivées de u, v, \dots qui figurent *effectivement* dans le second membre d'une équation quelconque ont des ordres au plus égaux à celui du premier membre correspondant; de plus, en désignant par c_1, c_2, \dots, c_p les cotes du premier membre, et par c'_1, c'_2, \dots, c'_p les cotes d'une dérivée quelconque d'ordre égal figurant *effectivement* dans le second, les différences

$$c_1 - c'_1, c_2 - c'_2, \dots, c_p - c'_p$$

ne sont pas toutes nulles, et la première d'entre elles qui ne s'évanouit pas est positive.

B. *Définition des nouveaux systèmes orthonomes.*

Le système en question sera dit *orthonome*, si les deux conditions suivantes se trouvent à la fois remplies:

1° Les cotes premières des diverses variables indépendantes sont toutes égales à un même entier positif.

2° Si, considérant une équation quelconque du système, on désigne par c_1, c_2, \dots, c_p les cotes du premier membre, par c'_1, c'_2, \dots, c'_p celles d'une dérivée figurant *effectivement* dans le second, et par $c''_1, c''_2, \dots, c''_p$ celles d'une fonction inconnue *y* figurant aussi *effectivement*, les différences

$$c_1 - c'_1, c_2 - c'_2, \dots, c_p - c'_p$$

ne sont pas toutes nulles, et la première d'entre elles qui ne s'évanouit pas est positive; la même chose a lieu pour les différences

$$c_1 - c''_1, c_2 - c''_2, \dots, c_p - c''_p.$$

J'établirai enfin les propositions suivantes:

Tout système harmonique peut être considéré comme un système orthonome (nouvelle définition) où les cotes premières des diverses fonctions inconnues sont toutes égales entre elles.

Effectivement, étant donné un système harmonique, j'y affecte les diverses quantités x, y, \dots, u, v, \dots d'une cote supplémentaire, que je considère comme *antérieure* à toutes celles qu'implique la définition **A**, et je choisis cette cote nouvelle égale à 1 pour les variables x, y, \dots , à zéro pour les inconnues u, v, \dots . Il résulte de là que, dans le système donné, chaque variable, chaque inconnue et chaque dérivée d'inconnue se trouve affectée de $p + 1$ cotes, et que la cote première d'une quantité quelconque se trouve être égale:

s'il s'agit d'une variable, à 1;

s'il s'agit d'une inconnue, à zéro;

s'il s'agit d'une dérivée d'inconnue, à l'ordre même de cette dérivée.

Cela étant, on voit sans peine que les deux conditions énoncées dans la définition **B** se trouvent nécessairement satisfaites.

Réciproquement, si, dans un système orthonome (nouvelle définition), les cotes premières des diverses inconnues sont toutes égales entre elles, le système dont il s'agit est harmonique.

On considérera chaque variable et chaque inconnue comme affectée

seulement des $p - 1$ dernières cotes qu'implique la définition **B**, et l'on verra sans peine que la définition **A** se trouve satisfaite.

II. *Les systèmes harmoniques comprennent, comme cas particulier, ceux que j'ai nommés taxiques.*

Il suffit de rapprocher de l'alinéa précédent I l'exemple II du n° 21.

III. *Les systèmes harmoniques comprennent, comme cas particulier, les systèmes ci-dessous définis, que nous nommerons parataxiques.*

Désignant par u, v, \dots, w certaines fonctions inconnues des variables indépendantes x, y, \dots, s, t , nous adopterons pour celles-ci un ordre déterminé, par exemple

$$(76) \quad x, y, \dots, s, t,$$

et de même pour les inconnues un ordre déterminé, par exemple

$$(77) \quad u, v, \dots, w.$$

Puis nous rangerons comme il suit, sur une ligne indéfinie allant de droite à gauche, les dérivées de tous ordres des diverses fonctions inconnues. Nous écrirons d'abord l'ensemble des dérivées premières, puis à gauche de celui-ci l'ensemble des dérivées secondes, puis à gauche de ce dernier l'ensemble des dérivées troisièmes, et ainsi de suite indéfiniment. En désignant maintenant par $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \mu$ les ordres partiels d'une dérivée quelconque relatifs à x, y, \dots, s, t respectivement, chacun des ensembles précédents sera divisé en ensembles partiels se succédant de gauche à droite d'après les valeurs décroissantes de l'ordre partiel α ; chaque sous-ensemble en sous-ensembles partiels se succédant de gauche à droite d'après les valeurs décroissantes de l'ordre partiel β ; et ainsi jusqu'à l'ordre partiel λ (inclusivement). Chacun des ensembles obtenus après une pareille suite d'opérations se compose évidemment de dérivées semblables appartenant respectivement aux fonctions u, v, \dots, w : ces dérivées seront finalement écrites de gauche à droite dans l'ordre qui correspond à celui des fonctions. Les dérivées de tous ordres de nos fonctions inconnues se trouvent alors rangées, sur une ligne indéfinie allant de droite à gauche, dans un ordre bien déterminé. Nous quali-

fierons de *parataxique* la suite ainsi obtenue, et nous dirons qu'une dérivée de fonction inconnue est *antérieure* ou *postérieure* à une autre, suivant que, dans la suite parataxique, elle figure à gauche ou à droite de cette autre.

Cela étant, un système différentiel sera dit *parataxique*, s'il se trouve résolu par rapport à certaines dérivées, et si l'on peut trouver, pour les variables et les inconnues, deux ordres respectifs, (76), (77), tels, que chaque second membre ne contienne, outre les variables et les inconnues, que des dérivées paramétriques postérieures au premier membre correspondant.¹

Or, un pareil système est nécessairement orthonome (nouvelle définition).

Effectivement, si une dérivée de fonction inconnue est antérieure à une autre, il arrive forcément de trois choses l'une:

ou bien elle est d'ordre supérieur à cette autre;

ou bien elle est du même ordre (total), mais, en désignant par

$$\alpha', \beta', \dots, \lambda', \mu',$$

$$\alpha'', \beta'', \dots, \lambda'', \mu''$$

les ordres partiels relatifs à

$$x, y, \dots, s, t$$

de ces deux dérivées, les différences

$$(78) \quad \alpha' - \alpha'', \beta' - \beta'', \dots, \lambda' - \lambda''$$

ne sont pas toutes nulles, et la première d'entre elles qui ne s'évanouit pas est positive;

ou bien enfin les deux dérivées ont les mêmes ordres partiels respectifs, mais la fonction inconnue à laquelle appartient la première dérivée précède, dans la suite (77), la fonction inconnue à laquelle appartient la seconde.

Cela étant, et en désignant par h le nombre des variables indépendantes, il suffit, pour se convaincre de la nature orthonome d'un système parataxique, d'attribuer:

¹ Il va sans dire que les seconds membres sont supposés tous développables dans un même domaine.

aux variables des cotes premières toutes égales à 1, et aux inconnues des cotes premières toutes nulles;

aux variables et aux inconnues des cotes secondes toutes nulles, à l'exception de x qui aura pour cote seconde l'unité;

aux variables et aux inconnues des cotes troisièmes toutes nulles, à l'exception de y qui aura pour cote troisième l'unité;

etc.;

aux variables et aux inconnues des cotes $h^{\text{èmes}}$ toutes nulles, à l'exception de l'avant-dernière variable s qui aura pour cote $h^{\text{ème}}$ l'unité;

finalement, aux variables des cotes $(h+1)^{\text{èmes}}$ toutes nulles, et aux inconnues successives u, v, \dots, w des cotes $(h+1)^{\text{èmes}}$ dont la valeur aille en décroissant.

Si l'on observe maintenant que, dans ce système orthonome, les cotes premières des inconnues sont toutes égales, il résulte de l'alinéa I que tout système parataxique est harmonique.

IV. *Les systèmes de M^{me} de Kowalevsky (1875) constituent un cas particulier des systèmes que j'appelle aujourd'hui orthonomes.*

Voir l'exemple I du n° 21.

V. *Les systèmes du premier ordre que M. Méray et moi avons étudiés en 1890 sous le nom de systèmes immédiats réguliers (ou semi-réguliers), constituent un cas particulier des systèmes harmoniques, et à plus forte raison (I) des systèmes que j'appelle aujourd'hui orthonomes.*

Effectivement, si l'on considère un système du premier ordre résolu par rapport à un certain nombre de dérivées, on peut, pour en disposer nettement les diverses équations, les écrire dans les cases d'un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux variables indépendantes x, y, \dots et les colonnes aux fonctions inconnues u, v, \dots , en plaçant l'équation qui aurait, par exemple, $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour premier membre, dans la case qui appartient en même temps à la ligne (x) et à la colonne (u).

Supposons maintenant que les lignes du tableau ainsi obtenu puissent être rangées dans un ordre tel, qu'en y faisant abstraction pour un instant des colonnes vides et des colonnes pleines, chacune des autres, par-

courue de bas en haut, soit formée par la succession d'un fragment vide et d'un fragment plein. Adoptons pour les lignes l'ordre dont il s'agit, et en même temps disposons les colonnes dans un ordre tel, que le nombre des cases vides n'augmente jamais d'une colonne à la suivante quand on lit le tableau de droite à gauche. Inversement alors il est clair: 1° qu'en faisant abstraction pour un instant des lignes vides et des lignes pleines, chacune des autres, parcourue de droite à gauche, est formée par la succession d'un fragment vide et d'un fragment plein; 2° que le nombre des cases vides n'augmente jamais d'une ligne à la suivante, quand on lit le tableau de bas en haut.

Cela étant, et après avoir donné à toutes les variables indépendantes la cote première 1, à toutes les fonctions inconnues la cote première zéro, distribuons les variables indépendantes en groupes successifs d'après les nombres décroissants de cases vides contenues dans les lignes correspondantes, et attribuons à chacune d'elles la cote seconde 1, 2, 3, ..., suivant qu'elle appartient au premier, au second, au troisième ... groupe. Fixons pareillement la cote seconde de chaque fonction inconnue par la considération des nombres de cases vides contenues dans les diverses colonnes. On prouve alors bien aisément que *la cote seconde maxima des diverses dérivées figurant dans les seconds membres du système est inférieure à la cote seconde minima des diverses dérivées figurant dans les premiers*. Comme d'ailleurs les cotes premières de toutes les variables sont égales à 1, celles de toutes les inconnues égales à zéro, et celles de toutes les dérivées premières égales à 1, il est clair que le système proposé est orthonome (nouvelle définition), et de plus harmonique (I).

Cela étant, la simple définition des systèmes du premier ordre que M. MÉRAY et moi avons étudiés en 1890 (*Annales de l'Ecole Normale*, 1890, p. 28, 29, 30, 44 et 45), montre qu'on peut les considérer comme un cas particulier fort restreint des systèmes harmoniques.

Comme je l'ai fait remarquer dans l'Introduction, et comme on peut aisément s'en assurer, ils comprennent à leur tour, comme cas particuliers, les formes du premier ordre étudiées par M. KÖNIG et par les divers auteurs qui l'ont précédé.

VI. *Les systèmes canoniques de M. Bourlet (1891) constituent un cas particulier des systèmes parataxiques, à plus forte raison (III) des systèmes*

harmoniques, à plus forte raison enfin (I) des systèmes que j'appelle aujourd'hui orthonomes.

Leur définition (voir la Thèse de M. BOURLET, p. 27) revient en effet à la suivante:

Un système différentiel sera dit *canonique*, s'il est du premier ordre, linéaire par rapport aux dérivées des fonctions inconnues qu'il implique, résolu par rapport à un certain nombre de ces dérivées, et si de plus les lignes et les colonnes de son tableau peuvent être rangées dans un ordre tel, que le second membre de l'équation écrite dans une case pleine quelconque ne contienne, outre les variables indépendantes et les fonctions inconnues, que les dérivées premières correspondant, soit aux cases vides situées dans les lignes inférieures à celle de la case pleine considérée, soit aux cases vides situées à droite dans la même ligne.

D'après cette définition, les systèmes canoniques de M. BOURLET ne sont évidemment autre chose que des systèmes parataxiques et linéaires du premier ordre.

VII. *Les systèmes canoniques définis et étudiés par M. Delassus en 1896 constituent un cas particulier des systèmes taxiques, à plus forte raison (II) des systèmes que j'ai étudiés en 1893 sous le nom d'harmoniques, à plus forte raison enfin (I) des systèmes que j'appelle aujourd'hui orthonomes.*

Désignons par n l'ordre d'un système différentiel donné; rangeons les dérivées de tous ordres des fonctions inconnues u, v, \dots, w dans l'ordre taxique, comme il a été expliqué au n° 21 (exemple II); et ne considérons, dans cette suite indéfinie, que la portion limitée E contenant les dérivées des ordres $1, 2, \dots, n$. Si l'on parcourt de gauche à droite cette suite limitée, il résulte des explications données au n° 21 que l'on rencontrera successivement:

l'ensemble $E_u^{(n)}$ des dérivées d'ordre n de u , l'ensemble $E_v^{(n)}$ des dérivées d'ordre n de v, \dots , l'ensemble $E_w^{(n)}$ des dérivées d'ordre n de w ;

l'ensemble $E_u^{(n-1)}$ des dérivées d'ordre $n-1$ de u , l'ensemble $E_v^{(n-1)}$ des dérivées d'ordre $n-1$ de v, \dots , l'ensemble $E_w^{(n-1)}$ des dérivées d'ordre $n-1$ de w ;

etc.;

finally, l'ensemble $E_u^{(1)}$ des dérivées premières de u , l'ensemble

$E_v^{(1)}$ des dérivées premières de v, \dots , l'ensemble $E_w^{(1)}$ des dérivées premières de w .

Cela posé, la définition donnée par M. DELASSUS de ses systèmes *canoniques* (voir les Annales de l'Ecole Normale, 1896, p. 440 et 441) revient à dire qu'un pareil système est résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues, et que, si l'on partage en groupes les équations du système, suivant que les premiers membres des équations dont il s'agit appartiennent à l'un ou à l'autre des ensembles partiels

$$\begin{aligned} E_u^{(n)} &, E_v^{(n)} &, \dots, E_w^{(n)}, \\ E_u^{(n-1)} &, E_v^{(n-1)} &, \dots, E_w^{(n-1)}, \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_u^{(1)} &, E_v^{(1)} &, \dots, E_w^{(1)}, \end{aligned}$$

chacun des groupes d'équations ainsi obtenus satisfait à la double condition suivante: 1° en désignant par j le nombre des équations qui composent un groupe quelconque, ces j équations se trouvent résolues par rapport aux j premières dérivées de l'ensemble partiel correspondant; 2° chaque équation du groupe considéré ne contient dans son second membre, outre les variables indépendantes et les inconnues, que des dérivées paramétriques postérieures, dans l'ensemble E , aux j premiers membres du groupe.

Les systèmes canoniques de M. DELASSUS sont donc évidemment taxiques.

VIII. *Les résultats exposés par M. Goursat dans les Comptes-Rendus de l'Académie des sciences du 2 novembre 1897, constituent un cas particulier de ceux que j'expose au n° 31 du présent Mémoire.*

Désignons en effet par u une fonction inconnue des deux variables indépendantes x et y , et considérons l'équation aux dérivées partielles

$$(79) \quad \frac{\partial^n u}{\partial x^h \partial y^{n-h}} = F\left(x, y, u, \partial, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial y^n}, \frac{\partial^n u}{\partial x \partial y^{n-1}}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^{h-1} \partial y^{n-h+1}}, \frac{\partial^n u}{\partial x^{h+1} \partial y^{n-h-1}}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right),$$

dans le second membre de laquelle ∂, \dots désignent toutes les dérivées de u des ordres $1, 2, \dots, n-1$. Si l'on attribue à x, y, u les cotes premières respectives $1, 1, 0$ et les cotes secondes respectives $c_x, c_y, 0$, avec la condition $c_x \geq c_y$, les quantités u, ∂, \dots seront toutes normales vis à vis du premier membre de l'équation (79), comme ayant une cote première inférieure; quant à la quantité

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^i \partial y^{n-i}},$$

qui a même cote première que le premier membre, elle sera normale ou non vis à vis de lui, selon que la différence

$$[hc_x + (n-h)c_y] - [ic_x + (n-i)c_y] = (h-i)(c_x - c_y)$$

sera ou non positive; en supposant, pour fixer les idées, $c_x > c_y$, on voit donc que les quantités

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}, \frac{\partial^n u}{\partial x \partial y^{n-1}}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^{h-1} \partial y^{n-h+1}}$$

sont normales vis à vis du premier membre $\frac{\partial^n u}{\partial x^h \partial y^{n-h}}$, mais que les quantités

$$(80) \quad \frac{\partial^n u}{\partial x^{h+1} \partial y^{n-h-1}}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$$

ne le sont pas, sans toutefois que leur cote première surpasse celle du premier membre dont il s'agit.

L'application à ce cas particulier de notre proposition du n° 31 fournit alors le résultat suivant, dans lequel on reconnaîtra sans peine celui qu'a récemment formulé M. GOURSAT:

Si l'on désigne par (A) le groupe des équations obtenues en égalant à zéro les dérivées premières du second membre de l'équation (79) par rapport aux quantités (80), et si l'on impose à une intégrale hypothétique de (79) des conditions initiales arbitrairement choisies sous la seule restriction que les équations (A) se trouvent numériquement vérifiées par les valeurs initiales des quantités qu'elles contiennent, l'intégrale dont il s'agit ne peut manquer d'exister effectivement.

$$\begin{aligned} f_1(z + \omega) &= \mu_1 f_1(z) + Q_1[f_0(z), \varphi_0(z), \dots, \psi_0(z)], \\ \varphi_1(z + \omega) &= \mu_2 \varphi_1(z) + Q_2[\bar{f}_0(z), \varphi_0(z), \dots, \psi_0(z)], \\ &\vdots \\ \psi_1(z + \omega) &= \mu_m \psi_1(z) + Q_m[\bar{f}_0(z), \varphi_0(z), \dots, \psi_0(z)]. \end{aligned}$$

Il détermine des fonctions $f_1(z), \varphi_1(z), \dots, \psi_1(z)$ ayant dans la première bande les mêmes singularités (pôles) que $f_0(z), \varphi_0(z), \dots, \psi_0(z)$. On le voit de la manière la plus simple, en posant

[illegible]

En se servant alors du théorème du par. 9, on est assuré que l'on peut déterminer des fonctions F_1, \dots, ψ_1 holomorphes dans la bande yy', AA' et un peu à droite et à gauche. On continue alors en faisant successivement les approximations indiquées au par. 4. La seule différence avec la théorie développée aux par. 4 et suivants, est que dans ces paragraphes les Q représentaient des polynômes, tandis qu'ici ce sont des séries convergentes seulement si les variables qui y figurent sont suffisamment petites. Mais il n'y a pas là de véritable difficulté, car on a à considérer seulement les fonctions Q quand la variable z est dans la bande ii' , et si dans cette bande les modules de $f_0, \varphi_0, \dots, \psi_0$ sont suffisamment petits, le lemme du par. 3 et les raisonnements du par. 5 subsistent entièrement.

Nous pouvons donc conclure à l'existence de fonctions uniformes

$$f(z), \varphi(z), \dots, \psi(z)$$

satisfaisant aux équations (E). Notre mode de raisonnement prouve que l'on peut avoir une solution de ces équations fonctionnelles pour laquelle les fonctions f, φ, \dots, ϕ deviendront infinies dans la bande (y, A') comme des fonctions données doublement périodiques de seconde espèce

$$f_0(z), g_0(z), \dots, \psi_0(z),$$

pourvu que ces fonctions aient des modules assez petits dans la bande ii' .

Ce serait une question intéressante de rechercher *toutes* les solutions possibles uniformes et périodiques des équations (E). Celles que j'ai obtenues sont vraisemblablement très particulières, malgré le caractère de généralité qu'elles paraissent présenter; la théorie des systèmes d'équations en nombre infini pourra peut-être trouver d'importantes applications dans des problèmes de ce genre, quand elle sera plus développée.

Je n'aborde pas, au moins pour le moment, ces difficiles problèmes. C'est la restriction relative aux coefficients μ que je veux approfondir maintenant. Le résultat obtenu suppose que l'on n'a pas d'égalité de la forme

$$(\alpha) \quad \mu_i = e^{\frac{2\nu\pi i\omega}{\omega'}}$$

i étant un des nombres $1, 2, \dots, m$, et ν un entier positif ou négatif. Avec le mode de démonstration que je viens d'employer ici, l'impossibilité de la relation (4) ne joue plus de rôle. Nous allons montrer que, même dans le cas, où il existe une relation de la forme (α), on peut trouver des transcendentes uniformes satisfaisant aux conditions indiquées.

La difficulté, au premier abord, paraît sérieuse, car les approximations successives ne peuvent plus être effectuées quand on a une relation de la forme (α). On peut cependant lever la difficulté de la manière suivante. Soit $\lambda(z)$ une fonction doublement périodique de seconde espèce aux multiplicateurs 1 et a (en désignant par a une constante quelconque), telle par conséquent que

$$\lambda(z + \omega'i) = \lambda(z), \quad \lambda(z + \omega) = a\lambda(z)$$

et supposons que $\lambda(z)$ reste holomorphe dans la bande ii' . Posons

$$f(z) = \lambda(z) \cdot F(z), \quad \varphi(z) = \lambda(z) \cdot \Phi(z), \quad \dots \quad \psi(z) = \lambda(z) \cdot \Psi(z).$$

On aura

$$F(z + \omega) = \frac{\mu_1}{a} F(z) + P_1(F(z), \Phi(z), \dots, \Psi(z), \lambda(z)),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Psi(z + \omega) = \frac{\mu_m}{a} \Psi(z) + P_m(F(z), \Phi(z), \dots, \Psi(z), \lambda(z)),$$

les P étant des séries en F, Φ, \dots, Ψ commençant par des termes du

second degré, et dont les coefficients dépendent d'ailleurs de $\lambda(z)$. Ces équations sont de même forme que les équations (5), sauf que $\lambda(z)$ y figure, ce qui n'est d'aucune importance pour l'emploi des approximations successives. Mais les multiplicateurs $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ ont été remplacés par

$$\frac{\mu_1}{a}, \frac{\mu_2}{a}, \dots, \frac{\mu_m}{a}$$

et comme a peut être pris arbitrairement, il n'y a plus de multiplicateur singulier. La difficulté signalée a donc disparu. Si donc aucun des multiplicateurs μ n'est nul, *il y aura certainement des transcendentes uniformes dans tout le plan, avec des discontinuités uniquement polaires, admettant la période ω et satisfaisant aux conditions (E).*

ÜBER EINE NEUE THEORIE DER ALGEBRAISCHEN FUNCTIONEN ZWEIER VARIABLEN

VON

K. HENSEL

in BERLIN.

§ 1. *Einleitung. Ziel der Untersuchung.*

Die Theorie der algebraischen Functionen von zwei Variablen, oder die Lehre von den algebraischen Oberflächen und Raumcurven ist seit ihrer Begründung durch CLEBSCH und NÖTHER bisher wesentlich nach der mehr geometrischen Richtung ausgebildet worden, welche bei der Untersuchung der ebenen algebraischen Curven zu so schönen Erfolgen geführt hatte. Dagegen ist sie bis jetzt noch nicht mit den Methoden der reinen Analysis behandelt worden, wie dies für die algebraischen Functionen einer Veränderlichen zuerst durch CAUCHY und PUISEUX, später in weiterem Umfange durch RIEMANN und WEIERSTRASS geschehen ist.

Ich möchte in dieser Abhandlung die Grundlagen einer Theorie auseinandersetzen, welche wohl als directe Verallgemeinerung der Weierstrass'schen Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen auf Functionen von zwei und beliebig vielen Variablen angesehen werden kann. Mein Ziel ist, zu zeigen, dass und wie der gesammte Wertvorrath einer n -wertigen algebraischen Function von zwei Variablen stetig, d. h. in n Zweigen ausgebreitet werden kann, und in welcher Weise diese n Zweige unter einander zusammenhängen.

Ich zeige zunächst, worin der wesentliche Unterschied zwischen den algebraischen Functionen von einer und von zwei Variablen besteht, und in welcher Form die soeben characterisirte Aufgabe in jener höheren Theorie ausgesprochen werden muss.

In der Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen ist die Erkenntniß der analytischen Eigenschaften der Wurzeln einer algebraischen Gleichung $f(y, x) = 0$ dann vollkommen gegeben, wenn man die Verzweigung der zugehörigen n -blättrigen Riemann'schen Kugelfläche d. h. diejenigen Stellen $x = \alpha$ der unabhängigen Variablen kennt, bei deren Umkreisung zwei oder mehrere unter den n conjugirten Zweigen y_1, y_2, \dots, y_n von y in einander übergehen. Die Bestimmung jener n Zweige für eine reguläre oder eine singuläre Stelle $x = \alpha$, die Aufsuchung der Verzweigungspunkte und das Studium der Zusammenhanges jener Zweige in der Umgebung derselben bildet die Fundamentalaufgabe jener Theorie. Sie kann mit den Methoden der Functionentheorie vollständig gelöst werden, da diese die Entwicklung einer solchen Function für jede Stelle $x = \alpha$ nach ganzen, oder, für die Verzweigungspunkte, nach gebrochenen Potenzen von $x - \alpha$ finden lassen, und da die Veränderung einer solchen Potenzreihe beim Umlauf um die Stelle $x = \alpha$ aus ihrer Form unmittelbar hervorgeht.

Das analytische Verhalten der Functionen von zwei Variablen ist nun ein wesentlich anderes, und erfordert zu seiner Erkenntniß eine vollständig andere Untersuchungsmethode. Ich zeige zunächst, worin der Unterschied jener beiden Theorien besteht:

Es sei

$$(1) \quad f(z, xy) = A_n(xy)z^n + A_{n-1}(xy)z^{n-1} + \dots + A_0(xy) = 0$$

eine irreductible Gleichung n^{ten} Grades in z mit ganzen rationalen Functionen von x und y als Coefficienten. Fixirt man nun in der xy -Ebene einen im Endlichen liegenden Punkt \mathfrak{P}_0 ($x = \alpha_1^{(0)}$, $y = \beta_1^{(0)}$) so, dass die n zugehörigen Werthe $\gamma_1^{(0)}, \gamma_2^{(0)}, \dots, \gamma_n^{(0)}$ von z , also die n Wurzeln der Zahlengleichung $f(z, \alpha_1^{(0)}\beta_1^{(0)})$ alle endlich und von einander verschieden sind, so kann man für jeden Nachbarpunkt \mathfrak{P} ($x = \alpha$, $y = \beta$) die zugehörigen Werthe $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ von z stets so bezeichnen, dass sie mit den Anfangswerthen $\gamma_i^{(0)}$ nach der Stetigkeit zusammenhängen, dass also allgemein γ_i in $\gamma_i^{(0)}$ übergeht, wenn \mathfrak{P} auf dem kürzesten Wege zu \mathfrak{P}_0 hingeführt wird. Lässt man nun den Punkt \mathfrak{P} continuirlich weiter und weiter auf der ganzen xy -Ebene fortrücken, so kann man den gesammten Werthvorrath der n -werthigen Function z in n stetig zusammenhängende Reihen ausbreiten, ohne jemals über die Numerirung der n Wurzeln in

Zweifel zu gerathen; nur muss man, genau, wie bei den Functionen einer Variablen die *critischen Punkte*, nämlich alle diejenigen Stellen \bar{p} ausschalten, für welche eine der n Wurzeln $\bar{\gamma}$ unendlich gross ist, oder wo zwei unter ihnen einander gleich werden.

Während nun jene critischen Punkte bei den algebraischen Curven nur in endlicher Anzahl auftreten, bilden sie hier ein System algebraischer Curven. In der That wird ja für alle die und nur die im Endlichen liegenden Punkte \bar{p} eine der n Wurzeln unendlich gross, für welche der Coefficient von z^n in (1) gleich Null wird, und die Gleichungsdiscriminante $D(x, y)$ von (1) verschwindet für alle diejenigen endlichen Punkte (α, β) denen mindestens zwei gleiche Wurzeln γ entsprechen. Durch die Gleichungen:

$$(2) \quad A_n(x, y) = 0, \quad D(x, y) = 0$$

sind also alle critischen Punkte im Endlichen vollständig definirt; zu ihnen können noch die beiden unendlich fernen Geraden:

$$(2') \quad \frac{1}{x} = 0, \quad \frac{1}{y} = 0$$

hinzutreten, deren sämtliche Punkte im Unendlichen liegen; die critischen Punkte treten hier also nicht vereinzelt auf, sondern es existirt eine endliche Anzahl irreductibler Curven, deren sämtliche Punkte für die Functionen z critisch sind; man findet ihre Gleichungen, indem man die irreductiblen Factoren von $A_n(x, y)$ und von $D(x, y)$ einzeln gleich Null setzt.

Während also die algebraischen Functionen einer Variablen in der Umgebung eines *einzelnen* regulären oder critischen Punktes darzustellen sind, bietet sich hier die allgemeinere Aufgabe,

die algebraische Function z soll in der Umgebung desjenigen Zweiges l_0 einer regulären oder einer critischen Curve P betrachtet werden, welcher durch einen beliebig gegebenen Punkt $\mathfrak{p}_0 = (\alpha_0, \beta_0)$ hindurchgeht.

Es sei also P die gegebene irreductible Curve in deren Umgebung die Function z untersucht werden soll,

$$P(y, x) = y^n + p_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + p_0(x) = 0$$

sei ihre Gleichung, und es werde der Punkt \mathfrak{P}_0 der Einfachheit wegen vorläufig im Endlichen angenommen. Dann kann der durch \mathfrak{P}_0 hindurchgehende Zweig l_0 von (P) in der Umgebung von \mathfrak{P}_0 stets durch eine Gleichung

$$y = y_0(x | \alpha_0) = \beta_0 + \beta_1(x - \alpha_0)^{\frac{1}{a}} + \beta_2(x - \alpha_0)^{\frac{2}{a}} + \dots$$

dargestellt werden, wo y_0 eine bestimmte algebraische Potenzreihe bedeutet, die nach ganzen Potenzen von $(x - \alpha_0)^{\frac{1}{a}}$ fortschreitet, wenn, was wir im Folgenden stets voraussetzen wollen, der Punkt \mathfrak{P}_0 ein Verzweigungspunkt von einer beliebigen $(a - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung der Curve P ist.¹ Dann kann die hier sich darbietende Fundamentalaufgabe so ausgesprochen werden: Die Wurzeln z_1, z_2, \dots, z_n der Gleichung (1) sollen in einer endlichen Umgebung des Zweiges l_0 durch Reihen dargestellt werden, welche hier gleichmässig convergiren.

Diese Aufgabe kann nun so umgeformt werden, dass sie der entsprechenden für Functionen einer Variablen ganz analog ist; führt man nämlich statt x und y die neuen Variablen ξ und η durch die Gleichungen

$$\xi = (x - \alpha_0)^{\frac{1}{a}}, \quad \eta = y - y_0(x | \alpha_0)$$

ein, so geht die Gleichung für z über in:

$$\bar{f}(z; \eta) = \bar{A}_n(\eta)z^n + \bar{A}_{n-1}(\eta)z^{n-1} + \dots + \bar{A}_0(\eta) = 0,$$

wo die Grössen $\bar{A}_i(\eta)$ jetzt ebenfalls ganze rationale Functionen von η

¹ Liegt der Zweig im Unendlichen, und ist etwa $\alpha_0 = \infty$ so ist in der Reihe $y_0(x | \alpha_0)$ und in der Gleichung (1) an Stelle von $x - \alpha_0$ die neue Variable $x' = \frac{1}{x}$ einzuführen, ist $\beta_0 = \infty$ ist also

$$y = \frac{\beta_{-h}}{(x - \alpha_0)^{\frac{h}{a}}} + \frac{\beta_{-(h-1)}}{(x - \alpha_0)^{\frac{h-1}{a}}} + \dots$$

die Darstellung der Zweiges l_0 so ist für y die Variable

$$y' = \frac{1}{y} = \beta'_h(x - \alpha_0)^{\frac{h}{a}} + \beta'_{h+1}(x - \alpha_0)^{\frac{h+1}{a}} + \dots$$

einzuführen, die Resultate bleiben also wörtlich bestehen.

sind; aber ihre Coefficienten sind nicht mehr ganze *rationale* Functionen von ξ sondern algebraische Potenzreihen, welche nach ganzen Potenzen von ξ fortschreiten und in einer endlichen Umgebung der Stelle $\xi = 0$ gleichmässig convergiren.

Für einen jeden speciellen *constanten* Werth ξ_0 von ξ innerhalb des gemeinsamen Convergenzbereiches aller jener Reihen kann also die n -wertige Function nach den Sätzen von PUISEUX in n Reihen entwickelt werden, welche nach ganzen oder nach gebrochenen Potenzen von

$$\eta = (y - y_0)$$

mit constanten Coefficienten fortschreitet, und die n Wurzeln unserer Gleichung in einer endlichen Umgebung jener Stelle darstellen; lässt man aber ξ andere und andere constante Werthe ξ_0, ξ'_0, \dots annehmen, so könnte man jedesmal vollständig andere Potenzreihen für z erhalten, welche nur innerhalb des gemeinsamen Convergenzbereiches mit einander coincidirten.

Ich werde aber in dieser Arbeit zeigen, dass die n Wurzeln z_1, \dots, z_n in der Umgebung der Stelle ($\xi = 0, \eta = 0$) oder von ($x = \alpha, y = y_0(x|\alpha)$) sämtlich in Reihen von der Form entwickelt werden können:

$$(3) \quad e_0(\xi) + e_1(\xi)\eta^{\frac{1}{b}} + e_2(\xi)\eta^{\frac{2}{b}} + \dots,$$

welche nach ganzen oder nach gebrochenen Potenzen von $\eta = (y - y_0)$ fortschreiten; ihre Coefficienten sind algebraische Potenzreihen von $\xi = (x - \alpha_0)^{\frac{1}{a}}$; diese Reihen convergiren als Functionen von ξ und von η betrachtet innerhalb einer endlichen Umgebung der Stelle ($\xi = \eta = 0$) und stellen für jedes Werthsystem ($\xi = \xi_0, \eta = \eta_0$) innerhalb desselben die n Gleichungswurzeln dar.

Dieses Resultat kann nicht durch die Methoden hergeleitet werden, durch welche CAUCHY und PUISEUX dieses Problem für Functionen einer Veränderlichen in so allgemeiner Weise gelöst haben, noch weniger kann man mit ihnen den analytischen Character der Coefficienten $e_i(\xi)$ für den ganzen Bereich der Variablen ξ oder x erkennen.

Ich benutze vielmehr zur Lösung dieser Aufgabe ein neues rein arithmetisches Verfahren, welches successive die einzelnen Coefficienten

$e_i(\xi)$ eines Zweiges zu bestimmen lehrt, und aus dem dann die Convergenz jener Reihe (3) und der analytische Character ihrer Coefficienten leicht erschlossen werden kann. Ich bemerke dabei, dass dieses Verfahren auch für die Untersuchung der algebraischen Functionen von beliebig vielen Veränderlichen benutzt werden kann, wie ich in einer späteren Abhandlung zeigen werde.

Die hier auseinandergesetzten Methoden und Resultate bildeten den ersten Theil einer Vorlesung, die ich im Wintersemester 1898—99, an der Berliner Universität gehalten habe; bei der Redaction jener Vorlesung für den Druck hat mich einer meiner Zuhörer Herr F. HARTOGS in dankenswerthester Weise unterstützt.

Zuerst soll die hier für die *algebraischen* Function gestellte Aufgabe zunächst für die rationalen Functionen zweier Variablen gelöst werden, da sich in diesem einfachsten Falle besonders deutlich zeigen lässt, wie man durch die Natur des behandelten Problemcs gerade auf die hier gewählte Fragestellung geführt wird, und da die hier gefundenen Resultate bei der Lösung des allgemeinen Problemcs benutzt werden.

§ 2. Die rationalen Functionen von zwei Variablen; ihre Zerlegung in Linearfactoren.

Wir betrachten zunächst die Gesamtheit aller rationalen Functionen von x und y und untersuchen sie in der Umgebung einer beliebigen Stelle $x = \alpha$ der Variablen x , welche im Endlichen liegen oder aber auch die unendlich ferne Stelle sein kann. Eine jede solche Function kann in der Form dargestellt werden:

$$(1) \quad f(x, y) = \frac{g(x, y)}{h(x, y)} = \frac{\bar{a}_0(x) + \bar{a}_1(x)y + \dots + \bar{a}_m(x)y^m}{\bar{b}_0(x) + \bar{b}_1(x)y + \dots + \bar{b}_n(x)y^n},$$

wo alle Coefficienten $\bar{a}_i(x)$ und $\bar{b}_k(x)$ als ganze Functionen von x vorausgesetzt werden können welche nicht alle eine und dieselbe ganze Function von x als gemeinsamen Theiler enthalten. In der Umgebung der endlichen Stelle $x = \alpha$ können dann alle nach positiven ganzen Potenzen des zugehörigen Linearfactors $x - \alpha$ entwickelt werden, welche in einer endlichen Umgebung jener Stelle gleichmässig convergiren, und dasselbe

ist für $\alpha = \infty$ der Fall, wenn man, was in der Folge stets geschehen soll, $x - \alpha$ dann durch $\frac{1}{x}$ ersetzt. Denkt man sich alle Coefficienten in dieser Weise entwickelt, und die niedrigste allen gemeinsame Potenz im Zähler und Nenner herausgezogen, so kann jede solche Function folgendermassen geschrieben werden:

$$(2) \quad f(x, y) = (x - \alpha)^r \cdot \frac{a_0(x|\alpha) + a_1(x|\alpha)y + \dots + a_m(x|\alpha)y^m}{b_0(x|\alpha) + b_1(x|\alpha)y + \dots + b_n(x|\alpha)y^n},$$

wo jetzt die Coefficienten $a_i(x|\alpha)$, $b_k(x|\alpha)$, wie stets im Folgenden, Potenzreihen von $x - \alpha$ bedeuten sollen, welche in einer endlichen Umgebung der Stelle $x = \alpha$ gleichmässig convergieren; dieselben enthalten hier keine negativen Potenzen von $x - \alpha$, und für $x = \alpha$ verschwinden weder alle Coefficienten im Zähler noch auch diejenigen im Nenner.

Nur für eine endliche Anzahl von Stellen $x = \alpha$ tritt in (2) eine positive oder negative Potenz des zugehörigen Linearfactors vor jenen Bruch, im Allgemeinen ist $r = 0$; hierzu muss nämlich für ein endliches α der zugehörige Linearfactor in dem Ausdrücke (1) von $f(x, y)$ in allen Coefficienten des Zählers oder in allen Coefficienten der Nenners als Theiler enthalten sein. Ist dagegen $\alpha = \infty$ und ist der Zähler und der Nenner von $f(x, y)$ in (1) in Bezug auf x bzw. vom μ^{ten} und vom ν^{ten} Grade, so ergibt sich ohne Weiteres, dass alsdann in der Darstellung (2) in der Umgebung jener Stelle die Potenz $\left(\frac{1}{x}\right)^{\nu-\mu}$ des bezüglichen Linearfactors vor dem Bruche auftritt.

Nunmehr kann man in jener Darstellung (2) auf der rechten Seite Zähler und Nenner in ihre Linearfactoren zerlegen, und man erhält so die folgende Darstellung:

$$(3) \quad f(x, y) = (x - \alpha)^r \cdot \frac{(y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_m) a_m(x|\alpha)}{(y - y'_1)(y - y'_2) \dots (y - y'_n) b_n(x|\alpha)}.$$

Hier sind $y_1 \dots y_m$; $y'_1 \dots y'_n$ die Zweige, welche der Zähler $g(x, y)$ und der Nenner $h(x, y)$ in der Umgebung der Stelle ($x = \alpha$) besitzen, sie sind also ebenfalls Potenzreihen, welche nach ganzen oder nach gebrochenen Potenzen des Linearfactors $(x - \alpha)$ fortschreiten, und welche alle innerhalb einer endlichen Umgebung jener Stelle gleichmässig convergiren;

falls eine oder mehrere jener Reihen mit einer negativen Potenz von $x - \alpha$ beginnen, also für $x = \alpha$ unendlich gross werden, so ist jener endliche Convergenzbereich oder jene Umgebung der Stelle $x = \alpha$ nach innen durch einen beliebig klein zu wählenden Kreis begrenzt, und in dieser Weise soll die Umgebung einer Stelle, falls dies nötig sein sollte, stets begrenzt vorausgesetzt werden. Auch hier können und wollen wir den Bruch $f(x, y) = \frac{g(x, y)}{h(x, y)}$ als in seiner reducirten Form, d. h. so gegeben voraussetzen, dass Zähler und Nenner als Function von y keinen gemeinsamen Theiler besitzen; alsdann sind die Linearfactoren $y - y_i$ im Zähler von den Factoren $y - y'_i$ im Nenner verschieden; dagegen kann natürlich einer der Linearfactoren im Zähler oder im Nenner noch mehrfach auftreten. Um dieses Vorkommen mehrfacher Linearfactoren im Zähler oder im Nenner von $f(x, y)$ einheitlich characterisiren zu können sagen wir genau wie bei den rationalen Functionen einer Variablen, $f(y, x)$ besitzt in Bezug auf einen Linearfactor $y - y_0$ die positive oder negative Ordnungszahl $\pm \sigma$ wenn derselbe σ Male im Zähler oder im Nenner jener Function vorkommt, und diese Function hat die Ordnungszahl Null, wenn $y - y_0$ weder im Zähler noch im Nenner auftritt.

Zu diesen Linearfactoren $y - y_i$ und $y - y'_i$ kann endlich als letzter noch der Factor $y - \infty$ oder $\frac{1}{y}$ treten, welcher für jede beliebige Stelle $x = \alpha$ dann und nur dann verschwindet wenn $\frac{1}{y} = 0$ also $y = \infty$ ist. Bringt man die zu untersuchende Function $f(x, y)$ in (1) auf die Form:

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{y}\right)^{n-m} \cdot \frac{\bar{a}_m(x) + \bar{a}_{m-1}(x)\frac{1}{y} + \dots + \bar{a}_0(x)\left(\frac{1}{y}\right)^m}{\bar{b}_n(x) + \bar{b}_{n-1}(x)\frac{1}{y} + \dots + \bar{b}_0(x)\left(\frac{1}{y}\right)^n},$$

so erkennt man, da sich im Zähler und Nenner für $y = \infty$ alle Glieder mit Ausnahme der ersten auf Null reduciren, dass $f(x, y)$ in Bezug auf den Linearfactor $\frac{1}{y}$ die Ordnungszahl $(n - m)$ besitzt, dass also die Ordnungszahl von $f(x, y)$ in Bezug auf den Linearfactor $\frac{1}{y}$ stets gleich dem negativ genommenen Grade $(m - n)$ jener rationalen Function für y ist.

Beachtet man endlich, dass die Summe der Ordnungszahlen für alle gleichen oder verschiedenen Linearfactoren im Zähler bzw. im Nenner gleich m bzw. gleich $(-n)$ ferner für den Linearfactor $\frac{1}{y}$ gleich $(n-m)$, und endlich für jeden anderen Linearfactor $y - y_0$ gleich Null ist, so ergibt sich auch für die rationalen Functionen von zwei Variablen der wichtige Satz:

Die Summe der Ordnungszahlen einer beliebigen rationalen Function $f(y, x)$ für alle Linearfactoren $y - y_0$ in der Umgebung einer beliebigen Stelle $x = \alpha$ ist stets gleich Null, d. h. eine jede solche Function besitzt ebensoviele Nullcurven wie Polcurven.

Besitzt also eine Function $f(y, x)$ überhaupt keinen Linearfactor $y - y_0$ in negativer Ordnung, so muss sie nothwendig von y unabhängig, also eine rationale Function von x allein sein, denn sie enthält nach dem obigen Satze auch keinen Linearfactor in positiver Ordnung.

Geometrisch stellen die Gleichungen:

$$y - y_i = 0, \quad y - y'_k = 0 \quad \left(\begin{matrix} i=1, 2, \dots, m \\ k=1, 2, \dots, n \end{matrix} \right)$$

die einzelnen Zweige der Zählercurve $g(y, x) = 0$ und der Nennercurve $h(y, x) = 0$ von der Function $f(y, x)$ in der Umgebung der Stelle $x = \alpha$ dar; sie können und sollen daher, wie dies oben bereits geschehen ist, auch mitunter als Nullcurven oder Polcurven bezeichnet werden. Zu ihnen kann dann noch die unendlich ferne Gerade $\frac{1}{y} = 0$ und ausserdem an einer endlichen Anzahl von Stellen $x = \alpha$ die zugehörige Gerade $x - \alpha = 0$, als ein- oder mehrfache Nullcurve oder Polcurve hinzutreten.

§ 3. Die Entwicklung der rationalen Functionen in Potenzreihen.

In der Theorie der analytischen Functionen einer Variablen wird gezeigt, dass man jede rationale Function $f(x)$ in einer endlichen Umgebung einer beliebigen Stelle ($x = \alpha$) in eine nach ganzen Potenzen des zugehörigen Linearfactores fortschreitende gleichmässig convergente Potenzreihe entwickeln kann, welche höchstens mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen desselben beginnt.

In gleicher Weise wollen wir jetzt zeigen, dass und wie man eine rationale Function $f(x, y)$ von zwei Variabeln in endlicher Umgebung eines beliebigen Curvenzweiges l_0 ($y = y_0 = \mathfrak{P}(x|\alpha)$) ebenfalls in eine nach ganzen Potenzen des zugehörigen Linearfactors $(y - y_0)$ fortschreitende Potenzreihe entwickeln kann, welche ebenfalls höchstens mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen von $y - y_0$ beginnt und innerhalb einer endlichen Umgebung jenes Curvenzweiges gleichmässig convergirt.

Es sei also:

$$(1) \quad y = y_0 = \mathfrak{P}(x|\alpha)$$

ein Zweig l_0 einer beliebigen algebraischen Curve $P(y, x) = 0$, oder, was dasselbe ist, ein Element einer beliebigen algebraischen Function in der Umgebung einer beliebigen Stelle $(x = \alpha)$ und es werde wieder, um gleich den allgemeinsten Fall zu betrachten, angenommen, dass jene Potenzreihe

nach ganzen Potenzen von $(x - \alpha)^{\frac{1}{a}}$ fortschreitet, d. h. dass jener Curvenzweig an der Stelle $x = \alpha$ einen a -blättrigen Verzweigungspunkt besitzt. Denkt man sich dann jenes Element y_0 durch analytische Fortsetzung nach allen Seiten ausgebreitet so erhält man die ganze zugehörige algebraische Function, welche wir als μ -wertig voraussetzen wollen. Ihre Werthe sind dann eindeutig und im Allgemeinen stetig auf einer ganz bestimmten μ -blättrigen Riemann'schen Kugelfläche ausgebreitet, welche im Folgenden stets durch $R(y_0)$ bezeichnet und als gegeben vorausgesetzt werden soll. — Sind $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(\mu-1)}$ die μ zu dem Element y_0 conjugirten Potenzreihen, so genügt die algebraische Function y_0 der irreduciblen Gleichung μ^{ten} Grades:

$$P(y, x) = (y - y_0)(y - y'_0) \dots (y - y_0^{(\mu-1)}) = y^\mu + p_1(x)y^{\mu-1} + \dots + p_\mu(x) = 0$$

mit rationalen Functionen von x als Coefficienten.

Es sei p_0 der zu dem Functionenelemente y_0 gehörige Punkt der Riemann'schen Kugelfläche; dann convergirt jene Reihe gleichmässig innerhalb eines Kreises oder, falls y_0 für $x = \alpha$ unendlich wird, innerhalb eines jenen Mittelpunkt ausschliessenden Kreisringes, dessen äusserer Begrenzungskreis durch den nächsten Pol von y_0 oder durch den nächsten Verzweigungspunkt der Kugelfläche $R(y_0)$ hindurchgeht. Dieser stets endliche Convergencebereich der Reihe y_0 werde durch A_0 bezeichnet.

Um nun eine beliebige rationale Function $f(y, x)$ in der angegebenen Weise in eine Potenzreihe zu entwickeln führen wir zunächst an Stelle von x die neue unabhängige Variable ξ durch die Gleichung:

$$(x - \alpha)^{\frac{1}{a}} = \xi, \quad x = \alpha + \xi^a$$

ein, wodurch die Reihe y_0 in eine nach ganzen Potenzen von ξ fortschreitende und in der Umgebung von $\xi = 0$ convergirende Potenzreihe übergeht. Entwickelt man dann in der rationalen Function $f(x, y)$ Zähler und Nenner für sich nach dem Taylor'schen Satze nach Potenzen von $y - y_0$ so ergibt sich:

$$(2) \quad f(y, x) = \frac{g(y, x)}{h(y, x)} = \frac{g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + \frac{g''(y_0)}{2}(y - y_0)^2 + \dots}{h(y_0) + h'(y_0)(y - y_0) + \frac{h''(y_0)}{2}(y - y_0)^2 + \dots},$$

wo alle Ableitungen im Zähler und Nenner Potenzreihen in ξ sind, welche ebenfalls innerhalb A_0 convergiren. Lässt man jetzt diejenigen Reihen im Zähler und Nenner fort, welche gleich Null sind, und setzt die entsprechende Potenz von $y - y_0$ vor den Bruch, so kann derselbe so geschrieben werden:

$$(3) \quad f(y, x) = (y - y_0)^r \cdot \frac{g_0(\xi) + g_1(\xi)(y - y_0) + \dots + g_r(\xi)(y - y_0)^r}{h_0(\xi) + h_1(\xi)(y - y_0) + \dots + h_s(\xi)(y - y_0)^s}.$$

Wir dividiren endlich noch Zähler und Nenner durch $h_0(\xi)$ und schreiben den Ausdruck dann in der folgenden Form:

$$(4) \quad f(y, x) = (y - y_0)^r \cdot \frac{\bar{g}_0(\xi) + \bar{g}_1(\xi)(y - y_0) + \dots + \bar{g}_r(\xi)(y - y_0)^r}{1 + \bar{h}_1(\xi)(y - y_0) + \dots + \bar{h}_s(\xi)(y - y_0)^s};$$

auch hier sind die Quotienten:

$$\bar{g}_i(\xi) = \frac{g_i(\xi)}{h_0(\xi)}, \quad \bar{h}_k(\xi) = -\frac{h_k(\xi)}{h_0(\xi)} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, r; \quad k = 1, 2, \dots, s)$$

Potenzreihen von ξ , welche höchstens eine endliche Anzahl negativer Potenzen von ξ enthalten, und deren Convergenzkreis entweder mit dem vorigen übereinstimmt, oder durch die nächste Nullstelle von $h_0(\xi)$ hindurchgeht. Es möge der stets endliche gemeinsame Convergenzradius jener Reihen durch ρ_0 bezeichnet werden.

Um nun die in jenen Reihen eventuell auftretenden negativen Potenzen von ξ zu beseitigen führen wir an Stelle von y die neue Variable η durch die Gleichung ein:

$$(5) \quad \frac{y - y_0}{\xi^d} = \eta$$

und wählen die ganze Zahl $d = \partial a$ als das kleinste Multiplum von a so, dass sich in (4) nach Substitution von $\eta \xi^d = \eta(x - \alpha)^{\partial}$ für $y - y_0$ alle negativen Potenzen von ξ , natürlich mit Ausnahme derer von $\bar{g}_0(\xi)$, fortheben; beseitigen wir auch diese endlich dadurch, dass wir jene Potenz von ξ vor den Bruch schreiben, so kann $f(x, y)$ so dargestellt werden:

$$f(x, y) = \xi^p \eta^q \cdot \frac{\varphi(\xi \eta)}{1 - \eta \cdot \phi(\xi \eta)}$$

wo $\varphi(\xi \eta)$ und $\phi(\xi \eta)$ Potenzreihen von ξ und η sind, welche keine negativen Potenzen von ξ und η enthalten, und die für $|\xi| < \rho_0$ und für ein beliebig grosses η convergiren, da sie ja für η nur von endlichem Grade sind.

Beschränkt man nun ξ und η zunächst so, dass:

$$(5') \quad |\xi| < \rho_0, \quad |\eta \cdot \phi(\xi \eta)| < 1$$

ist, so kann man den Nenner entwickeln und erhält:

$$f(x, y) = \xi^p \eta^q \varphi(\xi \eta) (1 + \eta \phi + \eta^2 \phi^2 + \dots) = \xi^p \eta^q \cdot p(\xi \eta),$$

und da bei den soeben gemachten Beschränkungen sowohl $\varphi(\xi \eta)$ als auch die Reihe $\Sigma (\eta \phi)^i$ gleichmässig convergirt, so gilt dasselbe von ihrem Producte; dasselbe kann also in eine Potenzreihe $p(\xi \eta)$ von ξ und η geordnet werden, welche innerhalb desselben Bereiches gleichmässig convergirt.

Dieser Convergenzbereich für ξ und η ist niemals unendlich klein. In der That ist ja die Bedingung $|\eta \phi(\xi \eta)| < 1$ sicher a fortiori erfüllt, wenn man die Reihe

$$\phi(\xi \eta) = \Sigma \phi_i \xi^i \eta^i$$

durch eine andere Reihe $\bar{\phi}(\xi \eta)$ ersetzt, in welcher alle Coefficienten ϕ_i durch ihre absoluten Beträge ersetzt, und diese dann noch beliebig vergrößert sind; betrachtet man nun alle die Werthsysteme $\xi \eta$, für welche $|\eta \bar{\phi}(\xi \eta)| < 1$ ist, so ist für diese die obige Bedingung (5') ebenfalls erfüllt.

Convergirt nun eine Reihe $\phi(\xi\eta)$ für $|\xi| = \rho$ und $|\eta| = \sigma$ und ist r der grösste Werth den $|\phi(\xi\eta)|$ für jene Werthsysteme annehmen kann, so ist bekanntlich allgemein:

$$|\phi_{ik}| \leq \frac{r}{\rho^i \sigma^k},$$

also ist für alle Werthe $|\xi| < \rho$ und $|\eta| < \sigma$

$$|\eta\phi(\xi\eta)| \leq |\eta| \sum r \cdot \left(\frac{|\xi|}{\rho}\right)^i \left(\frac{|\eta|}{\sigma}\right)^k = \frac{r|\eta|}{\left(1 - \frac{|\xi|}{\rho}\right)\left(1 - \frac{|\eta|}{\sigma}\right)},$$

und jener Ausdruck ist sicher kleiner als 1 wenn:

$$r|\eta| < 1 - \frac{|\xi|}{\rho} - \frac{|\eta|}{\sigma} \quad \text{also} \quad |\eta| < \frac{1 - \frac{|\xi|}{\rho}}{r + \frac{1}{\sigma}},$$

angenommen wird; und da hier der Bereich σ für $|\eta|$ beliebig gross also $\frac{1}{\sigma}$ sicher gleich 1 und ρ beliebig nahe an ρ_0 angenommen werden kann, so ergibt sich für ξ und η die folgende Beziehung:

$$|\xi| < \rho < \rho_0, \quad |\eta| < \frac{1 - \frac{|\xi|}{\rho}}{r + \frac{1}{\sigma}},$$

wenn r jetzt den Maximalwerth von $|\phi(\xi\eta)|$ für $|\xi| = \rho < \rho_0$ und $|\eta| = 1$ bedeutet, und für jeden Werth von ξ ergibt sich so ein ganz bestimmter endlicher Werth für η .

Ordnet man die so sich ergebende Potenzreihe nunmehr nach Potenzen von η allein und multiplicirt man in jener Reihe jedes Glied mit der positiven oder negativen Potenz ξ^σ , so ergibt sich die folgende Darstellung für $f(x, y)$

$$(6) \quad f(x, y) = f_0(\xi)\eta^0 + f_{\sigma+1}(\xi)\eta^{\sigma+1} + \dots,$$

wo die Coefficienten Potenzreihen sind, die nach ganzen Potenzen von ξ fortschreiten, in einer endlichen Umgebung von $\xi = 0$ gleichmässig convergiren und höchstens eine endliche Anzahl negativer Potenzen von ξ

enthalten, wie weit man auch in jener Reihe fortgehen mag. Ferner ist der Exponent σ der Anfangsgliedes jener Reihe offenbar gleich der Ordnungszahl, welche die rationale Function $f(x, y)$ in Bezug auf den Linearfactor $y - y_0$ besitzt und ihrer Entstehungsweise nach sind die Potenzreihen $f_\sigma(\xi)$, ... als rationale Functionen von $g^{(i)}(y_0)$ und $h^{(k)}(y_0)$ ebenfalls rationale Functionen von y_0 und x , also algebraische Functionen, welche auf der zu y_0 zugehörigen Riemann'schen Fläche eindeutig sind. Wörtlich dasselbe Resultat erhält man, wenn man für den Curvenzweig $y = y_0$ in der Umgebung von $x = \alpha$ einen der speciellen Zweige:

$$y = \infty, \quad \text{oder} \quad x = \alpha, \quad \text{oder} \quad x = \infty$$

in der Umgebung der Stellen:

$$x = \alpha, \quad \text{oder} \quad y = \beta \quad \text{oder} \quad y = \beta$$

wählt. Man hat dann in jener Entwicklung nur jedesmal zu setzen:

$$\xi = x - \alpha, \quad \eta = \frac{y - y_0}{x - \alpha}; \quad \text{oder} \quad \xi = y - \beta, \quad \eta = \frac{x - \alpha}{y - \beta};$$

oder endlich:

$$\xi = y - \beta, \quad \eta = \frac{x}{(y - \beta)^d},$$

und alsdann gilt jedesmal genau die oben angegebene Entwicklung (6).

Um nun jenes Resultat allgemein aussprechen zu können bezeichnen wir den Linearfactor $y - y_0$, welcher für alle und nur die Punkte der Curvenzweiges y_0 in der Umgebung der Stelle $x = \alpha$ verschwindet, als den zu jenem Zweige gehörigen Linearfactor; und allgemeiner bezeichnen wir ebenso auch den vorher eingeführten Linearfactor:

$$\eta = \frac{y - y_0}{\xi^d} = \frac{y - y_0}{(x - \alpha)^d},$$

welcher für alle Punkte mit Annahme von $(x = \alpha)$ selbst die gleiche Eigenschaft hat. Dann kann jenes Resultat folgendermassen ausgesprochen werden:

Eine rationale Function $f(x, y)$ kann in der Umgebung eines beliebigen Curvenzweiges $y = y_0$ stets auf eine und nur eine Weise

in eine Potenzreihe entwickelt werden, welche nach ganzen Potenzen des zugehörigen Linearfactors η fortschreitet und höchstens eine endliche Anzahl negativer Potenzen desselben enthält. Alle Coefficienten in jener Entwicklung sind mit y_0 gleich verzweigte algebraische Potenzreihen, deren Ordnungszahlen, falls sie negativ sind, jedenfalls alle unter eine endlichen Grenze bleiben.

Dieser Satz ist die directe Verallgemeinerung des bekannten Theoremes für die rationalen Functionen von einer Variablen.

Der Convergencebereich der Reihen $f_c(\xi), f_{c+1}(\xi), \dots$ geht auf der Kugelfläche $R(y_0)$ durch den nächsten critischen Punkt von y_0 oder durch die nächste Nullstelle der algebraischen Function $h_0(\xi)$ hindurch, welche ja auch auf $R(y_0)$ eindeutig ist. Schliesst man alle jene singulären Punkte, welche nur in endlicher Anzahl auftreten, zunächst aus, und bezeichnet alle übrigen Punkte von $R(y_0)$ als die regulären Stellen, ihre Gesammtheit als den regulären Bereich, so besteht für jede reguläre Stelle eine Entwicklung:

$$(7) \quad f(x, y) = f_c(x|\alpha)(y - y_0)^\sigma + f_{c+1}(x|\alpha)(y - y_0)^{\sigma+1} + \dots$$

wo y_0 sowol als alle Coefficienten $f_k(x|\alpha)$ nach ganzen Potenzen von $x - \alpha$ fortschreiten, und gar keine negativen Potenzen enthalten. Geht man von einer solchen regulären Stelle auf $R(y_0)$ aus, so kann sie mit Umgehung aller singulären Punkte zu jedem anderen regulären Punkte jener Fläche übergeführt werden; für die singulären Punkte und ihre Umgebung gelten dann die entsprechenden Entwicklungen (6), nur dass für die

Verzweigungspunkte an die Stelle von $x - \alpha$ die Potenz $(x - \alpha)^{\frac{1}{a}}$, und für die Nullstellen von $h_0(\xi)$ an die Stelle von $y - y_0$ der allgemeinere Linearfactor $\frac{y - y_0}{\xi^d}$ treten kann.

Der Exponent σ von $(y - y_0)$ mit welchem die Entwicklung (7) beginnt, ist, wie oben erwähnt, gleich der Ordnungszahl von $f(y, x)$ in Bezug auf jenen Linearfactor. Bei der Fortsetzung der Reihe (7) über die ganze Riemann'sche Fläche $R(y_0)$ oder längs der ganzen Curve P bleibt aber offenbar die Ordnungszahl σ stets die gleiche; jene Function f besitzt also die Ordnungszahl σ nicht bloss für den einen Zweig ($y = y_0$) der irreductiblen Curve P sondern in Bezug auf die ganze Curve; dies er-

kennt man hier auch direct, denn eine Function f besitzt dann und nur dann in Bezug auf den Linearfactor $(y - y_0)$ die Ordnungszahl σ , wenn sie die Potenz $P(y, x)^\sigma$ der zugehörigen irreductiblen Function $P(y, x)$ als Factor enthält.

§ 4. Die algebraischen Functionen von 2 Variablen. Ihre Entwicklung in der Umgebung eines regulären Curvenzweiges.

Wir wollen die Resultate der letzten Abschnitte benutzen, um die n Wurzeln oder Zweige z_1, z_2, \dots, z_n einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades mit ganzen rationalen Coefficienten:

(1) $f(z, xy) = A_n(x, y)z^n + A_{n-1}(x, y)z^{n-1} + \dots + A_1(x, y)z + A_0(x, y) = 0$
ebenfalls in der Umgebung eines beliebigen Curvenzweiges

(2) $y = y_0 = \mathfrak{P}_0(x | \alpha), \quad |x - \alpha| < \delta$

in Reihen zu entwickeln, welche nach Potenzen des zugehörigen Linearfactors $y - y_0$ fortschreiten. Geometrisch heisst das, wir wollen die Oberfläche (1) in der Umgebung derjenigen n Raumcurven betrachten, in denen die zu der ebenen Curve (2) gehörige Cylinderfläche die n Blätter jener Oberfläche durchsetzt. Wir setzen der Einfachheit wegen zunächst wieder voraus, dass der betrachtete Punkt \mathfrak{P} im Endlichen liegt, dass also erstens α einen endlichen Werth besitzt und dass zweitens die Reihe y_0 die Form hat

$$y_0 = \beta_0 + \beta_1(x - \alpha)^{\frac{1}{a}} + \beta_2(x - \alpha)^{\frac{2}{a}} + \dots$$

also nicht mit negativen Potenzen von x anfängt. Wäre dies nämlich nicht der Fall, wäre etwa:

$$y_0 = (x - \alpha)^{-\frac{h}{a}} \left(\beta_0 + \beta_1(x - \alpha)^{\frac{1}{a}} + \dots \right),$$

so brauchte man nur wie im § 1 $y' = \frac{1}{y}$ an Stelle von y einzuführen, um diesen allgemeineren Fall auf den hier behandelten zu reduciren.

Ohne die Allgemeinheit zu beschränken können und wollen wir ferner voraussetzen, dass in der definirenden Gleichung (1) für z $A_n(x, y) = 1$

und alle übrigen Coefficienten *ganze* Functionen von x und y sind, dass also jene Gleichung die Form hat:

$$(3) \quad f(z, y) = z^n + a_{n-1}(x, y)z^{n-1} + \dots + a_1(x, y)z + a_0(x, y) = 0,$$

wo alle $a_i(x, y)$ ebenfalls ganze Functionen von x und y sind; denn sollte das nicht der Fall sein, so braucht man in (1) bekanntlich nur $z = \frac{z}{A_n(xy)}$ zu setzen; dann genügt \bar{z} einer Gleichung von der Form (3). Besitzt die Gleichung für z die Form (3) so entsprechen jedem Punkt $x = \alpha$, $y = \beta$ im Endlichen genau n gleiche oder verschiedene aber stets endliche bestimmte Werthe $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ von z , welche die Wurzeln der Gleichung:

$$\gamma^n + a_{n-1}(\alpha, \beta)\gamma^{n-1} + \dots + a_0(\alpha, \beta) = 0$$

sind. Die durch die Gleichung (3) definirte algebraische Function besitzt also den Character einer *ganzen* rationalen Function, und soll daher eine *ganze* algebraische Function von (x, y) genannt werden.

Wir setzen ferner voraus, dass jene Function $f(z, y)$ mit ihrer nach z genommenen Ableitung $f'_z(z, y)$ keinen gemeinsamen Theiler hat, dass sie also für unbestimmte (x, y) keine gleichen Wurzeln besitzt. Auch hierin liegt keine Beschränkung der Allgemeinheit, denn einen solchen Theiler könnte man ja durch das Euclidische Verfahren bestimmen und vorher durch Division entfernen. Haben dann $f(z)$ und $f'(z)$ keinen gemeinsamen Theiler, so kann man ebenfalls durch das Euclidische Verfahren zwei *ganze* Functionen von z, y und x $g(z)$ und $g_1(z)$ so bestimmen, dass:

$$(4) \quad f(z)g(z) + f'(z)g_1(z) = D(x, y)$$

ist, wo $D(x, y)$ eine durch jenes Verfahren sich ergebende *ganze* Function von x und y , die sogenannte *Discriminante* von $f(z)$ ist, welche also in der (xy) -Ebene eine bestimmte Curve, die s. g. *Discriminantencurve* darstellt.

Soll nun für alle Stellen in der Umgebung des beliebig angenommenen Curvenzweiges $y = y_0$ eine Reihe

$$z = e_0(x|\alpha) + e_1(x|\alpha)(y - y_0) + \dots$$

gleichmässig convergiren, und die Gleichung $f(z, y) = 0$ befriedigen, so muss zunächst für $y = y_0$, d. h. für alle Punkte *auf* jenem Zweige $z = e_0(x|\alpha)$

sein, d. h. die Reihe $e_0(x|\alpha)$ muss die Gleichung $f(e_0, y_0) = 0$ in der Umgebung der Stelle $x = \alpha$ befriedigen, welche man aus (3) erhält, wenn man y durch die Potenzreihe $y_0 = \mathfrak{P}_0(x|\alpha)$ ersetzt. Die so sich ergebende Gleichung:

$$(5) \quad f(e_0, y_0) = e_0^n + a_{n-1}(y_0, x)e_0^{n-1} + \dots + a_0(y_0, x) = 0$$

besitzt dann als Coefficienten ganze rationale Functionen von y_0 und x , dieselben sind also sämtlich algebraische Potenzreihen von $x - \alpha$, welche mit y_0 gleich verzweigt sind, keine negativen Potenzen von $x - \alpha$ enthalten und denselben Convergencebereich wie y_0 selbst besitzen. Jene Gleichung besitzt demnach genau n und nur n gleiche oder verschiedene Wurzeln:

$$(5') \quad e_0^{(1)}(x|\alpha), e_0^{(2)}(x|\alpha), \dots, e_0^{(n)}(x|\alpha)$$

welche ebenfalls algebraische Potenzreihen sind, die innerhalb einer endlichen Umgebung der Stelle α gleichmässig convergiren und keine negativen Potenzen von $x - \alpha$ enthalten.

Lässt man den Punkt $x = \alpha$ alle mögliche Umläufe machen, durch die y_0 in sich selbst übergeführt wird, so vertauschen sich die n Potenzreihen $e_0^{(i)}(x|\alpha)$ unter einander. Sind

$$e_0^{(1)}(x|\alpha), \dots, e_0^{(\nu)}(x|\alpha)$$

alle und nur diejenigen unter den n Wurzeln (6), in welche $e_0^{(1)}(x|\alpha)$ durch jene Umläufe übergeführt werden kann, so genügen diese für sich einer und zwar einer irreductiblen Gleichung ν^{ten} Grades

$$f_1(e_0, y_0) = 0$$

deren Coefficienten rational von y_0 abhängen, und welche ein Factor der ganzen Gleichung n^{ten} Grades $f(e_0, y_0) = 0$ in (5) ist. In gleicher Weise können auch die übrigen $n - \nu$ Wurzeln in Gruppen zusammengehöriger Wurzeln geordnet werden, die den einzelnen irreductiblen Factoren von $f(e_0, y_0)$ entsprechen.

Unter jenen Wurzeln $e_0^{(h)}(x|\alpha)$ können gleiche vorkommen; dieser Fall kann aber nur dann eintreten, wenn der Zweig $y = y_0$ der Discriminantencurve angehört. Ist nämlich etwa $e_0^{(1)}(x|\alpha)$ eine mehrfache Wurzel von

$f(e_0, y_0) = 0$, so ist sie auch eine Wurzel der Gleichung $f'(e_0, y_0) = 0$; ersetzt man also in der Identität (4) y und z bzw. durch y_0 und $e_0^{(1)}(x|\alpha)$, so verschwindet ihre linke, also auch ihre rechte Seite, d. h. es muss $D(x, y_0) = 0$ sein, w. z. b. w.

Wir bezeichnen nun speciell eine jener n so bestimmten Reihen (5') durch $e_0(x|\alpha)$ und setzen zunächst voraus dass sie keine mehrfache Wurzel von $f(e_0, y_0) = 0$, dass also sicher:

$$(6) \quad f'(e_0, y_0) \neq 0$$

ist. Wir zeigen dann, dass zu diesem Anfangsgliede eine und nur eine eindeutig bestimmte Reihe

$$z_0 = e_0 + e_1(y - y_0) + e_2(y - y_0)^2 + \dots$$

gehört, deren sämtliche Coefficienten mit e_0 gleich verzweigte algebraische Potenzreihen sind, welche in der Umgebung jenes Zweiges gleichmässig convergirt und die ursprüngliche Gleichung $f(z, y) = 0$ befriedigt.

Zu diesem Zwecke setze ich:

$$z = e_0 + \zeta, \quad y = y_0 + \eta$$

so dass die zu lösende Aufgabe jetzt die ist, in der Reihe:

$$(6') \quad \zeta_0 = z_0 - e_0 = e_1(x|\alpha)\eta + e_2(x|\alpha)\eta^2 + \dots$$

die Coefficienten e_1, e_2, \dots zu finden. Nun ist also:

$$(7) \quad f(z, y) = f(e_0 + \zeta, y_0 + \eta) = f(e_0, y_0) + \zeta f_{10}(e_0, y_0) + \eta f_{01}(e_0, y_0) \\ + \frac{1}{2} (f_{20}(e_0, y_0)\zeta^2 + 2f_{11}(e_0, y_0)\zeta\eta + f_{02}(e_0, y_0)\eta^2) + \dots$$

wo allgemein

$$\left(\frac{\partial^{i+k} f(z, y)}{\partial z^i \partial y^k} \right)_{z=e_0, y=y_0} = f_{ik}(e_0, y_0)$$

gesetzt ist. Aus dieser Gleichung ergibt sich, wenn man beachtet, dass $f(e_0, y_0) = 0$, $f_{10}(e_0, y_0) \neq 0$ ist, folgende Darstellung für ζ

$$(8) \quad \zeta = \left(-\frac{f_{01}}{f_{10}} \right) \eta - \left(2\frac{f_{02}}{f_{10}} \right) \eta^2 - \left(\frac{f_{11}}{f_{10}} \right) \eta \zeta - \left(2\frac{f_{20}}{f_{10}} \right) \zeta^2 - \dots$$

Die Coefficienten auf der rechten Seite dieser Gleichung sind ebenfalls algebraische Potenzreihen von $x - \alpha$, welche mit $e_0(x|\alpha)$ gleichverzweigt sind, da alle jene Quotienten rationale Functionen von e_0 , y_0 , und x sind; ihr gemeinsames Convergenzbereich ist ebenfalls endlich, denn es stimmt entweder mit dem von e_0 überein, oder es geht hin zu der nächsten Nullstelle von $f_{10}(e_0, y_0)$; aber in dieser Gleichung (8) können einige Coefficienten mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen von $x - \alpha$ beginnen. Da $e_0(x|\alpha)$ und $y_0(x|\alpha)$ keine negativen Potenzen enthalten, so gilt das Gleiche von allen Coefficienten $f_{ik}(e_0, y_0)$. Nur dann können also in (8) negative Potenzen von $x - \alpha$ auftreten, wenn der gemeinsame Nenner $\frac{df}{dz} = f_{10}(e_0, y_0)$ von positiver Ordnung ist. Ist dies der Fall, und setzt man in der Gleichung (4) des vorigen Abschnittes $x = \alpha$, $y = y_0$, $z = e_0$, so verschwindet ihre linke, also auch ihre rechte Seite, man erhält also für eine solche Stelle die Gleichung $D(\alpha, y_0) = 0$, aus der sich ergibt, dass in der Gleichung (8) in den Coefficienten nur dann negative Potenzen von $x - \alpha$ auftreten können, wenn der Punkt \mathfrak{P} ein Schnittpunkt der Curve P mit der Discriminantencurve ist. Um diese negativen Potenzen, falls sie auftreten sollten, von vorn herein zu beseitigen, führen wir an Stelle von η und ζ neue Variable η_1 und ζ_1 durch die Gleichungen:

$$(9) \quad \eta = (x - \alpha)^\sigma \eta_1, \quad \zeta = (x - \alpha)^\tau \zeta_1$$

ein, und wählen die ganzen Zahlen τ und σ so, dass sie möglichst klein sind, und dass sich in der aus (8) folgenden Gleichung für ξ_1 und η_1

$$(10) \quad \xi_1 = \left(-\frac{f_{01}}{f_{10}}\right)(x - \alpha)^{\sigma - \tau} \eta_1 - \left(2 \frac{f_{02}}{f_{10}}\right)(x - \alpha)^{2\sigma - \tau} \eta_1^2 - \left(\frac{f_{11}}{f_{10}}\right)(x - \alpha)^\sigma \eta_1 \zeta_1 \\ - \left(2 \frac{f_{20}}{f_{10}}\right)(x - \alpha)^{\tau} \zeta_1^2 - \dots$$

alle negativen Potenzen von $x - \alpha$ fortheben. Dieser Bedingung kann, da die Entwicklung in (8) abbricht, offenbar stets genügt werden. Als dann kann die jetzt zu lösende Aufgabe bei einfacherer Bezeichnung der Entwicklungscoefficienten in (10) und (6') folgendermassen ausgesprochen werden:

Es soll die Gleichung

$$(11) \quad \zeta_1 = g_{10}(x|\alpha) \eta_1 + \sum_{i+k=2,3,\dots} g_{ik}(x|\alpha) \eta_1^i \zeta_1^k$$

in welcher die Coefficienten $g_{10}(x|\alpha), g_{20}(x|\alpha), \dots$ ganze Potenzreihen von $x - \alpha$ sind, durch eine Reihe:

$$(11') \quad \zeta_1 = \varepsilon_1(x|\alpha)\eta_1 + \varepsilon_2(x|\alpha)\eta_1^2 + \dots$$

befriedigt werden.

Diese Aufgabe kann nun, auch wenn man nicht voraussetzt, dass, wie es hier der Fall ist, die Reihe der Coefficienten $g_{ik}(x|\alpha)$ abbricht, stets auf eine und auch nur auf eine Weise gelöst werden wenn nur die Reihe $\Sigma g_{ik}(x|\alpha)\eta_1^i \zeta_1^k$ in einer endlichen Umgebung der Stelle $\eta_1 = 0, \zeta_1 = 0, x = \alpha$ gleichmässig convergirt. Setzt man nämlich in (11) für ζ_1 die Reihe (11') ein, und ordnet dann die rechte Seite der so sich ergebenden Gleichung

$$(11'') \quad (\varepsilon_1\eta_1 + \varepsilon_2\eta_1^2 + \dots) = g_{10}\eta_1 + \Sigma g_{ik}\eta_1^i (\varepsilon_1\eta_1 + \varepsilon_2\eta_1^2 + \dots)^k$$

nach steigenden Potenzen von η_1 so ist dieselbe innerhalb ihres Convergencebereiches nur dann erfüllt, wenn die noch unbekannten Coefficienten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ so gewählt werden, dass die Coefficienten auf beiden Seiten von (11'') gleich sind. So erhalten wir eine Reihe von Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= g_{10}, \\ \varepsilon_2 &= g_{20} + g_{11}\varepsilon_1 + g_{02}\varepsilon_1^2, \\ \varepsilon_3 &= g_{30} + g_{21}\varepsilon_1 + g_{12}\varepsilon_1^2 + g_{03}\varepsilon_1^3 + g_{11}\varepsilon_2 + 2g_{02}\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

und man erkennt leicht, dass sich allgemein aus der Vergleichung der Coefficienten von η_1^k auf beiden Seiten für ε_k eine Gleichung ergibt:

$$\varepsilon_k = G_k(g_{10}, g_{hi}; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{k-1}) \quad (h+i=2, 3, \dots)$$

in welcher die rechte Seite eine Summe einer endlichen Anzahl von Producten von den Coefficienten g_{hi} und den vorhergehenden Coefficienten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{k-1}$ ist. Setzt man also den Werth von ε_1 in die zweite, die so gefundenen Werthe von ε_1 und ε_2 in die dritte Gleichung ein und fährt so fort, so erhält man für jeden Coefficienten ε_k einen Ausdruck von der Form:

$$(12) \quad \varepsilon_k = H_k(g_{10}, g_{hi}) \quad (h+i=2, 3, \dots)$$

welcher ebenfalls aus einer endlichen Anzahl der Coefficienten g_{10}, g_{hi} allein durch die Operationen der Addition und der Multiplication gebildet ist.

Aus der Form der so gefundenen Ausdrücke für $\varepsilon_1(x|\alpha), \varepsilon_2(x|\alpha), \dots$ folgt zunächst, dass *alle* jene Coefficienten algebraische mit g_{10} und den Reihen g_{ik} , also auch mit $e_0(x|\alpha)$ gleichverzweigte Functionen sind, deren Entwicklungen in der Umgebung der Stelle $(x=\alpha)$ keine negativen Potenzen von $(x-\alpha)$ enthalten, und welche innerhalb des oben angegebenen Convergencebereiches der Reihen $g(x|\alpha)$ ebenfalls gleichmässig convergiren.

Wir zeigen jetzt weiter, dass die so gefundene Reihe für

$$\zeta_1 = \varepsilon_1(x|\alpha)\eta_1 + \dots$$

als Function von x und von η_1 betrachtet innerhalb einer endlichen Umgebung der Stelle $(x=\alpha, \eta_1=0)$ gleichmässig convergirt, und dass die aus ihr sich ergebende Reihe für z_0 die Gleichung $f(z, y) = 0$ nicht nur formal befriedigt, sondern eine Wurzel derselben in einer endlichen Umgebung des Curvenzweiges $(y=y_0, |x-\alpha|<\delta)$ wirklich darstellt.

Zum Beweise der Convergenz führen nun die folgenden ganz allgemeinen Betrachtungen: Denkt man sich in einer Potenzreihe von einer oder von mehreren Variablen, etwa in der Reihe:

$$p(\xi\eta) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik} \xi^i \eta^k$$

alle Coefficienten p_{ik} durch ihre absoluten Beträge ersetzt und diese noch beliebig vergrößert, so erhält man eine neue Reihe mit lauter positiven Coefficienten:

$$\bar{p}(\xi\eta) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{p}_{ik} \xi^i \eta^k$$

für welche allgemein $\bar{p}_{ik} \geq |p_{ik}|$ ist. Jede solche Reihe $\bar{p}(\xi\eta)$ soll *größer* als die Potenzreihe $p(\xi\eta)$ heissen, und diese Beziehung soll durch die Bezeichnung

$$\bar{p}(\xi\eta) \leq p(\xi\eta)$$

characterisirt werden. Ist z. B.

$$p(\xi) = p_0 + p_1 \xi + p_2 \xi^2 + \dots$$

eine Potenzreihe von einer Variablen, deren Convergenzradius ρ_0 ist, ist ferner $\rho < \rho_0$ und P gleich oder grösser als der grösste Werth, den $|p(\xi)|$ auf der Peripherie des mit dem Radius ρ um den Nullpunkt beschriebenen Kreises annimmt, so ist bekanntlich allgemein:

$$|p_k| \leq \frac{P}{\rho^k};$$

es ist also nach unserer Bezeichnung:

$$p(\xi) \ll P \left(1 + \frac{\xi}{\rho} + \frac{\xi^2}{\rho^2} + \dots \right);$$

also für alle Werthe $|\xi| < \rho$ ist:

$$p(\xi) \ll \frac{P}{1 - \frac{\xi}{\rho}}.$$

Ist nun für irgend eine Reihe $p(\xi\eta) \ll \bar{p}(\xi\eta)$, so folgt aus bekannten Sätzen der Functionentheorie, dass der Convergenzbereich von $p(\xi\eta)$ gleich oder grösser ist als der von $\bar{p}(\xi\eta)$; convergirt also die grössere Reihe in einer endlichen Umgebung der Stelle ($\xi = 0, \eta = 0$), so ist sicher das Gleiche für $p(\xi\eta)$ der Fall.

Ist ferner für zwei Potenzreihen $p(\xi\eta)$ und $q(\xi\eta)$

$$p(\xi\eta) \ll \bar{p}(\xi\eta), \quad q(\xi\eta) \ll \bar{q}(\xi\eta),$$

so ergibt sich durch eine einfache Coefficientenvergleichung:

$$\begin{aligned} p(\xi\eta) + q(\xi\eta) &\ll p(\xi\eta) + q(\xi\eta), \\ p(\xi\eta) \cdot q(\xi\eta) &\ll p(\xi\eta) \cdot q(\xi\eta) \end{aligned}$$

und das Gleiche gilt für die Summe und das Product von mehr als zwei Potenzreihen.

Diese Sätze wende ich jetzt auf die vorher gefundene Reihe

$$\xi_1 + \xi_1 \eta_1 + \xi_1 \eta_1^2 + \dots$$

an, deren Coefficienten $\varepsilon_k(x|\alpha)$ convergente Reihen sind, welche nach ganzen

oder gebrochenen Potenzen von $x - \alpha$ fortschreiten; wir nehmen allgemein an, sie schreite nach ganzen Potenzen von:

$$\xi = (x - \alpha)^{\frac{1}{a}}$$

fort.

Um nun die Convergenz jener Reihe:

$$\zeta_1(\xi\eta_1) = \varepsilon_1(\xi)\eta_1 + \varepsilon_2(\xi)\eta_1^2 + \dots$$

nachzuweisen, ersetzen wir alle Coefficienten $\varepsilon_k(\xi)$ durch geeignet gewählte grössere Potenzreihen $\bar{\varepsilon}_k(\xi)$ und brauchen dann nur zu zeigen, dass die so sich ergebende grössere Potenzreihe:

$$\bar{\zeta}_1(\xi\eta_1) = \bar{\varepsilon}_1(\xi)\eta_1 + \bar{\varepsilon}_2(\xi)\eta_1^2 + \dots$$

in einer endlichen Umgebung der Stelle ($\xi = 0$, $\eta_1 = 0$) convergirt. Da nun in den Bestimmungsgleichungen:

$$\varepsilon_k(\xi) = H_k(g_{10}(\xi), g_{hi}(\xi))$$

die rechten Seiten aus den Reihen $g(\xi)$ allein durch Addition und Multiplication gebildet sind, so werden alle jene Reihen vergrössert, wenn jede Reihe $g(\xi)$ durch eine grössere ersetzt wird.

Es sei nun ρ_0 der Radius des gemeinsamen Convergenzkreises aller Reihen $g_{ik}(\xi)$; beschreibt man dann mit einem Radius $\rho < \rho_0$ einen Kreis um den Punkt $\xi = 0$ und ist G eine positive Zahl die grösser als der grösste Werth ist, den alle jene Reihen absolut genommen auf diesem Kreise annehmen, so ist nach der obigen Bemerkung für alle Reihen $g_{10}(\xi)$, $g_{hi}(\xi)$

$$g(\xi) \leq G(\xi) = \frac{G}{1 - \frac{\xi}{\rho}}.$$

Ersetzt man daher in der Bestimmungsgleichung (11) alle Reihen $g_{10}(\xi)$, $g_{hi}(\xi)$ durch die eine grössere Reihe $G(\xi)$, so ergibt sich eine Reihe $\bar{\zeta}_1(\xi\eta_1)$ welche sicher grösser ist als die zu untersuchende; ist demnach der Convergenzbereich von $\bar{\zeta}_1$ endlich, so gilt dasselbe von ζ_1 . Die neue Reihe ist aber durch die Gleichung:

$$\bar{\zeta}_1 = G(\xi) \left(\eta_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \eta_1^i \varepsilon_i \right)$$

definiert, und diese kann für alle $|\xi_1| < 1$, $|\eta_1| < 1$ in der einfacheren Form geschrieben werden:

$$\bar{\xi}_1 = \mathfrak{G}(\xi) \left(\frac{1}{(1 - \eta_1)(1 - \bar{\xi}_1)} - (1 + \bar{\xi}_1) \right)$$

d. h. $\bar{\xi}_1$ ist durch die quadratische Gleichung definiert:

$$A\bar{\xi}_1^2 - \bar{\xi}_1 + B = 0$$

wenn zur Abkürzung

$$A = 1 + \mathfrak{G}(\xi), \quad B = \frac{\mathfrak{G}(\xi)\eta_1}{1 - \eta_1}$$

gesetzt wird. Aus ihr ergibt sich:

$$\bar{\xi}_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4AB}}{2A},$$

wo das negative Vorzeichen der Wurzel zu wählen ist, da sich $\bar{\xi}_1$ für $\eta_1 = 0$ oder für $B = 0$ auf Null reduciren soll, und diese Wurzel kann unter der Bedingung

$$(3) \quad |4AB| < 1$$

nach dem binomischen Satze in die Reihe:

$$\bar{\xi}_1 = B + AB^2 + 2A^2B^3 + 5A^3B^4 + \dots$$

entwickelt werden, welche alsdann für alle der Bedingung (13) genügenden Werthsysteme ξ , η_1 gleichmässig convergirt.

Aus dieser Bedingung (13)

$$|4AB| = \left| 4(1 + \mathfrak{G}(\xi))\mathfrak{G}(\xi) \frac{\eta_1}{1 - \eta_1} \right| < 1$$

ergiebt sich aber unmittelbar die einfachere:

$$|\eta_1| < \frac{1}{(1 + 2\mathfrak{G}(\xi))^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{2G}{1 - |\xi|}\right)^2}.$$

Wie nahe also auch ρ dem gemeinsamen Convergenzradius ρ_0 aller Reihen

$g(\xi)$, und wie nahe dann auch $|\xi|$ an ρ gewählt werde, immer ergibt sich für $|\eta_1|$ ein endlicher Convergencebereich, und man erhält so das Resultat, dass die Reihe $\zeta_1(\xi, \eta_1)$ also a fortiori die kleinere Reihe $\zeta_1(\xi, \eta_1)$ stets in einer endlichen Umgebung der Stelle $\xi = 0, \eta_1 = 0$ convergirt, wenn man nur ξ innerhalb des Convergencebereiches der Reihen $g(\xi)$ beliebig annimmt.

Substituirt man jetzt die so gefundene convergente Potenzreihe für ζ_1 in (G) , ersetzt wieder ξ durch $(x - \alpha)^{\frac{1}{a}}$, η_1 durch $\frac{\eta}{(x - \alpha)^p}$ und ζ_1 durch $\frac{\zeta}{(x - \alpha)^r}$ so erhält man jetzt aus $(6')$ als eine Lösung der Gleichung $f(z, y) = 0$ die folgende Reihe:

$$z_0 = e_0(x|\alpha) + e_1(x|\alpha)(y - y_0) + e_2(x|\alpha)(y - y_0)^2 + \dots$$

wo $e_0(x|\alpha)$ die vorher gewählte einfache Wurzel von $f(e_0, y_0) = 0$ bedeutet und allgemein:

$$e_k(x|\alpha) = \frac{\varepsilon_k(x|\alpha)}{(x - \alpha)^{i_k - r}}$$

ist. Diese Reihen convergiren ebenfalls innerhalb des vorher bestimmten Convergencebereiches gleichmässig, nämlich innerhalb eines Kreises, welcher entweder mit dem Convergencebereiche des Anfangsgliedes $e_0(x|\alpha)$ identisch ist, oder dessen Peripherie durch die nächste Nullstelle von $f'(e_0, y_0)$ hindurchgeht. Selbstverständlich ist von diesem Bereiche noch die Stelle $x = \alpha$ selbst auszuschliessen, wenn einige von jenen Reihen $e_k(x|\alpha)$ mit negativen Potenzen von $x - \alpha$ beginnen. Da diese Reihe z_0 durch die Substitutionen:

$$\frac{x - \alpha}{\alpha} = \frac{x' - \alpha'}{\alpha'}, \quad \frac{y}{x - \alpha} = \frac{y_0}{x' - \alpha'}, \quad \eta_1 = \frac{y}{(x - \alpha)^p}, \quad (x - \alpha)^{\frac{1}{a}} = \xi$$

in die vorher behandelte Reihe $\zeta_1(\xi, \eta_1)$ übergeht, so folgt, dass auch diese Reihe z_0 als Function von x und y betrachtet stets innerhalb einer endlichen Umgebung des Curvenzweiges $y = y_0$ gleichmässig convergirt, wenn man x innerhalb des vorher angegebenen Convergencebereiches der Coefficienten $e_k(x|\alpha)$ beliebig annimmt.

Endlich beweise ich noch, dass die so bestimmte convergente Reihe z_0 die Gleichung $f(z, y) = 0$ in einer endlichen Umgebung des Curven-

zweiges ($y = y_0$) mit jeder vorgegebenen Genauigkeit befriedigt, hier also wirklich eine Wurzel jener Gleichung darstellt. Die Function $f(z, y, x)$ ist aber als ganze Function jener drei Variablen in einer beliebig grossen endlichen Umgebung jeder endlichen Stelle convergent; ersetzt man also jene drei Variablen durch die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}x &= \alpha + \xi^a, \\y &= y_0 + \xi^{aa} \eta_1, \\z &= e_0(\xi) + \xi^{a\tau} \zeta_1,\end{aligned}$$

wo ζ_1 die vorher gefundene Reihe

$$\zeta_1 = \varepsilon_1(\xi) \eta_1 + \varepsilon_2(\xi) \eta_1^2 + \dots$$

bedeutet und beachtet man dabei dass jene drei Reihen in endlicher Umgebung der Stelle ($\xi = 0$, $\eta_1 = 0$), eventuell mit Ausschluss der Nullstelle selbst, gleichmässig convergiren, so convergirt in derselben Umgebung auch die so sich ergebende Potenzreihe von ξ und η_1

$$f(e_0(\xi) + \xi^{a\tau} \zeta_1; y_0 + \xi^{aa} \eta_1; \alpha + \xi^a)$$

und kann also nach steigenden Potenzen von η_1 geordnet werden, und da hierbei wegen der Gleichungen für die $\varepsilon_k(\xi)$ alle Coefficienten identisch Null werden, so folgt, dass in der That die so bestimmte Reihe z_0 eine Wurzel der vorgelegten Gleichung in der Umgebung der Stelle ($y = y_0$, $x = \alpha$) darstellt.

§ 6. Die Entwicklung der algebraischen Functionen in der Umgebung eines singulären Curvenzweiges.

Durch die Untersuchungen des letzten Abschnittes ist bewiesen, dass die n Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit ganzen rationalen Coefficienten

$$(1) \quad f(z, xy) = z^n + a_{n-1}(xy)z^{n-1} + \dots + a_1(xy)z + a_0(xy) = 0$$

in der Umgebung eines Curvenzweiges ($y = y_0, |x - \alpha| < \delta$) in gleichmässig convergente Reihen

$$(1') \quad e_0(x|\alpha) + e_1(x|\alpha)(y - y_0) + e_2(x|\alpha)(y - y_0)^2 + \dots$$

entwickelt werden können, falls jener Curvenzweig regulär ist, d. h. nicht der Discriminantencurve angehört.

Wir wollen jetzt erstens die Voraussetzung fallen lassen, dass der Coefficient $A_n(xy) = 1$, dass also z eine *ganze* algebraische Function von x und y ist, und dann auch die weitere, dass der Curvenzweig ($y = y_0$) ein regulärer ist. Alsdann ändert sich der Character der Potenzreihen (1') für die Wurzeln, wie jetzt gezeigt werden soll, einmal in der Weise, dass dieselben auch mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen von $y - y_0$ beginnen können, wie dies vorher auch für die rationalen Functionen $f(y, x)$ in der Umgebung einer ihrer Polcurven bewiesen wurde. Zweitens aber können in der Umgebung einer singulären Curve einige von den Reihen für die n Wurzeln nicht mehr nach ganzen sondern nach gebrochenen Potenzen des Linearfactors $y - y_0$ fortschreiten, ähnlich wie dies für die algebraischen Functionen von einer Variablen in der Umgebung eines Verzweigungspunktes der Fall ist. Gerade diese singulären Curven sind für die ganze Theorie von fundamentaler Bedeutung, denn sie spielen hier in der That dieselbe Rolle, wie die Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche in der Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen.

Um jetzt das vorgelegte Problem gleich in seiner allgemeinsten Form zu umfassen und zu lösen, stellen wir uns die folgende Aufgabe:

Es sei z als algebraische Function von x und y durch eine beliebige Gleichung:

$$(1) \quad f(z, xy) = A_0(xy) + A_1(xy)z + \dots + A_n(xy)z^n = 0$$

mit rationalen Coefficienten definirt; es sollen ihre n Wurzeln in der Umgebung eines beliebigen Curvenzweiges

$$y = y_0, \quad |x - \alpha| < \delta$$

durch convergente Reihen:

$$z_0 = e_0(x|\alpha)(y - y_0)^{\epsilon_0} + e_1(x|\alpha)(y - y_0)^{\epsilon_1} + \dots$$

dann und nur dann identisch Null, wenn alle Coefficienten $B_0(\xi), B_1(\xi), \dots$ identisch verschwinden; offenbar sind diese ganze Functionen der Coefficienten $e_0(\xi), e_1(\xi), \dots$ von z_0 , während die Exponenten $\gamma_0, \gamma_1, \dots$ aus den Exponenten $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$ linear zusammengesetzt sind. Die Aufgabe, die Reihe z_0 als Wurzel der Gleichung $f(z, \xi\eta) = 0$ zu bestimmen, reducirt sich also darauf,

es sollen die unbekannten Exponenten $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ und die unbekannten Coefficienten $e_0(\xi), e_1(\xi), e_2(\xi), \dots$ der Reihe z_0 in (4) so bestimmt werden, dass sich in der Entwicklung der Reihe:

$$f(z_0, \xi\eta) = B_0(\xi)\eta^{\gamma_0} + B_1(\xi)\eta^{\gamma_1} + \dots$$

alle Coefficienten $B_0(\xi), B_1(\xi), \dots$ auf Null reducieren.

Wir suchen nun zunächst z_0 so zu bestimmen, dass das Anfangsglied $B_0(\xi)\eta^{\gamma_0}$ jener Entwicklung verschwindet, und wir zeigen, dass durch diese Forderung nur das Anfangsglied $e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0}$ und zwar genau n -deutig bestimmt wird, entsprechend den Anfangsgliedern der Potenzreihen, in welche die n Gleichungswurzeln in der Umgebung der Stelle ($\xi = \eta = 0$) entwickelt werden können.

Setzt man in die linke Seite der vorgelegten Gleichung:

$$f(z, xy) = \sum_{i=0}^n A_i(xy) z^i$$

für die Coefficienten $A_i(x, y)$ ihre Entwicklungen (3) und für z die noch unbekannte Entwicklung (4) von z_0 ein, so ergibt sich für $f(z_0, \xi\eta)$ die Reihe:

$$f(z_0, \xi\eta) = \sum_{i=0}^n (a_i(\xi)\eta^{\rho_i} + b_i(\xi)\eta^{\rho_i+1} + \dots)(e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + \dots)^i,$$

und man erkennt ohne Weiteres, dass die Summe der Anfangsglieder der $(n+1)$ Producte $A_i z^i$ gleich:

$$(5) \quad f_0(\eta) = a_0(\xi)\eta^{\rho_0} + a_1(\xi)e_0\eta^{\rho_1+\varepsilon_0} + a_2(\xi)e_0^2\eta^{\rho_2+2\varepsilon_0} + \dots + a_n(\xi)e_0^n\eta^{\rho_n+n\varepsilon_0}$$

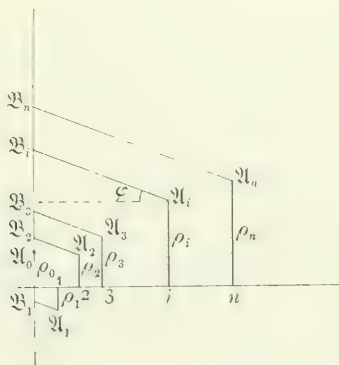
ist, und dass man für einen gegebenen Werth des Exponenten ε_0 das Anfangsglied $B_0(\xi)\eta^{\gamma_0}$ einfach findet, wenn man in $f_0(\eta)$ alle diejenigen

Glieder $a_i(\xi)e_0^i\gamma^{\rho_i+i\varepsilon_0}$ zusammenfasst, für welche die Exponenten $\rho_i + i\varepsilon_0$ von γ den kleinsten Werth besitzen.

Hieraus folgt zunächst, dass ε_0 nicht so gewählt werden darf, dass nur einer der $(n + 1)$ Exponenten:

$$\rho_0, \rho_1 + \varepsilon_0, \dots, \rho_n + n\varepsilon_0$$

den kleinsten Werth besitzt, denn wäre etwa $\rho_i + i\varepsilon_0$ kleiner als alle anderen Exponenten $\rho_k + k\varepsilon_0$ so begänne die Entwicklung von $f(z_0, \xi\gamma)$ mit dem einen Gliede niedrigster Ordnung $a_i(\xi)e_0^i\gamma^{\rho_i+i\varepsilon_0}$ und z_0 könnte nur dann eine Gleichungswurzel sein, wenn $a_i(\xi)e_0(\xi)^i = 0$ also, da $a_i(\xi) \neq 0$



ist, wenn $e_0(\xi) = 0$ wäre. Es ist demnach ε_0 so zu wählen, dass mindestens zwei Exponenten etwa $\rho_g + g\varepsilon_0$ und $\rho_i + i\varepsilon_0$ den kleinsten Werth haben, d. h. dass die beiden Bedingungen erfüllt werden:

$$(6) \quad \begin{aligned} \gamma_0 &= \rho_g + g\varepsilon_0 = \rho_i + i\varepsilon, \\ \rho_k + k\varepsilon_0 &\geq \gamma_0. \end{aligned} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

Um nun alle Werthe von ε_0 zu finden, welche diesen beiden Bedingungen (6) genügen, wenden wir die folgende geometrische Representation an, welche in beschränkteren Umfange bei dem s. g. Newton'schen

Parallelogramme benutzt wird. In einem rechtwinkligen Coordinatensysteme denken wir uns die $(n + 1)$ Punkte:

$$\mathfrak{A}_0 = (0, \rho_0), \mathfrak{A}_1 = (1, \rho_1), \dots, \mathfrak{A}_n = (n, \rho_n)$$

so fixirt, dass allgemein für den Punkt \mathfrak{A}_i die Abscisse $x_i = i$, die Ordinate $y_i = \rho_i$, d. h. gleich der Ordnungszahl des i^{ten} Coefficienten $A_i(x, y)$ in Bezug auf den Linearfactor η ist. Denkt man sich nun alle jene Punkte $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$ durch parallele Strahlen auf die Ordinatenachse projicirt, und sind $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_n$ die Projectionen jener n Punkte, so ist allgemein die Ordinate von \mathfrak{B}_i gleich $\rho_i + i \operatorname{tg} \varphi$, wenn φ der Steigungswinkel der Projectionsstrahlen ist. Setzt man also

$$\varepsilon_0 = \operatorname{tg} \varphi,$$

so dass also ε_0 die Steigung der Strahlen $\mathfrak{A}_i \mathfrak{B}_i$ bedeutet, so sind die Ordinaten der $(n + 1)$ Projectionen $\mathfrak{B}_0 \dots \mathfrak{B}_n$ gleich

$$\rho_0, \rho_1 + \varepsilon_0, \rho_2 + 2\varepsilon_0, \dots, \rho_n + n\varepsilon_0;$$

sie stimmen also mit den Exponenten von η in (5) überein. Also wird man den beiden Bedingungen (6) dann und nur dann genügen, wenn die Steigung ε_0 so gewählt wird, dass von den $(n + 1)$ Punkten \mathfrak{B}_i die beiden untersten, etwa \mathfrak{B}_j und \mathfrak{B}_l zusammenfallen. Dieser Bedingung wird offenbar genügt, wenn als Projectionsstrahl eine Sehne $\overline{\mathfrak{A}_l \mathfrak{A}_j}$ so gewählt wird, dass alle anderen Punkte $\mathfrak{A}_0 \dots \mathfrak{A}_n$ oberhalb oder auf jener Sehne bzw. ihrer Verlängerung liegen, wenn jene Sehne also die Punktreihe $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$ nach unten begrenzt.

Alle diese Begrenzungssehnen und damit alle möglichen Werthe von ε_0 findet man somit durch die folgende einfache Construction: Man verbinde den letzten Punkt \mathfrak{A}_n durch eine Gerade $\overline{\mathfrak{A}_n \mathfrak{A}_u}$ mit demjenigen Punkte \mathfrak{A}_u , welche von \mathfrak{A}_n aus gesehen am tiefsten liegt. Falls mehrere Punkte auf dieser Sehne liegen, wähle man für \mathfrak{A}_u den äussersten von jenen Punkten. Hierauf verbinde man \mathfrak{A}_u genau ebenso mit demjenigen von den früheren Punkten, \mathfrak{A}_l durch die Gerade $\overline{\mathfrak{A}_u \mathfrak{A}_l}$, welcher von \mathfrak{A}_u aus gesehen am tiefsten erscheint, und fahre in derselben Weise fort, bis zuletzt ein Punkt \mathfrak{A}_i mit dem ersten Punkte \mathfrak{A}_0 durch eine Sehne $\overline{\mathfrak{A}_i \mathfrak{A}_0}$ verbunden wird. Auf diese Weise ergibt sich ein nach unten con-

vexes Polygon $\overline{\mathfrak{A}_n \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}^i \dots \mathfrak{A}_i \mathfrak{A}_0}$, durch welches die Punktreihe nach unten begrenzt wird.

Es sei nun $\overline{\mathfrak{A}_l \mathfrak{A}_g}$ eine jener Begrenzungssehnen, $\mathfrak{A}_l = (l, \rho_l)$ ihr Anfangspunkt und $\mathfrak{A}_g = (g, \rho_g)$ ihr Endpunkt, so dass $l > g$, also in der Reihe $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$, \mathfrak{A}_l ein späterer Punkt ist. Dann ist die Steigung ε_0 der Geraden $\overline{\mathfrak{A}_l \mathfrak{A}_g}$ durch die Gleichung:

$$\varepsilon_0 = -\frac{\rho_l - \rho_g}{l - g}$$

gegeben, also positiv, negativ oder Null, je nachdem $\rho_g \geq \rho_l$ ist. Es seien ferner der Reihe nach etwa

$$\mathfrak{A}_i \mathfrak{A}_k \mathfrak{A}_i \mathfrak{A}_h \mathfrak{A}_g$$

alle diejenigen unter den $(n + 1)$ Punkten, welche auf jener Sehne und nicht über ihr liegen. Dann ist

$$\gamma_0 = \rho_i + l\varepsilon_0 = \rho_k + k\varepsilon_0 = \rho_i + i\varepsilon_0 = \rho_h + h\varepsilon_0 = \rho_g + g\varepsilon_0,$$

während für alle übrigen oberhalb $\overline{\mathfrak{A}_l \mathfrak{A}_g}$ liegenden Punkte \mathfrak{A}_λ

$$\rho_\lambda + \lambda\varepsilon > \gamma_0$$

ist. Dann ist das Aggregat $B_0(\xi)$ aller mit der niedrigsten Potenz η^{γ_0} von η multiplicirten Glieder in der Entwicklung $f(z_0, \xi\eta)$ gleich:

$$\varphi(e_0) = a_j(\xi)e_0^j + a_k(\xi)e_0^k + \dots + a_g(\xi)e_0^g;$$

es besteht nämlich aus allen und nur den Producten $a_r(\xi)e_0^r$, für welche die zugehörigen Punkte \mathfrak{A}_r auf dieser Begrenzungssehne $\overline{\mathfrak{A}_l \mathfrak{A}_g}$ liegen. Wählt man also für den Exponenten des Anfangsgliedes von $z_0 = e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + \dots$ speciell diesen Werth $-\frac{\rho_l - \rho_g}{l - g}$, so verschwindet das zugehörige Anfangsglied $B_0(\xi)$ dann und nur dann, wenn $e_0(\xi)$ eine der $(l - g)$ von Null verschiedenen Wurzeln der Gleichung l^{ten} Grades:

$$\varphi(e) = a_l(\xi)e^l + \dots + a_g(\xi)e^g = 0,$$

oder also eine der Wurzeln der Gleichung $(l - g)^{\text{ten}}$ Grades:

$$\frac{1}{e^g} \varphi(e) = a_l(\xi)e^{l-g} + a_k(\xi)e^{k-g} + \dots + a_g(\xi) = 0$$

ist, deren Coefficienten $a_i(\xi) \dots$ algebraische Potenzreihen von ξ sind. Diese Gleichung besitzt nun genau $(l - g)$ Wurzeln welche in irgend einer Reihenfolge durch

$$e_0^{(g+1)}(\xi), e_0^{(g+2)}(\xi), \dots, e_0^{(l)}(\xi)$$

bezeichnet werden mögen; auch sie sind sämtlich bestimmte algebraische Potenzreihen die im Allgemeinen nach ganzen Potenzen, und nur dann nach gebrochenen Potenzen von ξ fortschreiten, wenn die Stelle $\xi = 0$ gerade einem Verzweigungspunkte der der Gleichung $\varphi(e) = 0$ zugehörigen Riemann'schen Fläche entspricht.

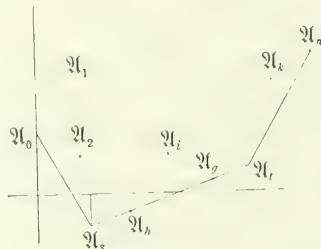


Fig. 2.

So ergibt sich das folgende Resultat, welches der Einfachheit wegen nur für den in Fig. 2 angenommenen Fall von drei Begrenzungssehn ausgesprochen werden mag, das aber natürlich ganz allgemein gilt:

Damit eine Potenzreihe:

$$z_0 = e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + e_1(\xi)\eta^{\varepsilon_1} + \dots$$

eine Wurzel der Gleichung $f(z, \xi\eta)$ in der Umgebung der Stelle ($\xi = 0, \eta = 0$) darstelle, muss zunächst der Exponent ε_0 ihres Anfangsgliedes einen der Werthe:

$$\varepsilon_0 = -\frac{\rho_0 - \rho_1}{0 - s}, \quad \varepsilon'_0 = -\frac{\rho'_s - \rho'_t}{s - t}, \quad \varepsilon''_0 = -\frac{\rho''_t - \rho''_n}{t - n}$$

besitzen, welche der Steigung der drei Begrenzungssehn

$$\overline{\mathfrak{A}_i \mathfrak{A}_0}, \overline{\mathfrak{A}_t \mathfrak{A}_s}, \overline{\mathfrak{A}_n \mathfrak{A}_l}$$

gleich sind. Damit ferner $e_0(\xi)$ der einem jener drei Exponenten $\varepsilon_0, \varepsilon'_0, \varepsilon''_0$ zugehörige Anfangscoefficient sei, muss ε_0 eine von Null verschiedene Wurzel von einer der drei zugehörigen Gleichungen sein

$$\varphi(e) = a_s(\xi)e^s + \dots + a_0(\xi) = 0,$$

$$\varphi_1(e) = a_t(\xi)e^t + \dots + a_s(\xi)e^s = 0,$$

$$\varphi_2(e) = a_n(\xi)e^n + \dots + a_t(\xi)e^t = 0,$$

deren linke Seiten aus denjenigen Producten $a_i(\xi)e^i$ gebildet sind, für welche die zugehörigen Punkte \mathfrak{A}_i bzw. auf der ersten, zweiten, dritten Begrenzungssehne liegen.

Da so zu den Exponenten $\varepsilon_0, \varepsilon'_0, \varepsilon''_0$ bzw. je $s, t - s, n - t$ von Null verschiedenen Coefficienten $e_0(\xi)$ gehören, so ergibt sich die Anzahl der möglichen Anfangsglieder $e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0}$ genau gleich $s + (t - s) + (n - t) = n$. Im Folgenden soll nun weiter gezeigt werden, dass in der That zu jedem dieser n Anfangsglieder eine und nur eine Gleichungswurzel gehört, d. h. dass man wirklich eine Darstellung aller n Wurzeln jener Gleichung in der Umgebung der Stelle $(\xi = 0, \eta = 0)$ auf diese Weise erhält.

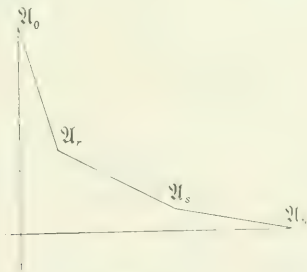


Fig. 3.

Wir ziehen aus diesem Resultate gleich eine für das Spätere wichtige Folgerung: Es sei z eine ganze algebraische Function, es seien also in der Gleichung:

$$f(z) = z^n + a_{n-1}(xy)z^{n-1} + \dots + a_0(xy) = 0$$

alle Coefficienten ganze Functionen von x und y . Ist dann $P(xy)$ eine beliebige irreductible ganze Function von x und y , und $y - y_0$ einer seiner Linearfactoren in y , so beginnen die Entwicklung aller Coefficienten $a_i(xy)$ nach Potenzen von $y - y_0$ mit nicht negativen Potenzen; es sind also in den Entwicklungen (3) alle Exponenten $\rho_i \geq 0$ und $\rho_n = 0$ da $A_n(xy) = 1$ ist. In dem zugehörigen Diagramme besitzen also alle Begrenzungssehnethen nothwendig eine positive Steigung oder die Steigung Null, und es ergibt sich somit der Satz:

Ist z eine ganze algebraische Function, so kann die Gleichung $f(z, xy) = 0$ niemals durch eine Reihe $e_0(x)(y - y_0)^{\varepsilon_0} + \dots$ befriedigt werden, deren Anfangsglied von negativer Ordnung ist.

Für die Folge brauchen wir nur die Entwicklung von einer jener n Wurzeln zu finden; ist nämlich bewiesen, dass jede Gleichung mindestens eine solche Reihe als Wurzel besitzt, so wird sehr einfach gezeigt werden, dass jede Gleichung genau so viele solche Wurzeln hat, als ihr Grad angiebt. Wir wollen daher im Folgenden nur eine und zwar eine von denjenigen Reihen $e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + \dots$ aufsuchen, deren Ordnungszahl ε_0 den grössten Werth hat. Für sie ist ε_0 einfach die Steigung der letzten Begrenzungssehne $\overline{u}_1, \overline{u}_0$ in dem Diagramme, d. h. es ist

$$\varepsilon_0 = \frac{\rho_0 - \rho_s}{s} = \text{Max} \left(\frac{\rho_0 - \rho_1}{1}, \frac{\rho_0 - \rho_2}{2}, \dots, \frac{\rho_0 - \rho_n}{n} \right),$$

wo also s so zu wählen ist, dass jener Quotient möglichst gross ist. Für diese speciellen Wurzeln höchster Ordnung gilt daher der Satz:

Für die Reihen $e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + \dots$ höchster Ordnung, welche die Gleichung $f(z) = 0$ in der Umgebung der Stelle $\xi = \eta = 0$ befriedigen, ist $\varepsilon_0 = \frac{\rho_0 - \rho_s}{s}$, wo s so zu wählen ist, dass ε_0 möglichst gross ausfällt, und der Coefficient e_0 ist eine der s Wurzeln der Gleichung s^{ten} Grades:

$$\varphi_0(e_0) = a_s(\xi)e_0^s + \dots + a_k(\xi)e_0^k + a_h(\xi)e_0^h + \dots + a_0(\xi) = 0$$

wo $a_s \dots a_k, a_h \dots a_0$ die Anfangsglieder von denjenigen Gleichungscoefficienten $A_s \dots A_k, A_h \dots A_0$ sind, für welche die Quotienten

$$\frac{\rho_0 - \rho_s}{s} = \dots = \frac{\rho_0 - \rho_k}{k} = \frac{\rho_0 - \rho_h}{h} = \dots = \varepsilon_0$$

ebenfalls gleich ε_0 sind.

§ 7. Berechnung einer Gleichungswurzel aus ihrem Anfangsgliede.

Es sei nun $e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0}$ das Anfangsglied einer der s Wurzeln höchster Ordnung der Gleichung $f(z) = 0$; es sollen jetzt alle folgenden Glieder jener Wurzel gefunden werden. Zu diesem Zwecke ersetzen wir z durch die neue Variable z_1 , welche durch die Gleichung:

$$(1) \quad z = e_0\eta^{\varepsilon_0} + z_1$$

mit z zusammenhängt, dann ist also:

$$(1') \quad z_1 = e_1\eta^{\varepsilon_1} + e_2\eta^{\varepsilon_2} + \dots$$

das Aggregat der noch unbekannten folgenden Glieder unserer Reihe. Die neue Unbekannte ist dann die Wurzel der Gleichung n^{ten} Grades:

$$f_1(z_1) = f(e_0\eta^{\varepsilon_0} + z_1) = f(e_0\eta^{\varepsilon_0}) + z_1 \frac{f'(e_0\eta^{\varepsilon_0})}{1} + z_1^2 \frac{f''(e_0\eta^{\varepsilon_0})}{2} + \dots + z_1^n \frac{f^{(n)}(e_0\eta^{\varepsilon_0})}{n} = 0,$$

d. h. z_1 genügt als Function von ξ und η betrachtet einer Gleichung:

$$(2) \quad f_1(z_1) = A'_0(\xi\eta) + A'_1(\xi\eta)z_1 + \dots + A'_n(\xi\eta)z_1^n = 0,$$

in welcher allgemein:

$$A'_k(\xi\eta) = \frac{f^{(k)}(e_0\eta^{\varepsilon_0})}{k!}$$

ist.

Hier ist nun wieder

$$z_1 = e_1(\xi)\eta^{\varepsilon_1} + e_2(\xi)\eta^{\varepsilon_2} + \dots$$

so zu bestimmen, dass in der Entwicklung von

$$f_1(z_1) = f_1(e_1\eta^{\varepsilon_1} + \dots) = B'_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + \dots$$

nach Potenzen von η alle Coefficienten $B'_0(\xi), \dots$ der Potenzen von η der Reihe nach verschwinden; hierzu muss zunächst wieder der Exponent ε_1 und der Coefficient $e_1(\xi)$ des Anfangsgliedes so bestimmt werden, dass sich das Anfangsglied $B'_0(\xi)$ auf Null reducirt, und diese Bestimmung kann offenbar wörtlich ebenso gemacht werden wie dies im vorigen Abschnitte für $e_0(\xi)$ und ε_0 angegeben wurde.

Um diese Aufgabe zu lösen, denke ich mir die neuen Gleichungscoefficienten $A'_k(\xi\eta)$ nach Potenzen von η entwickelt, und es sei:

$$(3) \quad A'_k(\xi\eta) = a'_k(\xi)\eta^{\rho'_k} + \dots, \quad (k=0, 1, \dots, n)$$

so dass also allgemein A'_k die Ordnungszahl ρ'_k in Bezug auf η besitzt, und ich construire nun die Punktreihe $\mathfrak{W}_0\mathfrak{W}_1\dots\mathfrak{W}_n$ welche die Coordinaten $(0, \rho'_0), (1, \rho'_1), \dots, (n, \rho'_n)$ besitzen. Begrenzt man diese Punkte wieder von \mathfrak{W}_n ausgehend nach unten durch ein convexes Sehnenpolygon, so muss ε_1 notwendig die Steigung einer jener Begrenzungssehnen sein. Soll ferner die Ordnungszahl ε_1 von z_0 ebenfalls möglichst gross sein, so muss für ε_1 die Steigung der letzten Begrenzungssehne gewählt werden. Wir wollen auch hier diese weitere Bedingung einführen, da es nur auf die Bestimmung einer Wurzel ankommt. Nach dem am Schlusse des vorigen Abschnittes bewiesenen Satze ergibt sich dann für den Exponent ε_1 die Bestimmung

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho'_0 - \rho'_1}{s_1} = \text{Max}\left(\frac{\rho'_0 - \rho'_1}{1}, \frac{\rho'_0 - \rho'_2}{2}, \dots, \frac{\rho'_0 - \rho'_n}{n}\right),$$

wó s_1 also so zu wählen ist, dass jener Quotient so gross als möglich ausfällt, und der zugehörige Coefficient $e_1(\xi)$ ist eine der s_1 Wurzeln der Gleichung s_1^{ten} Grades:

$$\varphi_1(e) = a'_1(\xi)e^{\varepsilon_1} + \dots + a'_i(\xi)e^i + \dots + a'_0(\xi) = 0,$$

wo $a'_i(\xi) \dots a'_1(\xi) \dots a'_0(\xi)$ die Anfangsglieder von allen und nur den Coefficienten $\dots A'_i \dots$ sind, für welche die zugehörigen Punkte $\mathfrak{W}_1 \dots \mathfrak{W}_i \dots \mathfrak{W}_0$ auf der letzten Begrenzungssehne dieses zweiten Diagrammes liegen.

In derselben Weise fortfahrend kann man nun beliebig viele Glieder jener Reihe berechnen. Man müsste jetzt nachdem das Glied $e_1(\xi)\eta^{\varepsilon_1}$ bestimmt ist, statt z_1 die neue Unbekannte z_2 durch die Gleichung:

$$z_1 = e_1(\xi)\eta^{\varepsilon_1} + z_2$$

bestimmen; dann genügt z_2 der Gleichung n^{ten} Grades:

$$f_2(z_2) = f_1(e_1\eta^{\varepsilon_1} + z_2) = A_0''(\xi\eta) + A_1''(\xi\eta)z_2 + \dots + A_n''(\xi\eta)z_2^n = 0$$

und das Anfangsglied $e_2(\xi)\eta^{\varepsilon_2}$ von z_2 kann aus dieser Gleichung genau wie vorher angegeben wurde, berechnet werden u. s. f.

Auf diese Weise erhält man eine Reihe:

$$z_0 = e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + e_1(\xi)\eta^{\varepsilon_1} + \dots,$$

deren Glieder durch ein wohl definirtes Verfahren beliebig weit berechnet werden können. Wir werden jetzt beweisen, dass diese Reihe nach steigenden ganzen oder gebrochenen Potenzen von η fortschreitet, dass sie in einer endlichen Umgebung der Nullstelle gleichmässig convergirt, und in dieser eine Wurzel der vorgelegten Gleichung darstellt.

§ 8. Die gefundene Reihe z_0 schreitet nach steigenden Potenzen von η fort.

Ich zeige zunächst, dass die im vorigen Abschnitt bestimmte Reihe $z_0 = e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + e_1(\xi)\eta^{\varepsilon_1} + \dots$ in der That nach wachsenden Potenzen von η fortschreitet, dass also stets $\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots$ ist. Da aber allgemein der Exponent ε_{k+1} auf genau dieselbe Art aus ε_k hervorgeht wie ε_1 aus ε_0 bestimmt wurde, so braucht nur der Beweis geführt zu werden, dass $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ ist. Hierzu führt nun die folgende principiell wichtige Überlegung, mit deren Hülfe nicht nur diese specielle, sondern auch alle anderen hier sich darbietenden Fragen über jene Reihe, ausgenommen die nach ihrer Convergenz, beantwortet werden können.

Der Gleichmässigkeit wegen werde die im vorigen Abschnitte in der Gleichung $\varepsilon_0 = \frac{\rho_0 - \rho_s}{s}$ eingeführte Zahl s im Folgenden mit s_0 bezeichnet, es sei also: $\varepsilon_0 = \frac{\rho_0 - \rho_{s_0}}{s_0}$ die Ordnung des Anfangsgliedes unserer Reihe; und

$$\varphi_0(e) = a_{s_0}(\xi)e^{s_0} + \dots + a_0(\xi)$$

die linke Seite der Gleichung s_0^{ten} Grades, deren Wurzel der Anfangscoefficient e_0 ist. Setzt man dann in $f(z)$ $z = e\eta^{\varepsilon_0}$, wo e eine Unbestimmte

bedeutet, so beginnt die Entwicklung von $f(e\eta^{\varepsilon_0})$ nach Potenzen von η mit $\varphi_0(e)\eta^{\rho_0}$, d. h. es besteht für ein variables e die Gleichung:

$$(I) \quad f(e\eta^{\varepsilon_0}) = \varphi_0(e)\eta^{\rho_0} + \phi_0(e, \eta)\eta^{\bar{\rho}_0}$$

wo $\bar{\rho}_0 > \rho_0$ ist.

Setzt man in dieser Identität

$$e = e_0 + \frac{z_1}{\eta^{\varepsilon_0}}$$

so wird ihre linke Seite:

$$(I') \quad f(e_0\eta^{\varepsilon_0} + z_1) = f_1(z_1) = A'_0(\xi\eta) + A'_1(\xi\eta)z_1 + \dots + A'_n(\xi\eta)z_1^n,$$

d. h. durch jene Substitution geht die linke also auch die rechte Seite von (I) in die Gleichung $f_1(z_1)$ über, deren Wurzel $z_1 = e_1\eta^{\varepsilon_1} + \dots$ ist. Diese Gleichung liefert daher auch eine directe Bestimmung der Ordnungszahlen ρ'_k , welche die Gleichungscoefficienten $A'_k(\xi\eta)$ in $f_1(z_1)$ besitzen; entwickelt man nämlich in der aus (I) und (I') folgenden Gleichung:

$$f_1(z_1) = \eta^{\rho_0}\varphi_0\left(e_0 + \frac{z_1}{\eta^{\varepsilon_0}}\right) + \eta^{\bar{\rho}_0}\phi_0\left(e_0 + \frac{z_1}{\eta^{\varepsilon_0}}, \eta\right)$$

die rechte Seite mit Hülfe des Taylor'schen Satzes nach Potenzen von z_1 , so folgt:

$$\begin{aligned} f_1(z_1) = & \eta^{\rho_0}\left(\varphi_0(e_0) + \varphi'_0(e_0)\frac{z_1}{\eta^{\varepsilon_0}} + \frac{\varphi''_0(e_0)}{2!}\frac{z_1^2}{\eta^{2\varepsilon_0}} + \dots\right) \\ & + \eta^{\bar{\rho}_0}\left(\phi_0(e_0, \eta) + \phi'_0(e_0, \eta)\frac{z_1}{\eta^{\varepsilon_0}} + \dots\right); \end{aligned}$$

man erhält also durch Coefficientenvergleichung für die $(n+1)$ Gleichungscoefficienten $A'_k(\xi\eta)$ die folgenden Entwicklungen nach Potenzen von η :

$$A'_k(\xi\eta) = \eta^{\rho_0 - k\varepsilon_0} \frac{\varphi_0^{(k)}(e_0)}{|k|} + \eta^{\bar{\rho}_0 - 1\varepsilon_0} \frac{\phi_0^{(k)}(e_0, \eta)}{|k|}.$$

Da aber $\bar{\rho}_0 > \rho_0$ war, so folgt, dass die Ordnung ρ'_k von $A'_k(\xi\eta)$ stets und nur dann gleich $\rho_0 - k\varepsilon_0$ ist, wenn $\varphi_0^{(k)}(e_0) \neq 0$, im entgegengesetzten Falle aber sicher grösser als $\rho_0 - k\varepsilon_0$ ist. Man kann also für jeden Werth von k

$$(2) \quad \rho'_k = \rho_0 - k\varepsilon_0 + \delta_k \quad (k=0, 1, \dots, n)$$

setzen, wo ∂_k nur dann verschwindet, wenn $\varphi_0^{(k)}(e_0) \neq 0$ ist, sonst aber stets einen positiven Werth hat.

Die Reihe e_0 ist nun eine der s_0 Wurzeln der Gleichung $\varphi_0(e_0) = 0$; um gleich die allgemeinste Annahme zu machen, werde vorausgesetzt, dass e_0 eine λ_0 -fache Wurzel derselben, dass also:

$$\varphi_0(e_0) = (e - e_0)^{\lambda_0} \bar{\varphi}_0(e_0)$$

ist, wo jetzt $\bar{\varphi}_0(e_0) \neq 0$ ist. Alsdann verschwinden bekanntlich die λ_0 ersten Ableitungen:

$$\varphi_0(e), \varphi_0'(e), \varphi_0''(e), \dots, \varphi_0^{(\lambda_0-1)}(e)$$

für $e = e_0$ während $\varphi_0^{(\lambda_0)}(e_0)$ sicher nicht verschwindet. Daraus folgt, dass in der obigen Gleichung (2) die λ_0 ersten Zahlen $\partial_0, \partial_1, \dots, \partial_{\lambda_0-1}$ sicher positiv, ∂_{λ_0} aber sicher gleich Null ist, dass also

$$(2') \quad \rho'_{\lambda_0} = \rho_0 - \lambda_0 \varepsilon_0$$

ist.

Mit Hülfe dieses Resultates kann nun leicht bewiesen werden, dass $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ ist. In der That war:

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho'_0 - \rho'_1}{s_1} = \text{Max} \left(\frac{\rho'_0 - \rho'_1}{1}, \frac{\rho'_0 - \rho'_2}{2}, \dots, \frac{\rho'_0 - \rho'_n}{n} \right).$$

Nun ist aber allgemein wegen (2)

$$\frac{\rho'_0 - \rho'_k}{k} = \frac{(\rho_0 + \partial_0) - (\rho_0 - k\varepsilon_0 + \partial_k)}{k} = \varepsilon_0 + \frac{\partial_0 - \partial_k}{k}$$

also:

$$\varepsilon_1 = \text{Max} \left(\dots \varepsilon_0 + \frac{\partial_0 - \partial_k}{k} \dots \right) = \varepsilon_0 + \text{Max} \left(\frac{\partial_0 - \partial_1}{1}, \frac{\partial_0 - \partial_2}{2}, \dots \right),$$

und von jenen n Brüchen ist mindestens einer, nämlich $\frac{\partial_0 - \partial_{\lambda_0}}{\lambda_0} = \frac{\partial_0}{\lambda_0}$ positiv, also ist sicher:

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_0 + \frac{\partial_0}{\lambda_0} > \varepsilon_0.$$

• und hiermit ist jener Beweis vollständig erbracht, d. h. es ist erwiesen, dass jene Reihe nach steigenden Potenzen von η fortschreitet.

**§ 9. Theilung der Reihe z_0 in ihren regulären und
irregulären Theil.**

Aus denselben Betrachtungen folgt aber jetzt ein weit wichtigeres Resultat für unsere Reihe z_0 .

Der erste Coefficient e_0 war eine λ_0 -fache Wurzel der ersten Coefficientengleichung $\varphi_0(e) = 0$ vom Grade s_0 . Ganz ebenso ist die zweite Coefficientengleichung

$$\varphi_1(e) = 0$$

vom Grade s_1 . Wir führen jetzt den wichtigen Nachweis, dass stets $s_1 \leq s_0$ ist, und zwar zeigen wir gleich die Richtigkeit des folgenden sehr viel tiefer gehenden Satzes:

Der Grad s_1 der zweiten Coefficientengleichung $\varphi_1(e) = 0$ ist höchstens gleich der Zahl λ_0 welche den Grad der Vielfachheit der Wurzel e_0 in der ersten Coefficientengleichung angibt.

Jener Grad s_1 ist nämlich die grösste Zahl, für welche der Quotient

$$\frac{\rho'_0 - \rho'_k}{k} = \varepsilon_0 + \frac{\partial_0 - \partial_k}{k}$$

möglichst gross ausfällt. Hieraus folgt aber leicht, dass s_1 nicht grösser als λ_0 sein kann. Ist nämlich $k > \lambda_0$ so ist

$$\frac{\partial_0 - \partial_k}{k} < \frac{\partial_0 - \partial_{\lambda_0}}{\lambda_0} \leq \frac{\partial_0}{\lambda_0} = \frac{\partial_0 - \partial_{\lambda_0}}{\lambda_0}$$

weil $k > \lambda_0$, $\partial_{\lambda_0} > 0$, und $\partial_{\lambda_0} = 0$ ist; es ist also stets

$$\frac{\rho'_0 - \rho'_k}{k} < \frac{\rho'_0 - \rho'_{\lambda_0}}{\lambda_0},$$

d. h. der Grad s_1 der zweiten Coefficientengleichung muss eine der Zahlen $1, 2, \dots, \lambda_0$ sein, w. z. b. w.

Sind jetzt $\varphi_0(e) = 0$, $\varphi_1(e) = 0$, $\varphi_2(e) = 0$, ... die erste, zweite, dritte, ... Coefficientengleichung für unsere Reihe, und sind e_0, e_1, e_2, \dots bzw.

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ -fache Wurzeln jener Gleichungen u. s. w., so kann man ihre linken Seiten folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned}\varphi_0(e) &= (e - e_0)^{\lambda_0} \bar{\varphi}_0(e), \\ \varphi_1(e) &= (e - e_1)^{\lambda_1} \bar{\varphi}_1(e), \\ \varphi_2(e) &= (e - e_2)^{\lambda_2} \bar{\varphi}_2(e), \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

wo allgemein $\bar{\varphi}_k(e)$ die Wurzel $e = e_k$ nicht mehr enthält. Sind endlich s_0, s_1, s_2, \dots die Grade jener Gleichungen, so folgt aus dem soeben bewiesenen Satze, dass:

$$\begin{aligned}s_1 &\leq \lambda_0 \leq s_0, \\ s_2 &\leq \lambda_1 \leq s_1, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

und es zeigt sich so, dass für eine beliebige $k + 1^{\text{te}}$ Coefficientengleichung im Allgemeinen:

$$s_{k+1} < s_k$$

ist; nur dann kann $s_{k+1} = s_k$ sein, wenn auch $\lambda_k = s_k$ ist, d. h. wenn die nächstvorhergehende Coefficientengleichung:

$$\varphi_k(e) = (e - e_k)^{s_k}$$

ist, also nur die einzige Wurzel e_k besitzt. Da somit die Grade s_0, s_1, s_2, \dots der Coefficientengleichungen, wie weit man auch gehen mag, immer abnehmen, oder gleich bleiben, so müssen von einem gewissen Gliede an alle folgenden Gleichungen von einem und demselben Grade sein. Es sei $e_r(\xi)^{s_r}$ jenes Glied und es sei

$$s = s_r = s_{r+1} = s_{r+2} = \dots$$

der gemeinsame Grad aller jener Coefficientengleichungen. Nach dem soeben bewiesenen Satze besitzt dann aber jede der folgenden Gleichungen $\varphi_k(e) = 0$ nur eine einzige Wurzel d. h. es ist, wie weit man auch in der Reihe z_0 gehen mag:

$$\begin{aligned}(1) \quad \varphi_r(e) &= (e - e_r)^s, \\ \varphi_{r+1}(e) &= (e - e_{r+1})^s, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Im folgenden Paragraphen wird bewiesen werden, dass jene Gleichungen (1) stets linear werden, d. h. dass $s = 1$ ist, falls die Gleichungsdiscriminante $D(xy)$ nicht identisch verschwindet, falls also die Gleichung $f(z, xy) = 0$ für variable x, y keine gleichen Wurzeln hat. Für die folgenden Betrachtungen können wir aber auch $s \geq 1$ voraussetzen.

Auf das in (1) angegebene Resultat gründet sich nun eine wichtige Eintheilung der ganzen Reihe $z_0 = \sum_{i=0}^{\tau} e_i(\xi) \eta^{\varepsilon_i}$. Wir bezeichnen nämlich das Aggregat:

$$\zeta = e_0(\xi) \eta^{\varepsilon_0} + \dots + e_{\tau-1}(\xi) \eta^{\varepsilon_{\tau-1}}$$

der τ vor jenem Elemente $e_{\tau}(\xi) \eta^{\varepsilon_{\tau}}$ stehenden Glieder als den irregulären Theil von z_0 , und die ganze übrigbleibende Reihe

$$\bar{z} = e_{\tau}(\xi) \eta^{\varepsilon_{\tau}} + e_{\tau+1}(\xi) \eta^{\varepsilon_{\tau+1}} + \dots$$

als den regulären Theil von z_0 . Nach dem soeben Bewiesenen besteht dann der irreguläre Theil ζ von $z_0 = \zeta + \bar{z}$ stets aus einer endlichen Anzahl von Gliedern. Um jetzt die Fundamentealeigenschaft des regulären Theiles \bar{z} zu finden, bilde ich die Gleichung $\bar{f}(\bar{z}) = 0$, der \bar{z} allein genügt. Dieselbe kann folgendermassen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{z}) &= f(\zeta + \bar{z}) = f(\zeta) + \bar{z} f'(\zeta) + \dots + \bar{z}^n \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \\ &= \bar{A}_0(\xi \eta) + \bar{A}_1(\xi \eta) \bar{z} + \dots + \bar{A}_n(\xi \eta) \bar{z}^n = 0. \end{aligned}$$

Entwickelt man alle jene Coefficienten $\bar{A}_i(\xi \eta) = \frac{f^{(i)}(\zeta)}{i!}$ nach Potenzen von η , so erhält man Reihen, welche im Allgemeinen nach gebrochenen Potenzen von η fortschreiten, denn ihre Exponenten setzen sich ganzzahlig aus den Exponenten $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\tau-1}$ zusammen; ist also b der Generalnenner jener τ Exponenten ε_i , so schreiben die Entwicklungen aller Coefficienten \bar{A}_i nach ganzen Potenzen von $\eta^{\frac{1}{b}}$ fort. Die Ordnungszahlen $\bar{\rho}_0, \bar{\rho}_1, \dots, \bar{\rho}_n$ dieser Gleichungcoefficienten $\bar{A}_0(\xi \eta), \dots, \bar{A}_n(\xi \eta)$ sind also auch Brüche mit dem Nenner b , sie können also alle in der Form

$$\bar{\rho}_i = \frac{t_i}{b}$$

geschrieben werden, wo t_0, t_1, \dots, t_n ganze Zahlen bedeuten. Die Coeffi-

cienten der einzelnen Potenzen von η sind aber algebraische Potenzreihen von ξ , welche durch die irregulären Reihencoefficienten $e_0(\xi), e_1(\xi), \dots, e_{\tau-1}(\xi)$ rational ausdrückbar, also mit ihnen gleichverzweigt sind.

Man kann nun für alle regulären Glieder unserer Reihe die beiden folgenden Sätze aussprechen:

1) Alle regulären Exponenten $\varepsilon_\tau, \varepsilon_{\tau+1}, \dots$ sind sämtlich Brüche mit dem Generalnenner der τ ersten Exponenten.

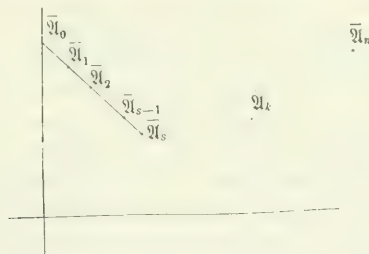
2) Alle regulären Coefficienten $e_\tau(\xi), e_{\tau+1}(\xi), \dots$ sind sämtlich durch die τ ersten Coefficienten rational ausdrückbar, also mit diesen gleichverzweigt.

Beide Sätze brauchen wieder nur für das erste Glied $e_\tau(\xi)\eta^{\varepsilon_\tau}$ bewiesen zu werden, da sie für alle späteren in gleicher Weise folgen. Nun ergaben sich für ε_τ und $e_\tau(\xi)$ die Bestimmungsgleichungen:

$$\varepsilon_\tau = \frac{\bar{\rho}_0}{s} - \frac{\bar{\rho}_1}{s},$$

$$(2) \quad \bar{\varphi}(e) = (e - e_\tau)^s = e^s - s e_\tau e^{s-1} + \frac{s(s-1)}{1 \cdot 2} e_\tau^2 e^{s-2} - \dots \pm e_\tau^s = 0.$$

Zunächst ist hier ε_τ die Steigung der letzten Begrenzungsschne $\bar{\mathfrak{A}}_1, \bar{\mathfrak{A}}_0$ des zugehörigen Diagrammes, und in $\bar{\varphi}(e)$ treten die Anfangsglieder von allen



und nur den Gliedern $\bar{\mathfrak{A}}_0(\xi\eta), \bar{\mathfrak{A}}_1(\xi\eta), \dots$ auf, für welche die zugehörigen Punkte $\bar{\mathfrak{A}}_0, \bar{\mathfrak{A}}_1, \dots$ auf und nicht über $\bar{\mathfrak{A}}_1, \bar{\mathfrak{A}}_0$ liegen. Nun treten aber in $\bar{\varphi}(e)$ in (1) alle Glieder mit von Null verschiedenen Coefficienten auf; es liegen also alle Punkte $\bar{\mathfrak{A}}_1, \bar{\mathfrak{A}}_2, \dots, \bar{\mathfrak{A}}_{s-1}$ auf jener Begrenzungsschne,

und ihre Steigung ε_τ stimmt also auch mit der Steigung von $\overline{y_1 y_0}$ überein, es ergibt sich also in diesem Falle für jene Steigung ε_τ der einfachere Ausdruck:

$$\varepsilon_\tau = \frac{\rho_0 - \bar{\rho}_1}{1} = \frac{t_0 - t_1}{b}.$$

d. h. auch ε_τ ist ein Bruch mit demselben Nenner b , w. z. b. w.

Zweitens sind alle Coefficienten von $\bar{\varphi}(e) = (e - e_\tau)^s = e^s - s e^{\tau-1} e_\tau + \dots$ die Anfangsglieder der Entwicklungen der zugehörigen Coefficienten A_0, A_1, \dots, A_s , also durch $e_0(\xi), e_1(\xi), \dots, e_{\tau-1}(\xi)$ rational ausdrückbar. Also ist auch speciell $s e_\tau(\xi)$, der Coefficient von $e^{\tau-1}$, ebenfalls rational durch $e_0(\xi) \dots e_{\tau-1}(\xi)$ ausdrückbar, also gilt das Gleiche für $e^\tau(\xi)$ selbst, und damit ist auch der zweite Theil unserer Behauptung erwiesen.

Man erhält also das wichtige Resultat, dass die durch unser Verfahren bestimmte Reihe $e_0(\xi) \eta^{\frac{1}{b}} + \dots$ nach steigenden *ganzzahligen* Potenzen von $\eta^{\frac{1}{b}}$ fortschreitet, wo b eine bestimmte ganze Zahl bedeutet, welche sich aus der Natur der zu Grunde gelegten Curve $\eta = y - y_0$ von selbst ergibt.

Ersetzen wir wieder η und ξ bzw. durch $y - y_0$ und $(x - \alpha)^{\frac{1}{a}}$, so ergibt sich der folgende Ausdruck für unsere Reihe:

$$z_0 = e_h(x|\alpha)(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + e_{h+1}(x|\alpha)(y - y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \dots,$$

und die Coefficienten sind algebraische Potenzreihen von $x - \alpha$ welche ebenfalls nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von $x - \alpha$ fortschreiten.

Aus der Untersuchung des s. g. regulären Falles im § 4 ergibt sich, dass für alle Curven, welche nicht Theile der Discriminantencurve sind, stets $b = 1$ ist, denn für alle diese Curven schritten ja die sämtlichen n Reihen für die Wurzeln von $f(z) = 0$ nach *ganzen* Potenzen von $y - y_0$ fort. Für die Discriminantencurven können aber einige von den Wurzeln nach gebrochenen Potenzen von $y - y_0$ fortschreiten, und gerade diese Entwicklungen sind hier von besonderer Bedeutung, da sie denjenigen in der Umgebung eines Verzweigungspunktes in der Theorie der Functionen einer Variablen entsprechen.

Die Reihe $z_0 = \sum_{k=h}^{\infty} e_k(x|\alpha)(y - y_0)^{\frac{k}{b}}$ befriedigt nun die Gleichung $f(z, xy) = 0$ formal; setzt man nämlich diese Reihe für z in $f(z)$ ein, und

entwickelt die so gefundene Function ebenfalls nach Potenzen von $y - y_0$, so fallen die Coefficienten der einzelnen Potenzen von $y - y_0$ fort, d. h. die linke Seite beginnt mit einer beliebig hohen Potenz von $y - y_0$, wenn man in jener Reihe für z von vorn herein genügend viele Glieder berücksichtigt. In der That sei:

$$z_l = e_h(x|\alpha)(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + \dots + e_l(x|\alpha)(y - y_0)^{\frac{l}{b}}$$

das Aggregat der $(l + 1) - h$ ersten Glieder jener Reihe; dann ist, wie oben gezeigt wurde, die Ordnungszahl von $f(z_l)$ gleich $\rho_0^{(l)}$ und $\rho_0^{(l)}$ ist ebenfalls ein Bruch $\frac{t_l}{b}$ mit dem Nenner b . Bildet man nun die Ordnungszahlen $\rho_0^{(h)}, \rho_0^{(h+1)}, \rho_0^{(h+2)}, \dots$ von $f(z_h), f(z_{h+1}), f(z_{h+2}), \dots$ so erhält man eine Reihe von Brüchen mit dem Nenner b

$$\frac{t_h}{b}, \frac{t_{h+1}}{b}, \frac{t_{h+2}}{b}, \dots;$$

beachtet man dabei, dass nachdem a. S. 378 N^o (2) gegebenen Beweise jene Ordnungszahlen eine wachsende Reihe bilden, so folgt, dass auch von den ganzen Zahlen t_h, t_{h+1}, \dots jede folgende grösser ist als die vorhergehende, dass somit diese, also auch die Zahlen $\rho_0^{(l)}$, zuletzt über jedes Mass hinaus wachsen, und damit ist gezeigt, dass die gefundene Reihe in der That die vorgelegte Gleichung formal befriedigt.

§ 10. Die n Congruenzwurzeln der Congruenz $f(z) \equiv 0$.

Im vorigen Abschnitt ist bewiesen worden, dass für jede Gleichung $f(z, xy) = 0$ mindestens eine nach Potenzen von $(y - y_0)$ fortschreitende Reihe $z_0 = \mathfrak{P}(y|y_0)$ existirt, durch welche sie formal befriedigt wird. Wir wollen zunächst nachweisen, dass die Anzahl der Potenzreihen $\mathfrak{P}(y|y_0)$ welche die gleiche Eigenschaft besitzen stets gleich dem Grade jener Gleichung ist; erst dann können wir weiter den Beweis erbringen, dass jene n Reihen in einem endlichen Bereiche gleichmässig convergiren, und hier die n Wurzeln der Gleichung darstellen.

Zu diesem Zwecke spreche ich die Beziehung der vorher gefundenen Reihe $z_0 = \mathfrak{P}(y|y_0)$ zu der Function $f(z, xy)$ in einer mehr arithmetischen Form aus.

Wählt man statt jener ganzen Reihe, nur einen beliebigen Theil

$$z_i = e_h(x|\alpha)(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + \dots + e_l(x|\alpha)(y - y_0)^{\frac{l}{b}}$$

und substituirt diesen in $f(z, xy)$ so wird $f(z_i, xy)$ durch eine ganz bestimmte Potenz $(y - y_0)^{m_i}$ theilbar, d. h. es ist:

$$f(z_i) = (y - y_0)^{m_i} G(y, y_0),$$

wo $G(y|y_0)$ eine ganze Function von $y - y_0$ bedeutet. Wir sagen daher: z_i ist eine Wurzel der Congruenz:

$$(1) \quad f(z) \equiv 0 \pmod{(y - y_0)^{m_i}},$$

den Congruenzbegriff genau in dem in der Arithmetik gebräuchlichen Sinne aufgefasst. Lassen wir nun l grösser und grösser werden, so wächst m_i ebenfalls mehr und mehr, und kann grösser als jede noch so grosse Zahl gemacht werden. Jene Reihe z_0 kann demnach als Wurzel der Congruenz:

$$f(z) \equiv 0 \pmod{(y - y_0)^M}$$

definit werden, wenn M eine beliebig gross anzunehmende Zahl bedeutet.

Wir wollen die in den vorigen Abschnitten gefundene Reihe

$$z_0 = \sum_{k=h}^{\infty} e_k(x|\alpha)(y - y_0)^{\frac{k}{b}}$$

nunmehr durch z_1 bezeichnen; dann kann jenes bisher gefundene Resultat jetzt folgendermassen ausgesprochen werden:

Jede Congruenz:

$$(2) \quad f(z) \equiv 0 \pmod{(y - y_0)^{M_i}}$$

für eine beliebig hohe Potenz von $(y - y_0)$ als Modul besitzt mindestens eine Congruenzwurzel

$$z_1 = \sum e_k(x|\alpha)(y - y_0)^{\frac{k}{b}}.$$

Der Beweis nun, dass jene Congruenz genau n Wurzeln besitzt, gründet sich auf den Hilfssatz:

Ist $z = z_1$ eine Wurzel der Congruenz (2), so ist $f(z)$ modulo $(y - y_0)^{M_1}$ durch den zugehörigen Linearfactor $z - z_1$ theilbar, d. h. es ist:

$$(2') \quad f(z) \equiv (z - z_1)f_1(z) \pmod{(y - y_0)^{M_1}}.$$

In der That, ist $f(z_1)$ durch $(y - y_0)^{M_1}$ theilbar, so ist:

$$(3) \quad f(z) \equiv f(z) - f(z_1) = (z - z_1)f_1(z) \pmod{(y - y_0)^{M_1}}$$

wo

$$f_1(z) = \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} = B_{n-1}(x, y)z^{n-1} + \dots + B_0(xy)$$

eine ganze Function $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades von z mit rationalen Functionen von x, y, y_0 als Coefficienten ist.

Auch für die Function $f_1(z)$ kann man nun durch unsere Methode eine Reihe z_2 bestimmen, welche nach Potenzen von $y - y_0$ fortschreitet und die Gleichung $f_1(z) = 0$ formal befriedigt. Nach dem soeben bewiesenen Satze ergibt sich so für $f_1(z)$ die folgende Congruenz:

$$f_1(z) \equiv (z - z_2)f_2(z) \pmod{(y - y_0)^{M_2}},$$

wo $f_2(z)$ eine ganze Function $(n - 2)^{\text{ten}}$ Grades und M_2 eine beliebig grosse Zahl bedeutet, und diese Congruenz vertritt eine Gleichung:

$$f_1(z) = (z - z_2)f_2(z) + (y - y_0)^{M_2}G_2(z, y).$$

Setzt man diesen Werth von $f_1(z)$ in (3) ein, so folgt:

$$f(z) \equiv (z - z_1)(z - z_2)f_2(z) + (z - z_2)(y - y_0)^{M_2}G_2(z, y) \pmod{(y - y_0)^{M_1}}.$$

Wählt man endlich die ganz beliebige Zahl M_2 so gross, dass das zweite Glied durch $(y - y_0)^{M_1}$ theilbar ist, so ergibt sich die Congruenz:

$$f(z) \equiv (z - z_1)(z - z_2)f_2(z) \pmod{(y - y_0)^{M_1}}.$$

In derselben Weise kann man weiter schliessen: man bestimmt jetzt eine Wurzel z_3 von $f_2(z) \equiv 0$ u. s. w. und gelangt so zuletzt zu der für eine beliebig hohe Potenz $(y - y_0)^M$ gültigen Congruenz:

$$(4) \quad f(z) \equiv A(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) \pmod{(y - y_0)^M},$$

wo A eine Function nullten Grade in z ist, welche sich durch Coefficientenvergleichung gleich $A_n(x, y)$ bestimmt. Aus dieser Congruenz folgt zunächst, dass z_1, z_2, \dots, z_n sämtlich ebenso wie z_1 Congruenzwurzeln von $f(z) \equiv 0$ sind, denn für $z = z_i$ wird die rechte Seite, also auch die linke Seite $f(z_i)$ durch $(y - y_0)^M$ theilbar, wo M beliebig gross angenommen werden kann.

Ebenso leicht erkennt man aber, dass keine andere Reihe z_0 eine Wurzel von $f(z) \equiv 0$ sein kann. Substituirt man nämlich $z = z_0$ in (4), so müsste:

$$f(z_0) \equiv A(z_0 - z_1)(z_0 - z_2) \dots (z_0 - z_n) \equiv 0 \pmod{(y - y_0)^M}$$

sein; aber jenes Product von $(n + 1)$ Factoren kann nur dann durch eine *beliebig hohe* Potenz von $(y - y_0)$ theilbar sein, wenn mindestens einer seiner Factoren eine beliebig hohe Potenz dieses Linearfactors enthält und dies ist wiederum nur dann der Fall, wenn entweder $A = 0$ ist, oder wenn z_0 einer der n Reihen z_1, \dots, z_n gleich ist.

Der Einfachheit wegen denken wir uns von vorn herein den Coefficienten $A_n(xy)$ von z^n durch Division zu Eins gemacht. Denkt man sich dann in der soeben gefundenen Congruenz:

$$z^n + A_{n-1}(xy)z^{n-1} + \dots + A_0(xy) \equiv (z - z_1) \dots (z - z_n) \pmod{(y - y_0)^M}$$

die Coefficienten der einzelnen Potenzen von z auf beiden Seiten verglichen, so ergibt sich, dass die aus den n Potenzreihen z_1, z_2, \dots, z_n gebildeten elementaren symmetrischen Functionen den Gleichungscoefficienten gleich sind, abgesehen von einer beliebig hohen Potenz von $(y - y_0)^M$. Hieraus folgt weiter dass überhaupt jede symmetrische Function der n Wurzeln einer bestimmten rationalen Function von x und y congruent ist.

Speciell nennen wir auch hier das Product $z_1 z_2 \dots z_n$ aller n Wurzeln *die Norm von z* und bezeichnen dasselbe durch $N(z)$. Dann ergibt sich für diese Function die bekannte Gleichung:

$$N(z) = (-1)^n A_0(xy);$$

jene Norm stimmt also abgesehen vom Vorzeichen mit dem von z freien Gliede der Gleichung $f(z) = 0$ überein.

Aus diesen Thatsachen ziehen wir zunächst die Folgerung dass jene n Congruenzwurzeln z_1, z_2, \dots, z_n sicher von einander verschieden, sind,

wenn die Gleichung $f(z) = 0$ lauter verschiedene Wurzeln besitzt. Wären nämlich zwei jener Reihen gleich, so wäre das Differenzenproduct

$$D(z_1 \dots z_n) = \prod_{i \neq k} (z_i - z_k)$$

identisch Null; nach dem soeben bewiesenen Satze ist aber diese symmetrische Function $D(z_1 \dots z_n)$ modulo $(y - y_0)^M$ der Discriminante $D(xy)$ der Gleichung $f(z) = 0$ congruent, und diese müsste daher ebenfalls durch jede noch so hohe Potenz $(y - y_0)^M$ von $y - y_0$ theilbar sein, was nur dann möglich ist, wenn $D(x, y) = 0$ ist, wenn also die betrachtete Gleichung gleiche Wurzeln besitzt.

Zweitens wollen wir aus diesem Satze ein bereits vorher angekündigtes wichtiges Resultat ableiten: Ist

$$z_1 = e_h(z) \gamma^{\varepsilon_h} + e_{h+1}(\xi) \gamma^{\varepsilon_{h+1}} + \dots$$

die Reihe für eine der n Wurzeln, so genüge jeder Coefficient $e_k(\xi)$ einer Gleichung $\varphi_k(e) = 0$; die Grade dieser Gleichungen bildeten eine abnehmenden Reihe und von einem Gliede $e_r \gamma^{\varepsilon_r}$ an sind alle folgenden Gleichungen $\varphi_r(e) = 0$, $\varphi_{r+1}(e) = 0$, ... von gleichem Grade s und jede ist die s^{te} Potenz eines Linearfactors.

Wir zeigen jetzt dass, falls die Gleichung $f(z) = 0$ keine gleichen Wurzeln hat, wie wir dies schon früher voraussetzten, stets $s = 1$ ist, dass also alle regulären Coefficienten einfach durch lineare Gleichungen bestimmt werden. Ist nämlich:

$$z^{(r)} = e_h(\xi) \gamma^{\varepsilon_h} + \dots + e_r(\xi) \gamma^{\varepsilon_r}$$

das Aggregat der Anfangsglieder von z_1 und ist r schon so gross gewählt, dass $f(z^{(r)})$ bereits von sehr hoher Ordnung ist, dann ist

$$z = z^{(r)} + \bar{z}, \quad \bar{z} = e_{r+1}(\xi) \gamma^{\varepsilon_{r+1}} + \dots$$

und \bar{z} ist eine Wurzel der Gleichung n^{ten} Grades

$$f(z^{(r)} + \bar{z}) = f(z^{(r)}) + f'(z^{(r)}) \bar{z} + \frac{f''(z^{(r)})}{1 \cdot 2} \bar{z}^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z^{(r)})}{1 \cdot n} \bar{z}^n;$$

der Exponent ε_{r+1} des folgenden Gliedes ist durch die Gleichung bestimmt:

$$\varepsilon_{r+1} = \text{Max} \left(\frac{\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}_1}{1}, \frac{\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}_2}{2}, \dots, \frac{\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}_n}{n} \right)$$

wenn $\bar{\rho}_0, \bar{\rho}_1, \dots, \bar{\rho}_n$ die Ordnungszahlen von $f(z^{(r)}), f'(z^{(r)}), \dots$ bedeuten. Nun kann die Ordnungszahl $\bar{\rho}_0$ beliebig gross angenommen werden, wenn r genügend gross gewählt wird, dagegen bleibt die Ordnungszahl $\bar{\rho}_1$ von $f'(z^{(r)})$ unterhalb einer endlichen Grenze, wie gross auch r angenommen werde, denn sonst wäre ja $f'(z_1)$ selbst von beliebig hoher Ordnung, und das Gleiche wäre für das Product

$$f'(z_1)f(z_2) \dots f'(z_n) = D(xy)$$

der Fall, d. h. es wäre die Discriminante identisch Null. Hieraus folgt in der That, dass r so gross angenommen werden kann, dass:

$$\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}_1 > \left(\frac{\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}_2}{2}, \dots, \frac{\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}_n}{n} \right)$$

ist, d. h. es ist $s = 1$, w. z. b. w.

Hieraus folgt leicht, dass für die regulären Glieder jedes folgende Glied $e_{r+1}\gamma^{\varepsilon_{r+1}}$ durch die Gleichung:

$$e_{r+1}\gamma^{\varepsilon_{r+1}} + \dots = -\frac{f'(z^{(r)})}{f'(z^{(r)})}$$

bestimmt ist, d. h. es ist $e_{r+1}\gamma^{\varepsilon_{r+1}}$ das Anfangsglied der Entwicklung der Quotienten

$$-\frac{f(z)}{f'(z)}$$

für $z = z^{(r)}$.

§ 11. Die n Reihen z_1, \dots, z_n stellen die Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ in der Umgebung des Zweiges l_0 dar.

Es soll jetzt bewiesen werden, dass die n Reihen z_1, z_2, \dots, z_n , welche die Gleichung $f(z) = 0$ formal befriedigen, sämtlich innerhalb einer endlichen Umgebung der betrachteten Stelle gleichmässig convergiren und dort die Gleichungswurzeln darstellen. Diesen an sich schwierigen Beweis können wir nun fast vollständig auf den bereits im § 4 geführten Beweis für den regulären Fall reduciren, weil uns die soeben durchgeführten Untersuchungen nicht nur eine sondern alle n Congruenzwurzeln von $f(z)$ ergeben haben.

Diese n Reihen schreiten sämtlich nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von $(x - \alpha)$ und $(y - y_0)$ fort. Es seien a^* und b^* bzw. die Generalnenner der Exponenten von $x - \alpha$ und $y - y_0$ in *allen* n Reihen z_i . Wir setzen dann:

$$\xi = (x - \alpha)^{\frac{1}{a^*}}, \quad \eta = (y - y_0)^{\frac{1}{b^*}},$$

dann gehen z_1, \dots, z_n in Potenzreihen über, welche nach *ganzen* Potenzen von ξ und η fortschreiten, und welche nach Potenzen von η geordnet folgendermassen geschrieben werden können:

$$(1) \quad z_i = e_{r_i}(\xi)\eta^{r_i} + e_{r_i+1}(\xi)\eta^{r_i+1} + \dots$$

Es soll dann allgemein r_i die Ordnung der Wurzel z_i genannt werden.

Wir brauchen unseren Beweis nur für irgend eine jener n Reihen zu führen; es sei die Bezeichnung von vorn herein so gewählt, dass z_1 diejenige Reihe ist, deren Convergenz bewiesen werden soll.

Wir werden zeigen, dass diese allgemeinere Aufgabe auf den Convergenzbeweis für den regulären Fall vollständig reducirt werden kann, wenn man voraussetzen darf, dass die Ordnung r_1 der zu untersuchenden Reihe positiv ist, während die Ordnungszahlen r_2, r_3, \dots, r_n sämtlich negativ oder höchstens Null sind. Offenbar ist diese Voraussetzung im Allgemeinen nicht erfüllt, aber man kann die vorgelegte Gleichung durch eine sehr einfache Transformation so umformen dass sie die verlangte Eigenschaft erhält.

Es sei nämlich jene Voraussetzung nicht erfüllt, und

$$z_1 = e_{r_1}(\xi)\eta^{r_1} + \dots + e_s(\xi)\eta^s + e_{s+1}(\xi)\eta^{s+1} + \dots$$

die Entwicklung von z_1 ; wir betrachten dann das Aggregat:

$$z_1^{(0)} = e_{r_1}(\xi)\eta^{r_1} + \dots + e_s(\xi)\eta^s$$

der $(s + 1) - r_1$ ersten Glieder von z_1 und wählen s beliebig, jedenfalls aber so gross dass die Aggregate der entsprechenden Anfangsglieder von z_2, z_3, \dots, z_n von $z_1^{(0)}$ verschieden sind. Dieser Bedingung kann stets genügt werden, da, wie oben bewiesen wurde, die n Reihen z_i sämtlich von

einander verschieden sind. Jetzt führen wir in der ursprünglichen Gleichung $f(z, \xi\eta) = 0$ an Stelle von z die neue Variable:

$$(2) \quad \bar{z} = \frac{z - z_1^{(0)}}{\eta^s}, \quad z = z_1^{(0)} + \eta^s \bar{z}$$

ein; dieselbe genügt der Gleichung n^{ten} Grades:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{z}) &= f(z_1^{(0)} + \eta^s \bar{z}) = f(z_1^{(0)}) + f'(z_1^{(0)}) \eta^s \bar{z} + \dots + \frac{f^{(n)}(z_1^{(0)})}{n!} \eta^{ns} \bar{z}^n \\ &= \bar{A}_0(\xi\eta) + \bar{A}_1(\xi\eta) \bar{z} + \dots + \bar{A}_n(\xi\eta) \bar{z}^n = 0, \end{aligned}$$

und für ihre n Wurzeln $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ ergeben sich aus (2) unmittelbar die Ausdrücke:

$$\bar{z}_i = \frac{z_i - z_1^{(0)}}{\eta^s}.$$

Also erhält man speciell für die erste Wurzel:

$$z_1 = \frac{z_1 - z_1^{(0)}}{\eta^s} = c_{s+1}(\xi)\eta + c_{s+2}(\xi)\eta^2 + \dots;$$

sie ist also von positiver Ordnung und zwar ist sie abgesehen von dem Factor η^s gleich der zu untersuchenden Reihe mit Weglassung ihrer $(s+1) - r_1$ Anfangsglieder. Von den folgenden Wurzeln ist aber keine einzige von positiver Ordnung, denn wäre dies etwa für

$$z_2 = \frac{z_2 - z_1^{(0)}}{\eta^s}$$

der Fall so müsste ja $z_2 - z_1^{(0)}$ mindestens durch η^{s+1} theilbar sein, d. h. es wäre $z_1^{(0)}$ auch das Aggregat der Anfangsglieder von z_2 , was nach der Voraussetzung nicht der Fall ist.

Ersetzt man also die ursprüngliche Gleichung $f(z) = 0$ durch die transformirte $\bar{f}(\bar{z}) = 0$, so besitzt diese die Eigenschaft, dass eine und nur eine ihrer Wurzeln \bar{z}_1 von positiver Ordnung ist; hat man aber bewiesen dass diese Wurzel \bar{z}_1 gleichmässig convergirt, so gilt dasselbe auch von der ursprünglich zu untersuchenden Reihe:

$$z_1 = z_1^{(0)} + \eta^s \bar{z}_1,$$

da sie sich von jener nur um die Summe $z_1^{(0)}$ einer endlichen Anzahl convergenter Potenzreihen von ξ unterscheidet.

Wir können und wollen daher jetzt voraussetzen, dass schon in der ursprünglichen Gleichung die zu untersuchende Wurzel z_1 die einzige von positiver Ordnung ist, dass also die n Wurzeln folgendermassen geschrieben werden können:

$$z_1 = \eta^{\rho_1} E_1(\eta), \quad z_2 = \eta^{-\rho_2} E_2(\eta), \quad \dots, \quad z_n = \eta^{-\rho_n} E_n(\eta)$$

wo allgemein $E_i(\eta)$ eine Reihe von der Ordnung Null bedeutet, und wo $\rho_1 = r_1$ eine positive und $\rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n$ nicht negative ganze Zahlen bedeuten.

Es sei jetzt:

$$f(z, \xi\eta) = A_0(\xi\eta) + A_1(\xi\eta)z + \dots + A_n(\xi\eta)z^n = 0$$

die zu untersuchende Gleichung, und zwar mögen aus ihren Coefficienten die höchsten in ihnen enthaltenen Potenzen von η und ξ bereits durch Division beseitigt sein. Dann folgt aus der soeben angenommenen Beschaffenheit der Wurzeln, dass der erste Coefficient $A_0(\xi\eta)$ durch η theilbar, der zweite $A_1(\xi\eta)$ aber sicher nicht durch η theilbar ist.

In der That ist für eine beliebig hohe Potenz von η als Modul:

$$f(z) \equiv A(z - \eta^{\rho_1} E_1)(z - \eta^{-\rho_2} E_2) \dots (z - \eta^{-\rho_n} E_n) \pmod{\eta^M},$$

wo der Factor A dadurch bestimmt ist, dass nach Ausführung der Multiplication alle Coefficienten von nicht negativer Ordnung in η sind, und mindestens einer von ihnen die Ordnung Null hat. Setzt man $A = \eta^{\rho_2 + \rho_3 + \dots + \rho_n}$ so wird dieser Bedingung genügt, denn es ergibt sich dann:

$$f(z) \equiv (z - \eta^{\rho_1} E_1)(z\eta^{\rho_2} - E_2) \dots (z\eta^{\rho} - E_n) \pmod{\eta^M}.$$

In dem entwickelten Product ist nun das von z freie Glied gleich $\eta^{\rho_1} E_2 \dots E_n$ also durch η theilbar, während sich der Coefficient von z für $\eta = 0$ auf $E_2 \dots E_n$ reducirt, also η sicher nicht als Factor enthält, und hiermit ist die aufgestellte Behauptung vollständig bewiesen.¹

¹ Die Richtigkeit der soeben bewiesenen Behauptung kann auch direct aus dem zugehörigen Diagramme erschlossen werden.

In der Gleichung

$$f(z) = A_0(\xi\eta) + A_1(\xi\eta)z + \dots + A_n(\xi\eta)z^n = 0$$

sind also die Coefficienten $A_i(\xi\eta)$ ganze Functionen von η mit algebraischen Potenzreihen von ξ als Coefficienten und es beginnt $A_0(\xi\eta)$ mindestens mit der ersten, $A_1(\xi\eta)$ aber sicher mit der nullten Potenz von η ; entwickelt man also die Coefficienten nach Potenzen von η , so kann diese Gleichung folgendermassen geschrieben werde:

$$a_{10}(\xi)\eta + a_{01}(\xi)z + \sum_{i=2,3,\dots} a_{ik}(\xi)\eta^i z^k = 0,$$

wo die $a_{ik}(\xi)$ algebraische Potenzreihen von ξ sind, welche keine negativen Potenzen von ξ enthalten. Durch Auflösung dieser Gleichung nach z ergibt sich endlich:

$$z = \gamma_{10}(\xi)\eta + \sum_{i=2,3,\dots} \gamma_{ik}(\xi)\eta^i z^k,$$

wo allgemein:

$$\gamma_{rs}(\xi) = -\frac{a_{rs}\xi}{a_{01}(\xi)}$$

gesetzt ist. Nur in dem Falle, dass der gemeinsame Nenner $a_{01}(\xi)$ für $\xi = 0$ verschwindet, können die Reihen γ_{rs} von negativer Ordnung werden; dieser Fall tritt also nur für eine endliche Anzahl von Stellen ξ ein. Alsdann führen wir genau wie in § 4 für η und z die neuen Variablen $\bar{\eta}$ und \bar{z}

$$\eta = \xi^\sigma \bar{\eta}, \quad z = \xi^\tau \bar{z}$$

ein, und bestimmen σ und τ als die kleinsten Multipla von a^* , für welche in der so sich ergebenden Gleichung:

$$\bar{z} = \gamma_{10}\xi^{\sigma-\tau}\bar{\eta} + \sum_{ik} \gamma_{ik}\xi^{i\sigma+k\tau-\tau}\bar{\eta}^i \bar{z}^k$$

alle Reihen auf der rechten Seite von nicht negativer Ordnung werden. Schreiben wir dann diese Gleichung kürzer

$$\bar{z} = g_{10}(x|\alpha) + \sum_{ik} g_{ik}(x|\alpha)\bar{\eta}^i \bar{z}^k,$$

so stimmt sie vollständig mit der Gleichung (11) des § 4 überein, und es gelten somit für \bar{z} bzw. für z alle Folgerungen welche wir damals

aus ihr gezogen hatten. Wir zeigten dort, dass diese Gleichung stets eine und auch nur eine Lösung:

$$\bar{z} = \bar{e}_1(x|\alpha)\bar{\eta} + \bar{e}_2(x|\alpha)\bar{\eta}^2 + \dots$$

von positiver Ordnung besitzt, deren Coefficienten Potenzreihen von $(x - \alpha)$ und deren Ordnungen alle nicht negativ sind. Ist R der gemeinsame Convergencebereich der Reihen $g_{ik}(x|\alpha)$ so convergirt die Reihe \bar{z} wenn man x innerhalb jenes Bereiches beliebig annimmt, und dann $\bar{\eta}$ auf einen durch jenen Werth von x bestimmten ebenfalls endlichen Bereich beschränkt. Nur dann kann also jener Bereich der Reihe \bar{z} unter jede noch so kleine Grenze herabsinken, wenn das Gleiche für den Convergencebereich der Coefficienten $g_{ik}(x|\alpha)$ oder was dasselbe ist für die Reihen $\gamma_{ik}(\xi)$ der Fall ist.

Nun sind aber die Reihen $\gamma_{ik}(\xi) = -\frac{a_{ik}(\xi)}{a_{01}(\xi)}$, ihr Convergencebereich ist also entweder gleich dem gemeinsamen Convergencebereich der Reihen $a_{10}(\xi)$, $a_{01}(\xi)$, $a_{rs}(\xi)$, oder seine Peripherie geht durch die nächste Nullstelle des gemeinsamen Nenners $a_{01}(\xi)$ hindurch.

Hieraus folgt, dass die Reihe \bar{z} , also auch die Reihe z_1 , stets innerhalb einer endlichen Umgebung der betrachteten Stelle gleichmässig convergirt, und dass sie auch die eine der n Wurzeln darstellt, und das Gleiche gilt also auch für die $n - 1$ anderen Wurzeln der vorgelegten Gleichung.

§ 12. Der Convergencebereich der Reihen z_1, z_2, \dots, z_n .

Die im vorigen Abschnitte durchgeführten Untersuchungen haben zu dem Ergebniss geführt, dass die n Reihen z_1, z_2, \dots, z_n stets innerhalb einer endlichen Umgebung der Stelle \mathfrak{P} ($\xi = 0, \eta = 0$) oder, was dasselbe ist, der Stelle

$$x = \alpha, \quad y = (y_0)_0$$

gleichmässig convergiren, und hier die n Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ darstellen; hier bedeutet $(y_0)_0$ den Werth der Potenzreihe y_0 für $x = \alpha$.

Falls eine von diesen Reihen mit negativen Potenzen von $y - y_0$ beginnt, oder falls ihre Coefficienten negative Potenzen von $x - \alpha$ ent-

halten, so muss von jenem Bereiche eine *beliebig kleine* Umgebung des Curvenzweiges $y = y_0$ oder der Geraden $x = \alpha$ abgenommen werden, innerhalb deren jene Entwicklung nicht gültig ist, analog, wie beim Laurent'schen Satze die Entwicklung innerhalb eines den betrachteten Punkt umgebenden Kreises gilt, dessen innerer Radius aber beliebig klein angenommen werden kann.

Es sei

$$z_1 = e_h(x|\alpha)(y - y_0)^{\frac{h}{k}} + \dots$$

irgend eine jener n Wurzeln; die Coefficienten $e_k(x|\alpha)$ sind algebraische Functionen von x , welche sich durch das im § 7 auseinandergesetzte Verfahren direct bestimmen lassen; sie sind alle auf einer ganz bestimmten Riemann'schen Fläche eindeutig ausgebreitet, auf welcher auch die den Curvenzweig darstellende Reihe y_0 eindeutig ist. Aus der Natur der die Coefficienten darstellenden Gleichungen ergibt sich ferner, dass die Reihen $e_h(x|\alpha)$, $e_{h+1}(x|\alpha)$, \dots , wieviele man auch betrachten mag, auf jener Riemann'schen Fläche nur eine endliche Anzahl von Polen besitzen, denn man überzeugt sich leicht, dass in den linearen Gleichungen welche die regulären Coefficienten definiren, der Coefficient des höchsten Gliedes, dessen Nullstellen ja die Pole jener Glieder bestimmen, immer derselbe ist (vgl. § 10 Ende).

Alle jene Coefficienten $e_k(x|\alpha)$ convergiren also gemeinsam in dem Kreise, dessen Peripherie durch den nächsten kritischen Punkt hindurchgeht, d. h. entweder durch den nächsten Verzweigungspunkt der Riemann'schen Fläche, oder durch den nächsten der in endlicher Anzahl vorhandenen Pole der Reihen $e_k(x|\alpha)$.

Obwohl nun jene Reihen auch als Functionen von x und y betrachtet stets innerhalb einer endlichen Umgebung des betrachteten Punktes $\mathfrak{P} = (x = \alpha, y = (y_0)_0)$ convergiren, so kann doch der Fall eintreten, dass dieser Bereich in allen seinen Dimensionen kleiner und kleiner wird, falls jener Punkt \mathfrak{P} sich einer gewissen Grenzlage nähert; tritt dieser Fall doch schon bei einer algebraischen Function einer Variablen x ein, wenn sich der Punkt einer Verzweigungsstelle der zugehörigen Riemann'schen Fläche annähert.

Bei der Untersuchung dieser Frage wollen und können wir uns auf

den Fall beschränken, dass z eine *ganze* algebraische Function ist, dass also die Gleichung für z die Form hat:

$$f(z) = z^n + A_{n-1}(xy)z^{n-1} + \dots + A_0(xy) = 0$$

und alle $A_i(xy)$ ganze Functionen von x und y sind. Ist das nicht der Fall, so kann ja

$$z = \frac{\zeta}{A_n(xy)}$$

gesetzt werden, wo ζ eine ganze algebraische Function ist, und es kann dieser Quotient nun in eine Reihe entwickelt werden.

Zweitens nehmen wir an, dass der betrachtete Punkt

$$\mathfrak{P} = (x = \alpha, y = (y_0)_0)$$

sich im Endlichen befindet, dass also die Potenzreihe:

$$y_0 = \beta_0 + \beta_1(x - \alpha) + \dots$$

keine negativen Glieder enthält; auch hierin liegt keine Beschränkung der Allgemeinheit; wäre nämlich etwa

$$y_0 = \frac{\beta_{-h}}{x - \alpha^{-h}} + \dots + \frac{\beta_{-1}}{x - \alpha^{-1}} + \dots = \frac{1}{(x - \alpha)^h} E(x - \alpha),$$

so braucht man nur die Variable y durch $y' = \frac{1}{y}$ zu ersetzen, denn dann wird:

$$y' = \frac{1}{y_0} = (x - \alpha)^h \frac{1}{E(x - \alpha)} = (x - \alpha)^h \left(\frac{1}{\beta_{-h}} + \dots \right),$$

und in der transformirten Gleichung liegt der entsprechende Punkt im Endlichen.

Wir gelangten nun im vorigen Abschnitte dadurch zu der Gleichung:

$$(1) \quad a_{10}\eta + a_{01}z + \sum a_{ik}\eta^i z^k = 0$$

dass wir in der ursprünglichen Gleichung:

$$z = z_1^{(0)} + \tilde{z}$$

setzten, wo

$$z_1^{(0)} = e_h(\tilde{z})\eta^h + e_{h+1}(\tilde{z})\eta^{h+1} + \dots + e_r(\tilde{z})\eta^r$$

das Aggregat der $(r - h + 1)$ Anfangsglieder der Reihe z_1 bedeutet, und r beliebig gross gewählt werden kann; dann genügt $\bar{z} = e_{r+1}(\xi)\eta^{r+1} + \dots$ der Gleichung:

$$(2) \quad f(z_1^{(0)} + \bar{z}) = f(z_1^{(0)}) + f'(z_1^{(0)})\bar{z} + \dots + \frac{f^{(n)}(z_1^{(0)})}{|n|} \bar{z}^n = 0$$

und diese Gleichung erhält, wenn r genügend gross gewählt wird, die Form (1). Die Coefficienten dieser Gleichung (2) werden ganze rationale Functionen der Reihencoefficienten von $z_1^{(0)}$ oder von z_1 , convergiren also ebenfalls innerhalb des Convergenzbereiches desselben. Denkt man sich also jene Coefficienten $\frac{f^{(i)}(z_1^{(0)})}{|i|}$ nach Potenzen von η entwickelt, so convergiren die Coefficienten der Potenzen von η also die Reihen a_{10}, a_{h1} , innerhalb des Bereiches der Reihencoefficienten von z_1 . Nach den am Ende des vorigen Abschnittes ausgesprochenen Sätzen wird also der Convergenzbereich der Reihe \bar{z} oder was dasselbe ist, der Bereich der Reihe z_1 als Function von ξ und η betrachtet entweder durch den Convergenzbereich ihrer Coefficienten $e_k(x, \alpha)$ begrenzt, oder durch die nächste Nullstelle der Reihe $a_{10}(\xi)$, in der Weise, dass für einen beliebigen Werth von (ξ) innerhalb dieses Convergenzbereiches immer für η eine *endliche* Umgebung von $\eta = 0$ so abgegrenzt werden kann, dass jene Reihe z_1 convergirt.

Die Bedeutung jener nächsten Nullstelle von $a_{10}(\xi)$ kann aber leicht anders characterisirt werden. Entwickelt man den ersten Coefficienten $f'(z_1^{(0)})$ so ergibt sich:

$$f'(z_1^{(0)}) = a_{01}(\xi)\eta^{v_1} + a_{11}(\xi)\eta^{v_1+1} + \dots$$

und diese ersten Glieder bleiben, wenn r genügend gross gewählt ist, un geändert, wie gross auch r angenommen werde. Ersetzt man also $z_1^{(0)}$ durch die ganze Reihe z_1 selbst, so wird:

$$f'(z_1) = a_{01}(\xi)\eta^{v_1} + a_{11}(\xi)\eta^{v_1+1} + \dots,$$

also ist $a_{01}(\xi)$ das Anfangsglied der Entwicklung von $f'(z_1)$ nach Potenzen von η . Entwickelt man in gleicher Weise allgemein alle n conjugirten Werthe $f'(z_i)$ so sei:

$$f'(z_i) = a_{0i}^{(i)}\eta^{v_i} + a_{1i}^{(i)}\eta^{v_i+1} + \dots; \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

beachtet man dann, dass $D(x, y) = f'(z_1) \dots f'(z_n)$ ist, so folgt, wenn man jene n Gleichungen multiplicirt:

$$D(xy) = A(\xi) \eta^N + \dots,$$

wo der Coefficient $A(\xi)$ und der zugehörige Exponent N durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$A(\xi) = a_{01}^{(1)} \dots a_{0n}^{(n)}, \quad N = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n.$$

Ist nun ξ_0 ein Werth von ξ , wofür $a_{01}^{(1)}(\xi_0) = 0$ ist, so ist auch $A(\xi_0) = 0$ und umgekehrt, wenn für $\xi = \xi_0$ $A(\xi_0)$ verschwindet, so verschwindet mindestens einer der n Anfangsglieder $a_{0i}^{(i)}(\xi_0)$ ebenfalls. Es ergibt sich also das Resultat: Die Nullstellen der n conjugirten Anfangsglieder $a_{0i}^{(i)}(\xi)$ sind identisch mit den Nullstellen des Anfangsgliedes in der Entwicklung der Discriminante $D(x, y)$ nach Potenzen von η oder $y - y_0$.

Es sei nun $\eta = y - y_0$ und

$$P(y, x) = (y - y_0)(y - y'_0) \dots (y - y_0^{(a-1)})$$

diejenige irreducible Curve von der der Linearfactor $y - y_0$ einen Zweig darstellt. Wir betrachten dann den allgemeinsten Fall, dass die zu Grunde gelegte Curve ein ν -facher Factor der Discriminantencurve $D(xy) = 0$ ist. Es sei also:

$$D(xy) = P(y, x)^\nu D_1(xy).$$

Dann enthält die Gleichung $D_1(xy) = 0$ alle Curven der Discriminante ausser P . Es werde $D_1(xy)$ die *reducirte Discriminante* genannt. Entwickelt man nun jenes Product nach Potenzen von $y - y_0$ so ergibt sich:

$$\begin{aligned} D(x, y) &= (P'(y_0)(y - y_0) + \dots)^\nu (D_1(y_0, x) + \dots) \\ &= (P'(y_0)^\nu \cdot D_1(y_0, x))(y - y_0)^\nu + \dots \end{aligned}$$

und es ergibt sich so für das Product der n conjugirten Anfangsglieder die Gleichung:

$$a_{01}^{(1)} a_{01}^{(2)} \dots a_{0n}^{(n)} = P'(y_0)^\nu D_1(y_0, x).$$

Dieses Product verschwindet demnach dann und nur dann, wenn $x = x_0$ so gewählt wird, dass entweder $P'(y_0, x_0) = 0$ wird, oder dass $D_1(y_0, x_0)$ verschwindet. Im ersteren Falle ist x_0 ein kritischer Punkt (Pol oder

Verzweigungspunkt) der Curve $P=0$, also bereits unter den kritischen Punkten der Coefficienten enthalten, im zweiten Falle liegt jener Punkt erstens auf $P=0$ und zweitens auf $D_1(y, x)=0$, er ist also ein Schnittpunkt mit der reducirten Discriminantencurve. Also ergibt sich das Resultat:

Die n Reihen z_1, z_2, \dots, z_n können nur dann einen unendlich kleinen Convergencebereich erhalten, wenn der Punkt \mathfrak{P} sich unbegrenzt einem kritischen Punkte der Reihencoefficienten oder einem Schnittpunkte der Curve $P=0$ mit der reducirten Discriminantencurve nähert.

§ 13. *Der analytische Character der n Gleichungswurzeln und die ihnen zugehörigen Riemann'schen Kugelflächen.*

Ich betrachte jetzt irgend eine der n Gleichungswurzeln

$$(1) \quad z_0 = e_h(x|\alpha)(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + e_{h+1}(x|\alpha)(y - y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \dots$$

und untersuche den analytischen Character ihrer Coefficienten e_h, e_{h+1}, \dots . Wie soeben bewiesen wurde, sind sie alle *algebraische* Functionen von x , und zwar sind alle regulären Coefficienten $e_\tau, e_{\tau+1}, \dots$ rationale Functionen von y_0 und den irregulären Anfangscoefficienten $e_h \dots e_{\tau-1}$. Es existirt demnach eine Riemann'sche Kugelfläche niedrigster Ordnung, auf welcher alle jene Coefficienten und y_0 eindeutig ausgebreitet sind. Es sei \mathfrak{R} jene Fläche und ν ihre Blätterzahl; dann soll \mathfrak{R} , die zu der Reihe z_0 zugehörige Kugelfläche genannt werden. Jene Reihen $y_0, e_h(x|\alpha), e_{h+1}(x|\alpha), \dots$ sind dann die Entwicklungen der entsprechenden algebraischen Functionen in der Umgebung eines von denjenigen ν Punkten der Kugelfläche, welche der Stelle $x=\alpha$ zugeordnet sind; ist \mathfrak{P} jener Punkt, so soll \mathfrak{P} der zu z_0 zugehörige Punkt genannt werden.

Da auch die algebraische Function y_0 auf \mathfrak{R} eindeutig ist so muss ihre Ordnungszahl μ oder der Grad von $P(y, x)$ in y ein Theiler von ν sein; es sei also:

$$\nu = \lambda \mu.$$

Die Coefficienten $e_h(x|\alpha)$ besitzen nun, wie weit man auch gehen mag, zusammen stets nur eine endliche Anzahl von Polen auf der Kugelfläche \mathfrak{R} , und ebenso besitzt jene Fläche \mathfrak{R} nur eine endliche Anzahl von Verzweigungspunkten, in denen mindestens eine von jenen Reihen nach gebrochenen Potenzen des Linearfactors $x - \alpha$ fortschreitet. Man kann nun y_0 und alle Coefficienten simultan von dem zuerst betrachteten Punkte \mathfrak{P} nach einem beliebigen anderen Punkte \mathfrak{P}' der Kugelfläche fortsetzen; dadurch geht die ganze Reihe z_0 in (1) in eine andere:

$$(1') \quad z'_0 = e'_h(x|\alpha')(y - y'_0)^{\frac{h}{b}} + e'_{h+1}(x|\alpha')(y - y'_0)^{\frac{h+1}{b}} + \dots$$

über, in welcher jetzt $y'_0, e'_h, e'_{h+1}, \dots$ die jenem Endpunkte entsprechenden eindeutig bestimmten Potenzreihen sind, welche nach ganzen oder gebrochenen Potenzen des zugehörigen Linearfactors $(x - \alpha')$ fortschreiten; und jede so sich ergebende Reihe z'_0 beginnt natürlich mit derselben Potenz des Linearfactors $y - y'_0$, wie die ursprüngliche z_0 . Da jede der zur Fortsetzung benutzten Reihen als Function von x und y betrachtet, in einem endlichen Bereiche convergirt, abgesehen von dem beliebig kleinen Bereiche einer endlichen Anzahl von *Punkten* auf \mathfrak{R} , so kann jene Potenzreihe auch wirklich in der hier geschilderten Weise längs \mathfrak{R} mit Vermeidung jener kritischen Punkte fortgesetzt werden, und aus den bekannten Sätzen der Functionentheorie folgt, dass die so sich ergebende Endreihe z'_0 eine eindeutig bestimmte unter den n Wurzeln ist, welche die Gleichung $f(z) = 0$ in der Umgebung des dort vorhandenen Zweiges ($x = \alpha', y = y'_0$) derselben Curve $P(y, x) = 0$ besitzt. Aber auch für jeden der soeben noch ausgeschlossenen kritischen Punkte $\bar{\mathfrak{P}}_0$ ($x = \bar{\alpha}, y = y_0$) der Riemann'schen Kugelfläche \mathfrak{R} existirt eine eindeutig bestimmte Reihe

$$z_0 = e_h(x|\alpha)(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + e_{h+1}(x|\alpha)(y - y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \dots,$$

welche als die Fortsetzung von z_0 in jenem Punkt anzusehen ist. In der That besitzt ja die Gleichung $f(z) = 0$ in $\bar{\mathfrak{P}}$ ebenfalls genau n Wurzeln, welche ihrerseits innerhalb einer *endlichen* Umgebung von $\bar{\mathfrak{P}}$ gleichmässig convergiren, weil jener Convergencebereich nur *beim Heranrücken* an $\bar{\mathfrak{P}}$ nicht aber *in* $\bar{\mathfrak{P}}$ selbst unendlich klein werden kann. Von diesen n so gefundenen Reihen coincidirt nun eine und nur eine in unendlich vielen Punkten der Umgebung von $\bar{\mathfrak{P}}$ mit den Fortsetzungen von z_0 und diese

ist es, welche als die Fortsetzung von z_0 für \mathfrak{P} anzusehen ist. Es ergibt sich also der Satz:

Jedem Punkte \mathfrak{P} der Riemann'schen Kugelfläche \mathfrak{R}_v entspricht eine eindeutig bestimmte Wurzel $z_0 = \sum e_k(x|\alpha)(y - y_0)^{\frac{k}{\delta}}$, der Gleichung $f(z) = 0$, und alle diese können als die analytischen Fortsetzungen aus einer von ihnen auf der Fläche \mathfrak{R}_v angesehen werden.

Zu jedem Punkte \mathfrak{P} von \mathfrak{R}_v gehört ein eindeutig bestimmtes Werthsystem $x = \alpha$, $y = y_0$ also auch eine und nur eine Wurzel z_0 der gegebenen Gleichung. Sei nun umgekehrt der Zweig l_0 also $(x = \alpha, y = y_0)$ gegeben, so entsprechen demselben auf \mathfrak{R}_v im Allgemeinen mehrere Punkte, also auch mehrere zugehörige Reihen z_0 ; von den n Wurzeln $z_1 \dots z_n$ die zu l_0 gehören sind also mehrere einfache analytische Fortsetzungen aus einander längs \mathfrak{R}_v . In der That seien $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_\nu$ die ν der Stelle $x = \alpha$ entsprechenden Punkte der Riemann'schen Fläche \mathfrak{R}_v und zwar mögen diese der Einfachheit wegen als regulär angenommen werden; für Verzweigungsstellen ergeben sich durch analoge Betrachtungen die gleichen Resultate. Ist dann, wie oben angenommen, $\nu = \lambda\mu$ so nimmt die algebraische Function μ^{ter} Ordnung y_0 in genau λ von diesen Punkten denselben Werth an; es sei die Bezeichnung so gewählt, dass y_0 in $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_\lambda$ seinen Werth nicht ändert; in jedem folgenden Punkte aber einen anderen Werth erhält. Sind dann $z_1, z_2, \dots, z_\lambda$ die λ zugehörigen Wurzeln, und ist allgemein:

$$z_i = e_h^{(i)}(x|\alpha)(y - y_0)^{\frac{h}{\delta}} + e_{h+1}^{(i)}(x|\alpha)(y - y_0)^{\frac{h+1}{\delta}} + \dots, \quad (i=1, 2, \dots, \lambda)$$

so sind diese sämmtlich von einander verschieden, da anderenfalls die Coefficienten schon auf einer Kugelfläche niedrigerer Ordnung eindeutig ausgebreitet wären, und sie befriedigen alle die vorgelegte Gleichung in der Umgebung des Zweiges l_0 , gehören also zu den n Wurzeln derselben. Alle übrigen jener Kugelfläche \mathfrak{R}_v zugehörigen Entwicklungen entsprechen aber nicht *diesem* Zweige l_0 , denn damit das für einen Punkt \mathfrak{P} der Fall sei, muss einmal $x = \alpha$ sein, d. h. \mathfrak{P} muss mit einem der Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_\lambda$ zusammenfallen, dann aber muss $y = y_0$ sein, und dies ist nur für $\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_\lambda$ der Fall. Es ergibt sich also der Satz:

welche sich aus einer unter ihnen durch analytische Fortsetzung ergeben, nicht nothwendig von einander verschieden zu sein. Sollen z. B. die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$f(z) = z^2 - xy + xy^2 = 0$$

in der Umgebung der Stelle $x = 0$ auf der Geraden $y = 0$, also nach Potenzen von y entwickelt werden, so erhält man:

$$z_1 = (xy)^{\frac{1}{2}}(1 - y)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{7}{2}} - \dots;$$

hier ist also $\lambda = 2$, $b = 2$ und hier geht z_2 aus z_1 dadurch hervor, dass man $x^{\frac{1}{2}}$ durch $-x^{\frac{1}{2}}$ ersetzt, während z'_1 bzw. z'_2 aus z_1 und z_2 durch Verwandlung von $y^{\frac{1}{2}}$ in $-y^{\frac{1}{2}}$ erhalten wird; von diesen vier Reihen sind aber offenbar nur zwei von einander verschieden.

Ersetzt man aber hier den Linearfactor y durch

$$\bar{y} = xy$$

welcher, als Function von y betrachtet, für dieselben Werthe von y verschwindet, so geht die Grundgleichung für z über in:

$$z^2 - \bar{y} + \frac{\bar{y}^2}{x} = 0$$

und die Entwicklung nach Potenzen von \bar{y} liefert jetzt:

$$z_1 = \bar{y}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\bar{y}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{-\frac{1}{2}}\bar{y}^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{-\frac{1}{2}}\bar{y}^{\frac{7}{2}} - \dots;$$

hier ist also $\lambda = 1$, $b = 2$ und die beiden conjugirten Entwicklungen z_1 und z'_1 sind in der That verschieden. Dasselbe kann nun in ganz singulären Fällen auch für Gleichungen von höherem Grade vorkommen. Es sei also

$$z_1 = e_h(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + e_{h+1}(y - y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \dots$$

diejenige Wurzel, welche zu dem Punkte \mathfrak{P}_1 von \mathfrak{R}_v gehört und

$$z_1, z'_1, \dots, z_1^{(b-1)}$$

der durch Umkreisung von l_0 aus z_1 sich ergebende Cyclus; es sei jetzt

$$z_2 = e'_h(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + e'_{h+1}(y - y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \dots$$

eine zu z_1 conjugirte Reihe, welche zum Punkte \mathfrak{P}_2 von \mathfrak{R} gehört und welche bereits in dem zu z_1 gehörigen Cyclus vorkommen möge; so dass etwa

$$(2) \quad z_2 = z_1^{(\beta)}$$

ist. Umläuft der Punkt jetzt den Zweig l_0 ein Mal, so ergibt sich aus dieser Gleichung die weitere

$$z_2' = z_1^{(\beta+1)},$$

und durch Fortsetzung dieses Verfahrens folgt, dass der zu z_2 gehörige Cyclus mit dem zu z_1 gehörigen identisch ist, dass nämlich allgemein

$$z_2^{(\beta+1)} = z_1^{(\beta+1)}$$

ist.

Ich untersuche jetzt, welcher Bedingung die Coefficienten e_k genügen müssen, damit zwei Cyclen übereinstimmen; vergleicht man in der Gleichung (2) oder also in:

$$\begin{aligned} & e'_h(y - x_0)^{\frac{h}{b}} + e'_{h+1}(y - y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \dots \\ &= \omega^{\beta h} e_h(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + \omega^{(\beta+1)h} e_{h+1}(y - y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \dots \end{aligned}$$

die Coefficienten gleich hoher Potenzen von $y - y_0$, so folgt, dass jene Gleichung dann und nur dann bestehen kann, wenn für alle Coefficienten der Reihe, wie weit man auch gehen mag, die Gleichungen bestehen:

$$(3) \quad e'_k = \bar{\omega}^k e_k \quad (k = h, h+1, \dots)$$

wenn $\bar{\omega} = \omega^{\beta}$ ebenfalls eine Einheitswurzel ist, deren Ordnungszahl \bar{b} gleich b oder gleich einem Theiler von b ist. Hieraus folgt also zunächst:

$$(e'_k)^{\bar{b}} = e_k^b.$$

Dieser Ausnahmefall kann also nur dann eintreten, wenn die \bar{b} ten Potenzen aller Coefficienten beim Übergange von \mathfrak{P}_1 zu \mathfrak{P}_2 ungeändert bleiben, also sämtlich algebraische Functionen von niedrigerer Ordnung sind.

Man kann nun auch in diesem allgemeinsten Falle den Linearfactor $y - y_0$ so durch ein Vielfaches $e(x)(y - y_0)$ desselben ersetzen, dass nunmehr z_2 und der zugehörige Cyclus nicht mehr auftritt. Zu der Bestimmung dieses Multipliers e in diesem Falle führt die folgende Überlegung. Es sei:

$$z_1 = e_h(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + e_k(y - y_0)^{\frac{k}{b}} + e_l(y - y_0)^{\frac{l}{b}} + \dots$$

die Entwicklung von z_1 nach Weglassung aller etwa identisch verschwindenden Coefficienten e ; dann können die Exponentenzähler h, k, l, \dots nicht alle einen und denselben Theiler mit dem Nenner b haben, da jene

Entwicklung sonst nicht nach Potenzen von $(y - y_0)^{\frac{1}{b}}$ fortschreiten würde. Sind also (k, l, \dots, r, b) ein System von Exponenten, welche mit b zusammen relativ prim zu einander sind, so kann man andere ganze Zahlen $\alpha, \lambda, \dots, \rho, \beta$ so bestimmen, dass:

$$\alpha k + \lambda l + \dots + \rho r + \beta b = 1$$

oder, da \bar{b} ein Theiler von b ist, dass:

$$\alpha k + \lambda l + \dots + \rho r \equiv 1 \pmod{\bar{b}}$$

ist. Setzt man nun:

$$e = e_k^\alpha e_l^\lambda \dots e_r^\rho$$

und bildet den conjugirten Werth e' von e , so erhält dieser nach (3) die Form:

$$e' = \bar{\omega}^{\alpha k + \lambda l + \dots + \rho r} e = \bar{\omega} e.$$

Führt man nun statt $(y - y_0)$ den neuen Linearfactor η durch die Gleichung:

$$\eta = e^b (y - y_0)$$

ein, welcher sich von ihm nur durch einen multiplicativen von x allein abhängigen Factor unterscheidet, so geht die Entwicklung von z_1 über in:

$$z_1 = \frac{e_h}{e^{\frac{h}{b}}} \eta^{\frac{h}{b}} + \frac{e_{h+1}}{e^{\frac{h+1}{b}}} \eta^{\frac{h+1}{b}} + \dots = E_h \eta^{\frac{h}{b}} + E_{h+1} \eta^{\frac{h+1}{b}} + \dots$$

Auch hier bleiben alle Coefficienten E_h, E_{h+1}, \dots auf der Kugelfläche

so erhält man alle λb conjugirten Reihen dadurch, dass man einmal die Coefficienten $e_k(x)$, das andere Mal das Entwicklungselement $(y - y_0)^1$ unabhängig von einander durch ihre conjugirten Werthe ersetzt; geometrisch entsprechen den hier betrachteten Fortsetzungswegen alle Wege und Umläufe längs der Schnittcurve P .

Es sei nun \bar{z}_1 irgend eine der n Wurzeln welche noch nicht in dem zu z_1 gehörigen Cyclus enthalten ist; dann gehört zu ihr ein zweiter Cyclus etwa von $\lambda' b'$ Reihen, welche alle durch Fortsetzung längs P aus z_1 hervorgehen, und in gleicher Weise können alle n Wurzeln in Cyclen analytisch zusammenhängender Reihen zusammengefasst werden.

Es möge für die Folge angenommen werden, dass die n zum Zweige l_0 von P gehörigen in drei solche Cyclen von λb , $\lambda' b'$, $\lambda'' b''$ zusammenhängenden Reihen zerfallen und es seien z_1, z'_1, z''_1 je eine derselben, so dass alle anderen aus einer von ihnen durch Fortsetzung längs P hin hervorgehen. Dann ist zunächst

$$n = \lambda b + \lambda' b' + \lambda'' b'';$$

ferner gehört zu jedem dieser drei Cyclen eine Kugelfläche auf denen die Coefficienten e von den Reihen des betreffenden Cyclus eindeutig ausgebreitet sind; diese Flächen seien durch $\mathfrak{R}_\nu, \mathfrak{R}_{\nu'}, \mathfrak{R}_{\nu''}$ bezeichnet; ist wieder μ der Grad von P so ist endlich:

$$\nu = \lambda \mu, \quad \nu' = \lambda' \mu, \quad \nu'' = \lambda'' \mu.$$

Die geometrische Bedeutung dieses Resultats ist die folgende: Es sei L die Schnittcurve der Oberfläche $f(z, xy) = 0$ und des geraden Cylinders $P(y, x) = 0$ welcher über der ebenen Curve $P(y, x) = 0$ senkrecht errichtet ist. Die n zu dem Zweige l_0 ($x = \alpha, y = y_0$) gehörigen Wurzeln z_1, z_2, \dots, z_n stellen dann die z -Ordinaten der Oberfläche f in einer endlichen Umgebung jener Schnittcurve L dar, also gewissermassen innerhalb eines auf der Oberfläche sich hinziehenden Bandes von veränderlicher, aber überall bestimmter endlicher Breite, welches L umgiebt. Hängen nun von jenen n Wurzeln z_i bzw. $\lambda b, \lambda' b', \lambda'' b''$ längs P analytisch zusammen, so heisst das geometrisch, dass jenes Band, die Umgebung von L , in drei getrennte Theile zerfällt, von denen jedes seinerseits in sich zusammenhängt.

Die Schnitteurve L selbst kann hierbei sehr wohl in mehr als drei getrennte Theile zerfallen; denn ist etwa:

$$z_1 = e_0(x) + e_1(x)(y - y_0)^{\frac{1}{b}} + \dots,$$

so stellt für $y = y_0$ die Reihe

$$z_1^{(0)} = e_0(x)$$

nebst ihren Fortsetzungen geometrisch den ersten Theil der Schnitteurve L dar. Ist nun $e_0(x)$ auf \mathfrak{R}_v von niedrigerer als der v^{ten} Ordnung, ist also $e_0(x)$ noch auf einer Riemann'schen Fläche von niedrigerer Ordnung eindeutig, was für critische Curven $P = 0$ im Allgemeinen der Fall sein wird, so zerfällt die Curve L auf jenem ersten Bande noch weiter in getrennte Theile, welche dann erst zusammenhängen, wenn man die Schnitteurve verlässt, und ausserhalb derselben in der Umgebung fortgeht.

Es sei jetzt:

$$z_1 = e_h(x)(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + e_{h+1}(x)(y - y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \dots$$

eine der lb Wurzeln des ersten Cyclus; entsprechend der Bezeichnung in der Theorie der Functionen einer Variablen sage ich dann, z_1 besitzt in Bezug auf den Zweig l_0 die Ordnungszahl h , wenn die Reihe mit der h^{ten} Potenz des Entwicklungselementes $(y - y_0)^{\frac{1}{b}}$ beginnt. Dieselbe Ordnungszahl besitzen dann aber nicht nur die lb Wurzeln desselben Cyclus, sondern diese Ordnungszahl kommt jeder der unendlich vielen Fortsetzungen von z_1 auf der ganzen zugehörigen Riemann'schen Kugelfläche \mathfrak{R}_v zu, oder, was dasselbe ist, jede Fortsetzung von z_1 längs P oder längs des zu L gehörigen Bandes besitzt dieselbe Ordnungszahl h .

Man kann daher die allgemeinere Definition aufstellen:

Die algebraische Function z besitzt auf der Kugelfläche \mathfrak{R}_v die Ordnungszahl h , wenn ihre Entwicklungen auf dieser Kugelfläche mit der h^{ten} Potenz des zugehörigen Entwicklungselementes beginnen.

Zu jeder Curve $P = 0$ gehört eine Anzahl von Kugelflächen $\mathfrak{R}_v, \mathfrak{R}_v, \mathfrak{R}_v$, und auf jeder besitzt die algebraische Function z eine ganz bestimmte ganzzahlige Ordnungszahl, welche positiv, null oder negativ sein kann.

Durch unser Verfahren können die Ordnungszahlen von z für jede Curve P und jede zugehörige Fläche direct aus der Gleichung für z bestimmt werden.

§ 15. *Der durch z bestimmte algebraische Functionenkörper.*

Die wahre Bedeutung der bisher erlangten Resultate ergibt sich erst dann, wenn wir von der bisher betrachteten algebraischen Function z absehen und die Gesamtheit aller durch x, y, z rational ausdrückbaren algebraischen Functionen, d. h. den durch diese Variablen constituirten algebraischen Functionenkörper $K(x, y, z)$ untersuchen.

Es sei also z durch die vorher betrachtete Gleichung $f(z, xy) = 0$ als algebraische Function von x und y defnirt, und es sei jetzt:

$$\zeta = \varphi(x, y, z)$$

irgend eine rationale Function von x, y, z . Aus bekannten Sätzen der Theorie der symmetrischen Functionen ergibt sich, dass auch ζ ebenso wie z einer Gleichung des n^{ten} Grades

$$F(\zeta, xy) = B_n(xy)\zeta^n + B_{n-1}(xy)\zeta^{n-1} + \dots + B_0(xy) = 0$$

mit ganzen rationalen Functionen von x und y als Coefficienten genügt, welche selbst irreductibel, oder die Potenz einer irreductiblen Function ist. Geometrisch stellt jene Gleichung eine neue Oberfläche dar, deren Coordinaten rational durch die entsprechenden Coordinaten der ursprünglichen ausdrückbar sind, welche also zu der durch $f = 0$ constituirten Oberflächenklasse gehört. Man kann unser im § 4 auseinandergesetztes Verfahren nun direct zur Bestimmung der n Zweige $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ benutzen, welche ζ in der Umgebung eines Zweiges l_0 ($x = \alpha, y = y_0$) einer beliebigen Curve $P = 0$ besitzt; viel einfacher ergeben sich jene Zweige aber auf folgendem Wege: Es seien z_1, z_2, \dots, z_n die n Wurzeln für z in der Umgebung des Zweiges l_0 ; dann erhält man ihnen entsprechend n conjugirte Reihen:

$$(1) \quad \zeta_1 = \varphi(x, y, z_1), \quad \zeta_2 = \varphi(x, y, z_2), \quad \dots, \quad \zeta_n = \varphi(x, y, z_n)$$

welche ebenfalls in endlicher Umgebung desselben Zweiges gleichmässig convergiren, und für diese die Function ζ darstellen.

Es seien nun wieder $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ die zu P gehörigen Riemann'schen Kugelflächen so ergibt sich aus den Gleichungen (1) direct, dass sich auch für eine beliebige Function ζ des Körpers $K(xy, z)$ die n conjugirten Wurzeln $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ ebenfalls in Cyclen von $\lambda b, \lambda' b', \lambda'' b''$ Reihen anordnen, deren Coefficienten bzw. auf $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ eindeutig ausgebreitet sind, und dass ferner z. B. die Reihen des ersten Cyclus nach ganzen Potenzen von $(y - y_0)^{\frac{1}{b}}$ fortschreiten u. s. w.; hieraus ergibt sich das wichtige Resultat, dass die Entwicklung *jeder* algebraischen Function ζ des ganzen Körpers $K(x, y, z)$ in der Umgebung einer Curve $P = 0$ nach gebrochenen Potenzen von $y - y_0$ fortschreitet wenn dasselbe für z der Fall war, dass also jene Curve $P = 0$ für alle Oberflächen $F(\zeta, xy)$ eine Verzweigungscurve ist, wenn dasselbe für die ursprüngliche $f(z, xy) = 0$ der Fall war, und dass sie für alle eine Verzweigungscurve von derselben Ordnung $b - 1$ ist. Ist aber $P = 0$ eine Verzweigungscurve von $F(\zeta, xy) = 0$, so muss, wie oben bewiesen war, $P(x, y)$ ein Theiler der Gleichungsdiscriminante $D(\zeta)$ von F sein, und man erhält so den Satz:

Alle Verzweigungscurven sind gemeinsame Curven der Discriminantencurven aller Oberflächen des Körpers $K(x, y, z)$.

Erst später wird gezeigt werden, dass diese Discriminantencurven ausser jenen keine gemeinsame Schnittcurven besitzen. Alle bis jetzt gefundenen Resultate beziehen sich also, und hierin liegt ihr Werth, nicht bloss auf die eine algebraische Grösse z , sondern auf alle Grössen ζ des zugehörigen Körpers, oder geometrisch gesprochen auf alle Oberflächen der durch $f(z, xy) = 0$ constituirten Klasse, wie dies später noch eingehend dargelegt werden wird.

Es sei nun $P = 0$ eine beliebige Curve, \mathfrak{R}_1 eine der ihr entsprechenden Riemann'schen Flächen. Dann besitzt jede Function ζ in Bezug auf \mathfrak{R}_1 eine ganz bestimmte Ordnungszahl k ; es ist nämlich k der Exponent des bezüglichen Linearfactors $(y - y_0)^{\frac{1}{b}}$ mit dem die λb zu \mathfrak{R}_1 zugehörigen Entwicklungen beginnen.

Um diese Thatsachen einfach aussprechen zu können ordne ich jeder von diesen unendlich vielen Riemann'schen Flächen \mathfrak{R}_i einen s. g. Primtheiler p zu und definire die Theilbarkeit einer algebraischen Function ζ durch einen Primtheiler p folgendermassen:

Eine algebraische Function ζ ist genau durch die k^{te} Potenz eines Primtheilers p oder durch p^k theilbar, wenn ihre Entwicklungen auf der zugehörigen Fläche \mathfrak{H}_p von der k^{ten} Ordnung sind.

Die Primtheiler p oder die Kugelflächen \mathfrak{H}_p sind die genaue Verallgemeinerung der Weierstrass'schen »Stellen« des algebraischen Gebildes, oder der Punkte der Riemann'schen Fläche in der Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen; sie sind, wie später gezeigt werden wird, absolute Invarianten, d. h. unabhängig von jeder Darstellungsart der Functionen ζ .

Jeder Curve $P(y, x) = 0$ entsprechen genau so viele Primtheiler p, p', p'' als ihr Kugelflächen $R_p, R_{p'}, R_{p''}$ zugeordnet sind, speciell gehören auch zu den beiden unendlich fernen Geraden $\frac{1}{x} = 0$ und $\frac{1}{y} = 0$ gewisse Primtheiler p , welche die Verallgemeinerung der unendlich fernen Punkte in der Riemann'schen Theorie sind; dieselben sollen im Folgenden stets durch $p_{(\infty)}, p'_{(\infty)}, \dots$ bezeichnet werden. Es liegt ferner auf der Hand, dass die hier eingeführten Primtheiler alle Eigenschaften der Primzahlen in der elementaren Zahlentheorie besitzen. Sind nämlich zwei Functionen ζ und ζ' bzw. durch p^k und $p^{k'}$ genau theilbar, so ist ihr Product genau durch $p^{k+k'}$, ihr Quotient durch $p^{k-k'}$ theilbar. Eine Function ζ heisst dann durch das Product $p_1^{k_1} p_2^{k_2}$ von zwei verschiedenen Primtheilern theilbar, wenn sie sowohl durch $p_1^{k_1}$ als auch durch $p_2^{k_2}$ genau theilbar ist.

Ebenso wie jede algebraische Function von einer Variablen nur eine endliche Anzahl von Nullstellen und Polen auf der zugehörigen Riemann'schen Fläche hat, besitzt in unserer Theorie jede Function ζ nur eine endliche Anzahl von Primtheilern in einer positiven oder negativen Potenz.

Zum Beweise dieses wichtigen Satzes führt die folgende Überlegung: Es sei $P(y, x)$ eine beliebige irreductible Function, p, p', p'' die zu P gehörigen Primtheiler und es möge die gegebene algebraische Function ζ genau durch das Product $p^k p'^{k'} p''^{k''}$ theilbar sein. Ist dann:

$$N(\zeta) = \zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_n = B_0(xy)$$

die Norm von ζ , so enthält diese rationale Function von x und y den zugehörigen Factor $P(y, x)$ genau in der Potenz

$$P(xy)^{k\lambda + k'\lambda' + k''\lambda''}.$$

Enthält nämlich ζ die Potenz p^k , so beginnen alle λb zu p gehörigen Reihen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_b$ genau mit $(y - y_0)^{\frac{k}{b}}$, ihr Product also mit $(y - y_0)^{k\lambda}$ und das Entsprechende gilt für die Divisoren p' und p'' ; also beginnt das Product aller n Reihen genau mit $(y - y_0)^{k\lambda + k'\lambda' + k''\lambda''}$ und dies ist dann und nur dann der Fall, wenn die Function $B_0(xy)$ dieselbe Potenz von P als Factor enthält.

Es sei jetzt ζ zunächst eine ganze algebraische Function, so dass alle ihre Gleichungscoefficienten, speciell also auch ihre Norm *ganze* Functionen von x und y sind. Eine solche Function ist dadurch characterisirt, dass sie nur die Divisoren $p_\infty p'_\infty$ in negativen Potenzen enthalten kann; in der That war ja gezeigt worden, dass für eine beliebige ganze Function $P(y, x)$ keine der zugehörigen Entwicklungen von negativer Ordnung sein kann. Dann zeigt man leicht, dass ζ nur eine endliche Anzahl von Primfactoren enthält. Soll nämlich ζ irgend einen Primfactor p auch nur in der ersten Potenz enthalten, so muss $N(\zeta) = B_0(xy)$ durch $P(xy)^\lambda$ theilbar sein. Nur den irreductiblen Factoren von $B_0(xy)$ können Primtheiler von ζ entsprechen und diesen entsprechen auch wirklich Divisoren von ζ . Um sie zu finden braucht man nur die Reihen $\zeta_1 \dots \zeta_n$ aufzusuchen welche irgend einem Zweige von P entsprechen und die Ordnungszahlen jener Reihen festzustellen. Ausserdem hat man ζ noch in Bezug auf die Geraden $\frac{1}{x} = 0$ und $\frac{1}{y} = 0$ und die zugehörigen Primfactoren $p_{(\infty)}$, $p'_{(\infty)}$, \dots , $p^{(2)}_{(\infty)}$ zu untersuchen, was genau auf dieselbe Weise geschieht.

So erhält man einen völlig bestimmten Divisor

$$\theta = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$$

dem die ganze algebraische Zahl ζ in dem Sinne äquivalent gesetzt werden kann, als derselbe alle und nur die Printheiler enthält, welche auch in ζ auftreten, und jeden ebenso oft, wie ζ . Dasselbe gilt für jede ganze rationale Function, die ja ebenfalls eine ganze algebraische Function ist.

Ist jetzt ζ eine gebrochene algebraische Function und genügt es der Gleichung:

$$a_n(xy) \zeta^n + a_{n-1}(xy) \zeta^{n-1} + \dots + a_0(xy) = 0$$

so ist, wie schon im Anfang von § 4 erwähnt wurde,

$$\zeta = \frac{\bar{\zeta}}{a_n(xy)},$$

wo $\bar{\zeta}$ eine ganze algebraische Function bedeutet, also äquivalent einem bestimmten Divisor $\bar{\vartheta}$ ist. Ebenso kann aber auch die ganze rationale Function $a_n(xy)$ in ihre Primdivisoren zerlegt werden, auch sie ist also einem anderen Divisor $\bar{\vartheta}_1$ äquivalent, und hieraus sowie nach den Fundamenteleigenschaften der Divisoren folgt dass

$$\bar{\zeta} \sim \frac{\bar{\vartheta}}{\bar{\vartheta}_1},$$

dass also jede ganze und auch jede gebrochene Grösse des Körpers $K(x, y, z)$ einem und nur einem Divisor $\bar{\vartheta}$ äquivalent ist.

Durch ihren Divisor ist eine algebraische Function bis auf eine multiplicative Constante bestimmt. Sind nämlich zwei Grössen ζ und ζ' demselben Divisor ϑ äquivalent, so ist ihr Quotient

$$\varepsilon = \frac{\zeta}{\zeta'} \sim \frac{\vartheta}{\vartheta} \sim 1$$

und ich zeige nun dass eine algebraische Grösse ε , welche äquivalent Eins ist, nothwendig eine Constante sein muss.

Ist die algebraische Function $\varepsilon \sim 1$, so gilt dasselbe von $\frac{1}{\varepsilon}$, und beide sind zunächst *ganze* algebraische Functionen, da sie keine endlichen Primtheiler in negativer Potenz enthalten. Hieraus folgt dass ε einer Gleichung von der Form genügt:

$$(1) \quad \varepsilon^n + g_{n-1}(xy)\varepsilon^{n-1} + \dots + g_1(xy)\varepsilon + r_0 = 0$$

wo r_0 eine Constante bedeutet, und alle $g_i(xy)$ ganze Functionen von x und y , denn nur dann ist auch $\frac{1}{\varepsilon}$ durch die Gleichung:

$$r_0 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n + g_1(xy) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1} + \dots + 1 = 0$$

ebenfalls als *ganze* algebraische Function defnirt. Aber auch alle Coefficienten $g_i(xy)$ müssen sowohl in Bezug auf x als auf y vom nullten Grade, d. h. sie müssen ebenfalls Constanten sein. Um dies zu zeigen, betrachte ich die n Wurzeln $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ in der Umgebung der unendlich fernen Geraden $\frac{1}{y} = 0$, und bestimme durch das allgemeine Verfahren ihre Ord-

nungszahlen. Alle diese Ordnungszahlen müssen aber Null sein, denn sonst würde ja ε mindestens einen der zu $\frac{1}{y} = 0$ gehörigen Primfactoren p_∞ enthalten, also nicht äquivalent Eins sein. Dieser Bedingung wird offenbar dann und nur dann genügt, wenn die Ordnungszahl ε_0 der Wurzel höchster Ordnung gleich Null ist. Aus dem im § 4 bewiesenen Satze folgt aber, dass diese Ordnungszahl durch die Gleichung bestimmt ist:

$$\varepsilon_0 = \text{Max}\left(\frac{\rho_0 - \rho_i}{s}\right),$$

wo $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n$ die Ordnungszahlen der Gleichungscoefficienten $g_i(xy)$ in Bezug auf $\frac{1}{y}$ sind. Dieselben haben die Werthe:

$$\rho_0 = \rho_n = 0, \quad \rho_i = -r_i, \quad (i=1, 2, \dots, n-1)$$

wo r_i den Grad des Coefficienten $g_i(x, y)$ in Bezug auf y bedeutet, also sicher eine nicht negative Zahl ist. Also ist

$$\varepsilon_0 = \text{Max}\left(\frac{r_i}{s}\right)$$

und dieser Maximalwerth ist dann und nur dann Null, wenn alle Coefficienten $g_i(xy)$ in Bezug auf y den Grad $r_i = 0$ haben, also y gar nicht enthalten. Genau ebenso zeigt man, dass alle Coefficienten auch von x unabhängig sind, dass sie sich also auf Constanten reduciren. Es genügt also ε einer Gleichung mit Zahlcoefficienten:

$$\varepsilon^n + r_{n-1}\varepsilon^{n-1} + \dots + r_0 = 0,$$

ist also selbst eine Constante; es werde beiläufig bemerkt dass jene Gleichung lauter gleiche Wurzeln besitzen muss, weil ε dem Körper $K(x, y, z)$ angehört.

Eine jede algebraische Function von zwei Variablen ist also durch ihren Divisor \mathfrak{d} in genau derselben Weise bis auf einen constanten Factor bestimmt, wie in der Riemann'schen Theorie eine Function durch ihre Nullstellen und Pole vollständig fixirt ist. Fasst man in \mathfrak{d} das Product aller Primfactoren mit positiven Exponenten zu einem Zähler, die übrigen

mit negativen Exponenten zu einem Nenner zusammen, so erhält man für jedes ζ eine Äquivalenz

$$\zeta \sim \frac{\mathfrak{z}}{n},$$

wo \mathfrak{z} und n *ganze* Divisoren bedeuten; auf den zu \mathfrak{z} gehörigen Riemannschen Flächen ist ζ von positiver, auf den zu n gehörigen von negativer Ordnung, der Zähler repräsentirt geometrisch die Nullcurven, der Nenner die Poleurven von ζ .

Auf die in dieser Arbeit gefundenen Resultate kann man nun eine vollständige arithmetisch strenge Theorie der algebraischen Functionen von zwei Variablen oder der algebraischen Flächen gründen, und diese dann auf die Theorie der algebraischen Integrale anwenden, welche in neuerer Zeit von anderen Grundlagen aus durch Herrn PICARD erfolgreich behandelt worden ist; dieselbe bietet nunmehr keine wesentlich grösseren Schwierigkeiten als die entsprechende für Functionen einer Variablen; ich habe diese Untersuchungen bereits durchgeführt und werde ihre Resultate in einer späteren Arbeit veröffentlichen.

ACTA
MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

JOURNAL

HERAUSGEGEBEN

RÉDIGÉ

VON

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

23

STOCKHOLM

BEIJERS BOKFÖRLAGSÄKTIEBOLAG.

1900.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

BERLIN

MAYER & MÜLLER.

PRINT 1.0114 FRIEDRICHSTRASSE 2

PARIS

A. HERMANN.

8 RUE DE LA BOUTIQUE.

REDACTION

SVERIGE:

A. V. BÄCKLUND, Lund.
A. LINDSTEDT, Stockholm.
G. MITTAG-LEFFLER, »
E. PHRAGMÉN, »

NORGE:

C. A. BJERKNES, Christiania.
ELLING HOLST, »
S. LIE, Leipzig.
L. SYLOW, Fredrikshald.

DANMARK:

J. PETERSEN, Kjöbenhavn.
H. G. ZEUTHEN, »

FINLAND:

L. LINDELÖF, Helsingfors.

INHALTSVERZEICHNISS. — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 23. — 1900. — TOME 23.

	Seite. Pages
FREDHOLM, IVAR. Sur les équations de l'équilibre d'un corps solide élastique	1— 42
HENSEL, K. Über eine neue Theorie der algebraischen Functionen zweier Variablen	339—416
HESSENBERG, GERHARD. Über die Invarianten linearer und quadratischer binärer Differentialformen und ihre Anwendung auf die Deformation der Flächen	121—170
HORN, J. Über die irregulären Integrale der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten	171—202
KÖNIGSBERGER LEO. Sur les principes de la mécanique. Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur (traduit de l'allemand par L. Laugel)	63— 80
KÖNIGSBERGER, LEO. Sur les principes de la mécanique. Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur (traduit par L. Laugel)	81— 84
MITTAG-LEFFLER, G. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène (première note)	43— 62
PETERSEN, JULIUS. Quelques remarques sur les fonctions entières	85— 90

Inhaltsverzeichniss. — Table des matières.

	Seite. Pages.
PICARD, ÉMILE. Sur une classe de transcendentes nouvelles (second mémoire).....	333—338
RIQUIER, CH. Sur une question fondamentale du calcul in- tégral	203—332
VAHLEN, KARL THEODOR. Über Fundamentalsysteme für symmetrische Functionen	91—120

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

JOURNAL

HERAUSGEGEBEN

RÉDIGÉ

VON

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

24: 1 & 2

167985.
13 | 12 | 21

STOCKHOLM

BEIJERS BOKFÖRLAGSÄKTIEBOLAG.

1900.

BERLIN

MAYER & MÜLLER.

GRAND-BOULEVARD 114, PARIS.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

PARIS

A. HERMANN.

5 RUE DE LA SORBONNE.

REDACTION

SVERIGE:

A. V. BÄCKLUND, Lund.
A. LINDSTEDT, Stockholm.
G. MITTAG-LEFFLER, »
E. PHRAGMÉN, »

NORGE:

C. A. BIERKNES, Christiania.
ELLING HOLST, »
S. LIE, Leipzig.
L. SYLOW, Frederikshald.

DANMARK:

J. PETERSEN, Kjöbenhavn.
H. G. ZEUTHEN, »

FINLAND:

L. LINDELÖF, Helsingfors.

SUR LES COURBES DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PAR

IVAR BENDIXSON

à STOCKHOLM.

Dans ses mémoires « Sur les courbes définies par des équations différentielles »¹ M. POINCARÉ a envisagé l'étude des équations différentielles sous un point de vue nouveau. En se bornant au côté qualitatif de la question, il a démontré une suite de théorèmes de la plus grande importance, à l'aide desquels on peut déterminer complètement la nature des courbes intégrales réelles, satisfaisant à une équation différentielle de la forme

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

X et Y désignant des polynomes en x et en y .

Il s'est d'ailleurs borné au cas où chaque point singulier (a, b) de l'équation en question est tel que l'on ait

$$X = \alpha(x - a) + \beta(y - b) + X_2,$$

$$Y = \gamma(x - a) + \delta(y - b) + Y_2,$$

X_2 et Y_2 désignant des polynomes en $x - a, y - b$, ne contenant que des termes au moins de la deuxième dimension, et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des constantes assujetties à ces deux conditions que l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \gamma & \delta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

n'ait pas de racine nulle et n'ait pas de racine multiple.

¹ Journal de Mathématiques, 1881, 1882, ...

L'étude des points singuliers est basée chez M. POINCARÉ sur le développement en série des intégrales qu'il avait donné antérieurement.¹ Dans le présent mémoire je veux d'abord prouver que les théorèmes les plus importants de M. POINCARÉ peuvent s'étendre au cas, où on fait sur les fonctions X et Y la seule hypothèse qu'elles soient continues ainsi que leurs dérivées prises par rapport à x et à y .

Dans le chapitre I nous démontrerons les principaux théorèmes qu'on obtient dans ce cas très général. En particulier j'insiste sur la notion de *courbe intégrale traversant un point singulier* et sur celle de *région nodale*, notions qui sont d'une grande importance pour l'étude des courbes intégrales dans le voisinage d'un point singulier.

Dans les chapitres suivants nous étudierons ensuite de plus près la nature des points singuliers dans le cas où X et Y sont des fonctions holomorphes des variables.

Après avoir donné dans le chapitre II la démonstration de divers théorèmes généraux, nous étudierons dans le chapitre III le cas où les termes de la plus petite dimension sont d'ordre 1, et où les racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \gamma & \delta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ne sont pas toutes deux nulles. Nous traiterons ces cas à l'aide des théorèmes généraux établis dans les chapitres précédents, et sans avoir besoin de connaître les développements en série des intégrales dans le voisinage d'un point singulier. Le point singulier sera dans ce cas un Nœud, Foyer, Centre, Col, ou enfin il sera traversé par deux courbes intégrales limitant une région nodale.

Dans les chapitres suivants nous étudierons le cas général, et nous le réduirons toujours par une suite de substitutions bilinéaires à des équations différentielles de la forme suivante:

$$x^n \frac{dy}{dx} = ay + bx + \mathfrak{P}(x, y); \quad \text{où } a \neq 0$$

¹ *Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles.* Journal de l'école polytechnique, Cahier 45.

Voir aussi POINCARÉ *Thèse inaugurale*, Paris, Gauthier-Villars 1879.

§ désignant une série de Taylor dont tous les termes sont de dimension > 1 .

Cette réduction nous permet non seulement de déterminer complètement la nature des courbes intégrales dans le voisinage d'un point singulier, mais encore d'obtenir des développements en série, en appliquant à ces dernières équations la méthode de mon mémoire *Sur les points singuliers des équations différentielles*.¹

A l'égard de cette méthode de réduction, nous ferons encore la remarque qu'elle nous permet aussi toujours de réduire le calcul des intégrales holomorphes dans le voisinage d'un point singulier à celui des intégrales holomorphes dans le voisinage de l'origine de plusieurs équations différentielles de la forme traitée dans le mémoire cité. Nous sommes donc parvenus à la résolution complète d'une question traitée par BRIOT et BOUQUET dans leur mémoire *Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles*,² où les dits auteurs ont développé une autre méthode de réduction qui admet d'ailleurs plusieurs cas d'exception.

Nous nous bornons ici à cette remarque, voulant dans ce mémoire traiter seulement *les courbes intégrales réelles* des équations différentielles.

Nous attirerons enfin l'attention sur la relation qui subsiste entre le nombre c des courbes intégrales traversant un point singulier, le nombre n_f des régions nodales fermées appartenant à ce point, et l'indice i de M. POINCARÉ. Cette relation peut s'écrire

$$c - n_f = 2(i + 1).$$

¹ Öfversigt af K. Vet. Akad. Förhandl., Stockholm, Febr. 9, 1898.

² Journal de l'école polytechnique, 1856.

CHAPITRE I.

Théorèmes généraux sur les courbes définies par des équations différentielles.

1. Étant donné un système d'équations différentielles

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Y(x, y) \end{aligned}$$

où $X, Y, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial y}$ sont des fonctions continues à l'intérieur d'une région finie A du plan des x, y , on sait qu'il existe un seul système d'intégrales

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= x(t - t_0, x_0, y_0), \\ y &= y(t - t_0, x_0, y_0), \end{aligned}$$

satisfaisant aux équations (1) et prenant pour $t = t_0$ les valeurs x_0, y_0 , quand (x_0, y_0) est un point quelconque du plan, situé à l'intérieur de A .

En appliquant par exemple la méthode d'approximation de M. PICARD on obtient pour ces intégrales des développements en séries convergentes tant que

$$|t - t_0| \leq \delta,$$

δ désignant une quantité positive suffisamment petite.

Mais on s'assure de plus aisément, que c'est là le seul système d'intégrales pour lequel

$$(3) \quad \lim_{t=t_0} x(t) = x_0; \quad \lim_{t=t_0} y(t) = y_0;$$

Soient en effet $x_1, y_1; x_2, y_2$; deux systèmes d'intégrales satisfaisant aux

équations (3), et supposons pour fixer les idées que les équations (3) soient satisfaites quand t tend en décroissant vers t_0 . Les deux équations

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = X(x_1, y_1) - X(x_2, y_2),$$

$$\frac{d(y_1 - y_2)}{dt} = Y(x_1, y_1) - Y(x_2, y_2)$$

nous donnent

$$\left| \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} \right| + \left| \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} \right| \leq 2N[|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|],$$

N désignant la valeur maxima des fonctions $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial X}{\partial y}$, $\frac{\partial Y}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}$ à l'intérieur de A .

On pourra donc écrire

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} \right| + \left| \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} \right| \\ & < 2N \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\left| \int_{t_0}^t \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} dt \right| + \left| \int_{t_0}^t \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} dt \right| \right] \\ & \leq 2N \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{t_0}^t \left(\left| \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} \right| + \left| \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} \right| \right) dt \right|. \end{aligned}$$

Soit M_t la valeur maxima de la fonction $\left| \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} \right| + \left| \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} \right|$ pour les valeurs de la variable comprises entre t_0 et t , on voit que

$$M_t \leq 2N \cdot M_t(t - t_0).$$

On aura donc, ou bien

$$1 \leq 2N(t - t_0),$$

ce qui est impossible quand t a une valeur voisine de t_0 , ou bien $M_t = 0$. Mais $M_t = 0$ conduit à

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = 0; \quad \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} = 0;$$

équations qui nous montrent que $x_1 - x_2 = 0$; $y_1 - y_2 = 0$.

c. q. f. d.

2. Les équations (2) représentent toujours une courbe intégrale du système (1), excepté dans le cas où x_0, y_0 satisfait à

$$X(x_0, y_0) = 0; \quad Y(x_0, y_0) = 0.$$

Dans ce cas le point (x_0, y_0) est dit un *point singulier* du système, et l'intégrale (2) se réduit au point (x_0, y_0) .

Le théorème ci-dessus démontré met alors en évidence qu'il n'existe pas de courbe intégrale tendant vers le point singulier (x_0, y_0) quand t tend vers une valeur finie.

Si x_0, y_0 n'est pas un point singulier, et si t'_0 a une valeur telle que

$$|t'_0 - t_0| < \delta,$$

les fonctions $x(t - t_0, x_0, y_0)$, $y(t - t_0, x_0, y_0)$ prendront pour $t = t'_0$ des valeurs déterminées x'_0, y'_0 . En formant maintenant le système d'intégrales qui pour $t = t'_0$ prend les valeurs x'_0, y'_0 , on obtiendra

$$\begin{aligned} x &= x(t - t'_0, x'_0, y'_0), \\ y &= y(t - t'_0, x'_0, y'_0). \end{aligned} \quad (2')$$

Ces séries sont convergentes pour

$$|t - t'_0| \leq \delta_1$$

et les équations (2) et (2') représentent pour les valeurs de t , qui satisfont aux deux inégalités $|t - t_0| \leq \delta$, $|t - t'_0| \leq \delta_1$, exactement la même courbe intégrale.

Le développement (2') nous donnera en général une continuation de la courbe intégrale définie par les équations (2).

En procédant de cette manière, on peut former des parties d'une courbe intégrale de plus en plus grandes.

3. Quand on cherche à étendre ce prolongement de la courbe intégrale pour des valeurs de $t > t_0$, il peut arriver, ou que l'on obtient des développements en série pour chaque valeur de t , ou qu'il existe des valeurs de t auxquelles on ne peut pas parvenir par de tels prolongements. Il y aura évidemment lieu de faire la même distinction pour les valeurs de $t < t_0$.

I. Supposons d'abord que T soit la limite supérieure des valeurs de t auxquelles on peut parvenir par les dits prolongements pour une courbe intégrale déterminée

$$x = x(t); \quad y = y(t).$$

Envisageons alors une région quelconque A' du plan des x, y , située à l'intérieur de A , je dis que la courbe intégrale ne peut pas rester à l'intérieur de A' , quand t tend vers T en croissant depuis t_0 .

En effet si la courbe intégrale restait toujours à l'intérieur de A' , on pourrait déterminer un nombre positif M tel que

$$|X| < M; \quad |Y| < M; \quad \text{pour } t_0 \leq t \leq T,$$

ce qui nous donnerait

$$|x(t_1) - x(t_2)| = \left| \int_{t_2}^{t_1} X dt \right| < M |t_1 - t_2|,$$

$$|y(t_1) - y(t_2)| = \left| \int_{t_2}^{t_1} Y dt \right| < M |t_1 - t_2|.$$

Quand t_1 et t_2 tendent vers T , on aura donc

$$\lim_{\substack{t_1 = T \\ t_2 = T}} (x(t_1) - x(t_2)) = 0; \quad \lim_{\substack{t_1 = T \\ t_2 = T}} (y(t_1) - y(t_2)) = 0,$$

ce qui fait voir que $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers des limites déterminées a et b , quand t tend vers T .

Le point $(x = a, y = b)$ ne peut donc pas être un point singulier du système (1), car il n'existe aucun autre système d'intégrales se rapprochant de ce point, quand t tend vers T , que le point (a, b) lui-même. De même ce point ne peut pas être un point régulier, car $x(t), y(t)$ seraient alors donnés par des séries convergentes dans le voisinage de $t = T$, et on pourrait alors prolonger la courbe intégrale pour des valeurs de $t > T$. Il n'est donc pas possible que la courbe reste à l'intérieur de A' .

c. q. f. d.

II. Supposons maintenant que l'on puisse étendre le prolongement de la courbe intégrale pour chaque valeur de $t > t_0$, et que la courbe intégrale soit située à l'intérieur de A' pour les valeurs de $t > t_0$.

Deux cas sont alors à distinguer, suivant que $x(t)$, $y(t)$ tendent vers des limites déterminées ou non.

Si l'on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = a; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = b;$$

je dis que le point (a, b) est un point singulier du système (1).

En effet supposons pour fixer les idées que

$$X(a, b) \neq 0.$$

On pourrait alors déterminer un nombre positif m suffisamment grand pour que l'on eut

$$|X(x(t), y(t))| > \left| \frac{X(a, b)}{2} \right|, \quad \text{pour } t \geq m;$$

ce qui nous donnerait

$$\begin{aligned} |x(t) - x(m)| &= \left| \int_m^t X(x, y) dt \right| \\ &> (t - m) \left| \frac{X(a, b)}{2} \right| \end{aligned}$$

et on en concluerait que $x(t)$ tend vers l'infini avec t , ce qui est contraire à notre supposition.

c. q. f. d.

4. Afin de traiter le cas où $x(t)$ et $y(t)$ ne tendent pas vers des limites déterminées quand t tend vers l'infini, nous aurons besoin d'établir auparavant quelques théorèmes simples.

Nous désignerons dorénavant, avec M. POINCARÉ, par le nom de *caractéristiques* les courbes que nous avons appelées jusqu'ici des courbes intégrales.

Si la courbe intégrale tend vers le point singulier (a, b) , quand t tend vers $+\infty$, nous dirons que la *demi-caractéristique* correspondant à $t > t_0$ aboutit au point (a, b) .

De même, si $x(t)$, $y(t)$ sont des fonctions telles que l'on ait

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = a; \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = b;$$

nous dirons que la demi-caractéristique correspondant à $t < t_0$ aboutit au point singulier (a, b) .

5. Nous démontrerons à présent le théorème suivant:

Théorème I. *Soient*

$$(4) \quad x = x(t - t_0, x_0, y_0), \quad y = y(t - t_0, x_0, y_0),$$

les équations d'une caractéristique qui pour $t_0 \leq t \leq t_1$ est située à l'intérieur de A , et soient

$$(4') \quad \bar{x} = \bar{x}(t - t_0, \bar{x}_0, \bar{y}_0), \quad \bar{y} = \bar{y}(t - t_0, \bar{x}_0, \bar{y}_0),$$

les équations d'une autre caractéristique qui pour $t = t_0$ passe par un point (\bar{x}_0, \bar{y}_0) voisin de (x_0, y_0) . Ayant choisi un nombre positif δ aussi petit que l'on voudra, je dis qu'on peut toujours déterminer un nombre positif ε suffisamment petit pour que

$$\begin{aligned} |\bar{x} - x| &< \delta, \\ |\bar{y} - y| &< \delta, \end{aligned} \quad \text{pour } t_0 \leq t \leq t_1,$$

pourvu que l'on ait $|\bar{x}_0 - x_0| \leq \varepsilon$, $|\bar{y}_0 - y_0| \leq \varepsilon$.

Je veux donner de ce théorème élémentaire une démonstration qui m'a été communiquée par M. LINDELÖF.

La caractéristique (4) étant pour $t_0 \leq t \leq t_1$ située à l'intérieur de A , on peut toujours déterminer une région A' du plan, située à l'intérieur de A et telle que la caractéristique soit pour ces valeurs de t située à l'intérieur de A' .

Désignons par ρ la distance minima d'un point de la caractéristique (4) (pour $t_0 \leq t \leq t_1$) au contour de A' , et par N la valeur absolue maxima des fonctions $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial y}$, à l'intérieur et sur le contour de A' .

On aura

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\bar{x} - x) &= X(\bar{x}, \bar{y}) - X(x, y) \\ &= (\bar{x} - x)X'_x(\xi, \eta) + (\bar{y} - y)Y'_y(\xi, \eta) \end{aligned}$$

le point ξ, η étant situé sur la droite joignant le point (x, y) au point (\bar{x}, \bar{y}) , et entre ces deux points.

Tant que

$$(\bar{x} - x)^2 + (\bar{y} - y)^2 < \rho^2$$

on est donc sûr que

$$\left| \frac{d}{dt}(\bar{x} - x) \right| < N[|\bar{x} - x| + |\bar{y} - y|],$$

et on aura de la même manière

$$\left| \frac{d}{dt}(\bar{y} - y) \right| < N[|\bar{x} - x| + |\bar{y} - y|].$$

Ces deux inégalités conduisent à la suivante

$$(5) \quad \left| \frac{d}{dt}(|\bar{x} - x| + |\bar{y} - y|) \right| < 2N[|\bar{x} - x| + |\bar{y} - y|],$$

et celle-ci aura donc certainement lieu tant que

$$|\bar{x} - x| + |\bar{y} - y| < \rho.$$

Soit maintenant δ un nombre aussi petit que l'on voudra, et déterminons un nombre positif ε tel que

$$2\varepsilon e^{2N(t_1 - t_0)} < \delta < \rho.$$

Si l'on détermine alors les valeurs \bar{x}_0, \bar{y}_0 telles que

$$|\bar{x}_0 - x_0| \leq \varepsilon, \quad |\bar{y}_0 - y_0| \leq \varepsilon,$$

je dis qu'on aura toujours

$$|\bar{x} - x| < \delta; \quad |\bar{y} - y| < \delta; \quad \text{pour } t_0 \leq t \leq t_1.$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait une valeur t' de t , située entre t_0 et t_1 , telle que la fonction $|\bar{x} - x| + |\bar{y} - y|$, serait égale à δ pour $t = t'$, mais serait $< \delta$ pour $t_0 \leq t \leq t'$.

L'inégalité (5) étant alors satisfaite pour $t_0 \leq t \leq t'$, on aurait

$$\begin{aligned} |\bar{x} - x| + |\bar{y} - y| &< [|\bar{x}_0 - x_0| + |\bar{y}_0 - y_0|] e^{2N(t - t_0)} \\ &< 2\varepsilon e^{2N(t' - t_0)} < \delta, \quad \text{pour } t_0 \leq t \leq t', \end{aligned}$$

ce qui est contraire à notre supposition que $|\bar{x} - x| + |\bar{y} - y| = \delta$ pour $t = t'$.
c. q. f. d.

6. Nous pouvons de la manière suivante énoncer ce théorème sous une forme plus géométrique.

Soient (x_0, y_0) et (x_1, y_1) deux points du plan situés sur la même caractéristique, et entourons (x_1, y_1) par un cercle C_1 de rayon δ_1 aussi petit que l'on voudra. On peut alors toujours entourer le point (x_0, y_0) par un cercle C de rayon δ suffisamment petit, pour qu'une caractéristique, passant par un point quelconque de C , traverse toujours C_1 .

Envisageons maintenant un point x_0, y_0 d'une caractéristique, correspondant à $t = t_0$, et menons en (x_0, y_0) une normale N à cette courbe. Quand t en croissant dépasse t_0 , notre caractéristique traversera la normale en passant d'un côté à l'autre. Il nous sera plus tard nécessaire de distinguer l'un de l'autre les deux côtés de la normale. A cet effet nous désignerons par *côté positif* de la normale celui que traverse la caractéristique pour $t > t_0$, et par *côté négatif* celui qu'elle traverse pour $t < t_0$.

Un corollaire qu'on obtient immédiatement est le suivant:

« On peut toujours entourer le point x_0, y_0 par un cercle C de rayon suffisamment petit, pour que chaque caractéristique passant par un point de C coupe la normale N de manière à passer du côté négatif au côté positif de cette normale, quand t va en croissant. »

7. Théorème II. Si

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

sont les équations d'une caractéristique qui lorsque t croît de t_0 vers $+\infty$ reste toujours à l'intérieur de A' , sans approcher indéfiniment d'aucun point singulier, deux cas seulement sont possibles. Ou la caractéristique sera elle-même une courbe fermée, ou elle s'approchera indéfiniment d'une caractéristique fermée.

Observons d'abord que la caractéristique en question, laquelle nous désignerons par L , aura nécessairement plus d'un point limite quand t tend vers $+\infty$. Autrement elle aboutirait à un point singulier (voir page 8) ce qui est contraire à notre hypothèse.

Soit donc P un point limite de L . Deux cas seront à distinguer, suivant que le point P est situé sur L ou non.

I. Si P est un point de L , la caractéristique L sera une courbe fermée.

En effet, si L n'est pas une courbe fermée, elle doit nécessairement couper la normale en P une infinité de fois dans le voisinage de P . Supposons que L coupe la normale encore une fois en P_1 (pour $t = t_1$). Si P_1 est un point suffisamment voisin de P , on sait que, en P_1 , L passe du côté négatif au côté positif de la dite normale. (Fig. I.)



Fig. I.

Envisageons maintenant la région C du plan, limitée par la courbe fermée qui est composée par la partie de L située entre P et P_1 et par la normale PP_1 .

Si L entre à l'intérieur de C quand t dépasse la valeur t_1 , cette courbe ne peut plus sortir de C , sans traverser la normale dans le sens opposé à celui dans lequel il l'a traversée en P et P_1 , ce qui est impossible. Etant alors toujours située à l'intérieur de C pour $t > t_1$, elle ne peut traverser ni la normale entre P et P_1 , ni le prolongement de la normale P_1P situé à l'extérieur de C . On en conclut que P n'est pas un point limite de L pour $t = +\infty$.

Si au contraire L sort de C , quand t dépasse la valeur t_1 , elle ne peut plus couper la normale entre P et P_1 sans passer du côté positif au côté négatif, ce qui est impossible. P ne peut donc pas être un point limite de L .

Nous sommes donc parvenus à une contradiction en supposant que L n'est pas une courbe fermée.

c. q. f. d.

II. Si P n'est pas un point de L , la caractéristique passant par P sera une courbe fermée.

Soit en effet K la demi-caractéristique passant par le point P et correspondant à $t > t_0$. On voit aisément que chaque point de K est un point limite de L .

En effet, soit (a_1, b_1) un point quelconque de K ; entourons ce point par un cercle C_1 de rayon aussi petit que l'on voudra. Le théorème I nous apprend qu'on pourra entourer le point P par un cercle C de rayon suffisamment petit pour que chaque caractéristique passant par un point de C aille couper C_1 . Mais L passera nécessairement par des points de C , et on en conclut que L doit traverser C_1 . Or C_1 est un cercle de rayon aussi petit que l'on voudra, ce qui met en évidence que (a_1, b_1) est un point limite de L .

On en conclut que K ne peut pas s'approcher indéfiniment d'un point singulier.

La caractéristique K ayant alors pour $t = +\infty$ des points limites qui ne sont pas des points singuliers, soit $x = a_2$, $y = b_2$, un tel point.

Je veux prouver que le point (a_2, b_2) est nécessairement un point de K . Supposons en effet que (a_2, b_2) ne soit pas un point de K , et par le point (a_2, b_2) menons une normale à la caractéristique passant par (a_2, b_2) .

Envisageons une partie suffisamment petite de cette normale, telle que chaque caractéristique rencontrant cette partie de la normale passe du côté négatif au côté positif, quand t va en croissant. Quand t croît vers l'infini, K doit nécessairement couper cette normale un nombre infini de fois. Soient P_1, P_2, P_3 trois points consécutifs où K coupe la normale, pour les valeurs $t_1 < t_2 < t_3$ de t . On prouve alors de même qu'au cas I que K ne peut pas couper la normale entre P_1 et P_2 , ni entre P_2 et P_3 . Il s'ensuit que P_2 est situé entre P_1 et P_3 .

Mais on s'assure aussi aisément que L ne peut couper la normale plus d'une fois entre P_1 et P_2 .

Désignons en effet comme ci-dessus par C la région du plan limitée par la courbe fermée, composée par la partie de K comprise entre P_1 et P_2 et par la normale P_1P_2 . Lorsque L traverse la normale, quand t va en croissant, et entre dans C , elle n'en peut plus sortir sans traverser la normale entre P_1 et P_2 du côté positif au côté négatif, ce qui est impossible. L restera donc toujours à l'intérieur de C et ne peut donc pas couper la normale P_1P_2 encore une fois.

La courbe L ne peut donc pas couper la normale entre P_1 et P_2

plus d'une fois. De la même manière on s'assure que L ne peut pas couper la normale entre P_2 et P_3 plus d'une fois.

Le point P_2 ne peut donc pas être un point limite de L .

La supposition que (a_2, b_2) n'est pas un point de K nous a donc conduit à une contradiction, et on peut donc conclure que (a_2, b_2) est un point de K , ou enfin que K est une courbe fermée, d'après ce que nous avons prouvé au cas I. c. q. f. d.

8. Notre théorème étant ainsi démontré, nous ferons quelques remarques à l'égard des caractéristiques fermées.

En un point P de la caractéristique fermée K nous menons une normale à K d'une longueur suffisamment petite, pour qu'une caractéristique passant par un point de cette partie de la normale aille rencontrer encore une fois cette normale, quand t va en croissant. (En vertu du théorème I cela est toujours possible).

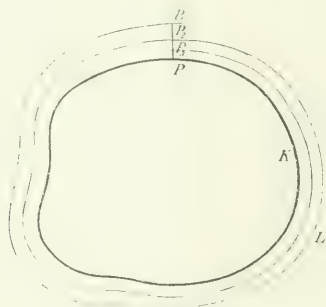


Fig. II.

Soit L (Fig. II) une caractéristique s'approchant indéfiniment de K , et supposons pour fixer les idées que L soit situé à l'extérieur de K . On s'assure alors aisément que L doit couper la dite partie de la normale un nombre infini de fois, aux points consécutifs $P_1, P_2, \dots, P_\nu, \dots$, pour les valeurs $t_1, t_2, \dots, t_\nu, \dots$ ($t_1 < t_2 < \dots < t_\nu < \dots$) de t . Les points P_ν tendront alors vers P , quand ν va en croissant, et la courbe L aura la forme d'une spirale se rapprochant de K . Envisageons maintenant une

caractéristique L' passant par un point P'_1 de la normale située entre P_1 et P_2 . On sait que L' rencontre nécessairement la normale encore une fois quand t va en croissant. Je dis que le point consécutif P'_2 , où L' rencontre la normale, est situé entre P_2 et P_3 .

D'abord il est évident qu'au point P'_1 la caractéristique L' entre à l'intérieur de la partie du plan qui est limitée par L et par la normale P_1P_2 , et comme elle ne peut plus en sortir, le point P'_2 doit être situé entre P_2 et P .

On prouve de la même manière que L , qui rencontre la normale en P_2 entre P'_1 et P'_2 , doit rencontrer cette normale en un point consécutif P_3 , situé entre P'_2 et P .

P'_2 sera donc situé entre P_2 et P_3 .

En continuant ainsi on s'assure que L' coupera la normale en des points $P'_1, P'_2, \dots, P'_\nu, \dots$ tels, que P'_ν soit situé entre P_ν et $P_{\nu+1}$. Il s'ensuit que L sera aussi une spirale se rapprochant indéfiniment de K .

Mais, en prenant un point quelconque (a, b) de L , on peut, d'après le théorème I, entourer le point (a, b) par un cercle C de rayon suffisamment petit, pour que chaque caractéristique passant par C aille rencontrer la normale entre P_1 et P . On obtient donc le corollaire suivant:

Si (a, b) est un point régulier par lequel passe une caractéristique qui pour $t = +\infty$ s'approche indéfiniment d'une caractéristique fermée K , n'aboutissant pas à un point singulier, on peut toujours entourer le point (a, b) par un cercle C de rayon suffisamment petit pour qu'une caractéristique, passant par un point quelconque de C , soit une spirale se rapprochant indéfiniment de K , quand t tend vers $+\infty$.

Observons enfin que les considérations ci-dessus exposées mettent en évidence que, si L est une spirale se rapprochant de K , quand t va vers $+\infty$, la caractéristique L ne peut pas s'approcher de K , quand t tend vers $-\infty$.

S'il existe des caractéristiques qui ont la caractéristique fermée K pour asymptote, nous dirons avec M. POINCARÉ que K est un *cycle limite*.

S'il n'existe pas de caractéristique ayant K pour asymptote et située à l'extérieur de K , les considérations développées ici mettent en évidence que, dans toute région annulaire limitée par K et par une courbe fermée

quelconque extérieure à K , il y a nécessairement une infinité de caractéristiques fermées.

De même s'il n'existe pas de caractéristique ayant K pour asymptote et située à l'intérieur de K , il y a une infinité de caractéristiques fermées situées dans toute région annulaire limitée par K et par une courbe fermée quelconque située à l'intérieur de K .

Dans le cas où X et Y sont des fonctions holomorphes, M. POINCARÉ a démontré le théorème suivant:

« Si une caractéristique fermée, qui ne passe par aucun point singulier, n'est pas un cycle limite, on peut l'entourer par une région annulaire telle que toutes les caractéristiques de cette région soient des caractéristiques fermées. »

Pour la démonstration nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de M. POINCARÉ.

9. **Théorème III.** *A l'intérieur d'une caractéristique fermée K , n'aboutissant pas à un point singulier, il existe toujours au moins un point singulier.*

Supposons en effet qu'il n'existe pas à l'intérieur de K de point singulier tel qu'une caractéristique issue d'un point régulier peut en approcher indéfiniment. Alors chaque caractéristique L passant par un point (x_0, y_0) , situé à l'intérieur de K ou bien sera fermée ou bien s'approchera indéfiniment de deux caractéristiques fermées, l'une pour $t = +\infty$, l'autre pour $t = -\infty$.

Je désignerai par $A(x_0, y_0)$ une fonction qui sera égale à l'aire renfermée par la caractéristique L , si L est fermée, mais qui sera égale ou supérieure à l'aire B renfermée par K , chaque fois que (x_0, y_0) représente un point tel que la caractéristique L n'est pas une courbe fermée.

Les quantités $A(x_0, y_0)$ auront alors une certaine limite inférieure, quand le point (x_0, y_0) prendra toutes les positions possibles à l'intérieur de K , et cette limite inférieure sera inférieure à B . Soit g cette limite inférieure, et soit (a, b) un point choisi de manière que la limite inférieure de $A(x_0, y_0)$ soit égale à g pour un entourage de (a, b) aussi petit que l'on voudra.

Je dis que le point (a, b) est nécessairement un point singulier.

En effet, s'il était régulier, par (a, b) passerait une caractéristique L' qui serait fermée ou qui aurait pour asymptotes deux caractéristiques fermées.

Dans le premier cas il existerait une caractéristique fermée située à l'intérieur de L' et pour les points (x_0, y_0) situés sur cette dernière caractéristique la fonction $A(x_0, y_0)$ prendrait évidemment une valeur inférieure à celles que l'on obtient dans le voisinage de (a, b) , ce qui est contraire à notre supposition. Dans le second cas on aurait $A(x_0, y_0) \geq B$ dans le voisinage du point (a, b) .

10. Nous étudierons à présent la nature des courbes intégrales dans le voisinage d'un point singulier, en nous bornant pourtant au cas où le point singulier P est un *point singulier isolé*, c'est à dire où on peut entourer le point P par un cercle à l'intérieur duquel ne se trouve aucun point singulier autre que P . Désignons par C une région finie du plan des x, y , à l'intérieur et sur le contour de laquelle il n'existe aucun point singulier autre que P . Nous voulons alors démontrer le théorème suivant:

Théorème IV. *L étant une caractéristique qui pour $t > t_0$ est toujours située à l'intérieur de C , les seuls cas à distinguer sont les quatre suivants:*

- 1) *L sera une caractéristique fermée entourant le point P .*
- 2) *L sera une spirale se rapprochant indéfiniment d'une telle caractéristique fermée.*
- 3) *L aboutira au point singulier P .*
- 4) *L sera une spirale se rapprochant indéfiniment d'une caractéristique fermée aboutissant au point P et pour $t = +\infty$ et pour $t = -\infty$.*

En effet, supposons d'abord que P ne soit pas un point limite de L , quand t croît vers $+\infty$. Les théorèmes II et III nous apprennent alors, que l'un des cas 1) ou 2) aura lieu.

Si au contraire P est le seul point limite de L quand t croît vers $+\infty$, c'est le cas 3) qui aura lieu.

Supposons enfin que P soit un point limite de L quand t croît vers $+\infty$, et que cette demi-caractéristique ait aussi d'autres points limites. Nous envisageons la caractéristique K passant par l'un quelconque d'entre eux, en nous bornant d'abord à la demi-caractéristique correspondant à $t > t_0$. On sait alors que tous les points de K sont des points limites de L , d'où l'on conclut que K ne peut pas sortir de C , quand t croît de t_0 vers $+\infty$. Or K ne peut pas être une courbe fermée entourant le point P , car alors L n'aurait pas P pour point limite. Et K ne pouvant non plus être une spirale se rapprochant d'une telle caractéristique fermée, par la même raison, il faut que K ait P pour point limite.

Supposons que K ait aussi pour point limite un point Q différent de P , et menons en Q la normale à la caractéristique passant par Q . On prouve alors de la même manière qu'au théorème II, que la demi-caractéristique K , correspondant à $t > t_0$, qui ne peut évidemment pas être une caractéristique fermée, doit rencontrer cette normale en trois points consécutifs P_1, P_2, P_3 , très voisins de Q , et tels que P_2 soit situé entre P_1 et P_3 . D'où l'on conclut enfin que P_2 ne peut pas être un point limite de L , cette courbe ne pouvant traverser la normale plus d'une fois ni entre P_1 et P_3 , ni entre P_2 et P_3 .

Il est donc impossible que K ait un autre point limite que P , quand t va en croissant.

Envisageons maintenant la demi-caractéristique K correspondant à $t < t_0$. On s'assure aisément que tous les points de cette demi-caractéristique sont aussi des points limites de L , quand t va en croissant. Soit en effet Q_1 un point de la dite demi-caractéristique, et $t_0 - T$ la valeur correspondante de t (la valeur t_0 correspondant au point Q_0). Si L passe dans le voisinage de Q_0 pour les valeurs $t_1, t_2, \dots, t_\nu \dots$ ($t_1 < t_2 < \dots$, $\lim t_\nu = \infty$) le théorème I fait voir que L passe dans le voisinage de Q_1 pour les valeurs $t_1 - T, t_2 - T, \dots$. Cela posé, on démontre de la même manière pour cette demi-caractéristique que pour l'autre, qu'elle a le point P pour seul point limite. La caractéristique K étant donc une courbe fermée, on prouve comme à la page 14, que L est une spirale se rapprochant de K .

Observons enfin qu'il est nécessaire dans ce cas que L soit situé à l'extérieur de K , car autrement la partie de L correspondant à $t < t_0$ nous donnerait une demi-caractéristique, située à l'intérieur de K , et n'ayant pas le point P pour point limite, ce qui est impossible en vertu des théorèmes II et III.

Notre théorème est ainsi démontré.

11. A l'égard des caractéristiques fermées, aboutissant au même point singulier, et pour $t = +\infty$, et pour $t = -\infty$, nous ferons la remarque suivante.

Si L est une caractéristique fermée aboutissant au point singulier P pour $t = +\infty$ ainsi que pour $t = -\infty$, et ne comprenant à son intérieur aucun point singulier, par chaque point du plan des x, y , situé à l'intérieur de L , passe une caractéristique fermée aboutissant à P , et pour $t = +\infty$, et pour $t = -\infty$.

Une demi-caractéristique passant par un tel point est en effet toujours située à l'intérieur de L , et doit alors être telle que nous l'avons énoncé au théorème IV. Mais les cas 1), 2), 4) sont évidemment exclus, ce qui fait voir que la demi-caractéristique doit aboutir à P .

Nous désignerons par le nom de « *région nodale fermée* » appartenant à P une pareille région du plan des x, y , où toutes les caractéristiques sont des courbes fermées aboutissant à P pour $t = +\infty$ ainsi que pour $t = -\infty$.

12. Nous démontrerons à présent un théorème très important.

Théorème V. *Soient L et L' deux caractéristiques aboutissant au point singulier isolé P , et telles qu'il n'existe pas de caractéristique aboutissant à P qui soit située entre L et L' . Soit Q un point de L et Q' un point de L' ; entourons Q' d'un cercle C' de rayon aussi petit que l'on voudra. On peut alors entourer Q d'un cercle C de rayon suffisamment petit pour que chaque caractéristique passant par un point de C , situé entre L et L' , traverse la partie de C' qui est située entre L et L' .*

A cause du théorème I, il nous suffit de démontrer notre théorème pour des points Q et Q' situés dans le voisinage de P . Nous supposons donc que ces deux points sont situés à l'intérieur d'un cercle C où n'existe aucun point singulier autre que P .

Menons en Q une normale QN à L , et en Q' une normale $Q'N'$ à L' , et prenons ces normales suffisamment petites pour que chaque caractéristique, passant par un point de QN ou de $Q'N'$, passe du côté négatif au côté positif de la normale, quand t va en croissant.

Joignons enfin N et N' par une courbe NN' , située toute entière à l'intérieur de \bar{C} (Fig. III).

Désignons par B la région du plan limitée par la courbe fermée $PQNN'Q'P$, et supposons, pour fixer les idées, que la caractéristique L aboutisse à P , quand t tend vers $+\infty$.

Envisageons maintenant une caractéristique L_1 passant par un point quelconque de QN . Cette caractéristique entre à l'intérieur de B au point P_1 , quand t va en croissant. Je dis qu'elle finira par sortir de B en un point P'_1 , situé sur la courbe $P_1NN'Q'$.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, L_1 resterait toujours à l'intérieur de B , quand t va en croissant, et le théorème IV serait alors applicable. Mais

les cas 1) et 2) sont évidemment exclus, car s'il existait une courbe intégrale fermée entourant le point P , cette courbe devrait rencontrer les courbes L et L' , et on aurait alors des points singuliers autres que P à l'intérieur de \bar{C} .

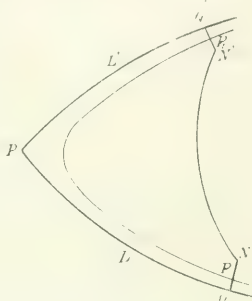


Fig. III.

Le cas 3 est exclu à cause de notre supposition concernant les courbes L et L' .

Le cas 4 est aussi exclu, car dans ce cas L_1 serait une spirale entourant le point P , et cette spirale rencontrerait les courbes L et L' à l'intérieur de \bar{C} .

Mais tous les cas du théorème IV étant exclus, il est nécessaire que L_1 sorte de B quand t va en croissant. Nous désignerons par P'_1 le premier point où L_1 traverse le contour $P_1NN'Q'$.

Lorsque P_1 s'approche de Q , le point P'_1 s'éloigne de plus en plus de P_1 sur le contour de B . Il s'ensuit que le point P'_1 s'approche de plus en plus d'un point déterminé S , quand P_1 tend vers Q . Je dis maintenant que ce point S coïncide avec Q' .

Envisageons, en effet, la caractéristique K passant par le point S pour $t = t_0$, et supposons en outre que S soit différent de Q' .

Quand t décroît à partir de t_0 , K ne peut pas être situé à l'extérieur de B , car une caractéristique passant par un point du contour P_1NS suffisamment voisin de S sortirait alors de B quand t va en décroissant, au lieu d'en sortir quand t va en croissant, comme nous l'avons démontré. La caractéristique K est donc située à l'intérieur de B pour des valeurs de $t < t_0$, voisines de t_0 , et, de même que L_1 , et pour la même raison, elle doit évidemment sortir de B , cette fois quand t va en décroissant.

Soit S' le point où la courbe K sort de B . Il est évident que S' est situé entre S et Q' . Mais les caractéristiques passant par des points voisins de S , et situés entre Q et S , sortiraient alors de B entre S et Q' , quand t va en décroissant, au lieu d'en sortir entre P_1 et Q , comme nous l'avons supposé.

Il est donc nécessaire que le point P_1 tende de plus en plus vers Q' , quand P_1 tend vers Q , ce qui établit notre théorème.

13. A cause de la propriété ainsi démontrée des deux demi-caractéristiques L et L' , nous n'arrêterons pas la caractéristique L en P , mais nous regarderons L' comme le prolongement de L , c'est à dire nous regarderons les deux caractéristiques L , L' comme une seule courbe, et nous dirons qu'une pareille caractéristique (LL') traverse le point singulier P . Observons de plus que la démonstration donnée nous permet de dire: Si (LL') traverse le point singulier, l'une des demi-caractéristiques L et L' aboutira à P quand t va en croissant, l'autre quand t va en décroissant.

On doit observer enfin que la même caractéristique L peut donner naissance à deux caractéristiques LL' et LL'' traversant le point singulier P , si L' et L'' sont des caractéristiques situées, l'une à gauche, l'autre à droite de L . C'est ainsi qu'un col est traversé par 4 caractéristiques à savoir (LL'), ($L'L_1$), (L_1L), ($L'L$) (Fig. IV).



Fig. IV.

14. Mais il y a aussi un autre cas, où de deux caractéristiques L et L' , aboutissant à un point singulier, l'une doit être regardée comme le prolongement de l'autre.

Soient en effet Q un point de L et Q' un point de L' . Supposons qu'il soit possible de joindre Q et Q' par une courbe C telle qu'il n'y ait

pas de point singulier à l'intérieur de la courbe fermée $PQQ'P$, et qu'aucune caractéristique passant par un point quelconque de C n'aboutisse à P . Les caractéristiques entrant à l'intérieur de $PQQ'P$ en un point voisin de Q , sortiraient alors de cette région du plan en un point voisin de Q' , ce que l'on établit exactement de la même manière que pour le théorème V, et nous regarderons alors la courbe L' comme le prolongement de L , bien qu'il puisse exister aussi des caractéristiques aboutissant à P et situées entre L et L' .

En effet il peut très bien se faire qu'il y ait une ou plusieurs régions nodales fermées situées entre L et L' , comme le met en évidence la Fig. V.

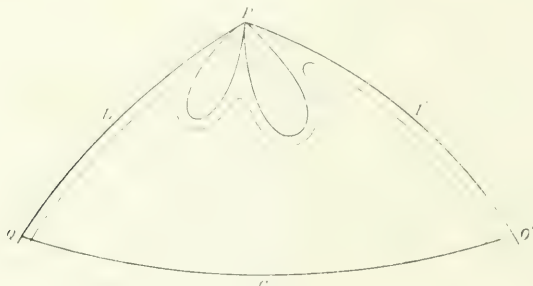


Fig. V.

Si le nombre de ces régions nodales fermées est fini, il est évident qu'il existe toujours une certaine caractéristique L'' située entre L et L' et telle que LL'' soit une caractéristique traversant le point singulier P . C'est ce qui aura lieu dans le cas où les fonctions X et Y de l'équation (1) sont des fonctions holomorphes dans le voisinage de P , comme nous le prouverons dans le chapitre suivant.

Mais dans le cas général il faut compter avec l'éventualité d'un nombre infini de régions nodales fermées situées entre L et L' , et alors il pourrait bien se faire qu'il n'y eût pas de caractéristique L'' , située entre L et L' , et telle que (L, L'') traversât le point P .

Dans ce cas on peut regarder le prolongement L' de L comme dépendant du contour C , de sorte que l'on obtient une infinité de diffé-

rents prolongements L' , en déformant la courbe C , de manière à lui faire traverser les régions nodales en question.

15. Envisageons maintenant une caractéristique L aboutissant à P , et soit C un contour fermé coupant la caractéristique L , entourant P , et à l'intérieur duquel ne se trouve aucun point singulier autre que P . Soit Q le dernier point de rencontre entre L et C . Les seuls cas à distinguer alors sont les deux suivants:

- 1) *Il existe une demi-caractéristique L' passant par un point de C et aboutissant à P qui est toujours situé à l'intérieur de C et qui est telle que par aucun point de C , situé entre L et L' , il ne passe aucune demi-caractéristique aboutissant à P et étant toujours située à l'intérieur de C . La courbe L' est donc le prolongement de L par rapport à C .*
- 2) *On peut entourer le point Q par un cercle suffisamment petit pour que la caractéristique passant par un point quelconque de ce cercle aboutisse au point P .*

Nous dirons dans ce dernier cas que L s'arrête ou finit en P .

Supposons en effet pour fixer les idées que L aboutisse à P pour $t = +\infty$, et soit \bar{Q} un point de L situé entre Q et P . Menons en \bar{Q} une normale $Q_1\bar{Q}Q_2$ à L , Q_1 étant situé d'un côté de L et Q_2 de l'autre côté. Nous supposons en outre que les points Q_1 et Q_2 soient choisis de telle manière que chaque caractéristique passant par Q_1Q_2 passe du côté négatif de la normale au côté positif quand t va en croissant.

Envisageons maintenant les caractéristiques passant par les points de $\bar{Q}Q_1$, et supposons d'abord qu'il existe un point P_1 de $\bar{Q}Q_1$ par lequel passe une demi-caractéristique L_1 aboutissant à P et située tout entière à l'intérieur de C . On s'assure alors aisément que L_1 ne peut pas couper $\bar{Q}Q_1$ encore une fois en un point P_2 , car dans la région du plan limitée par la normale P_1P_2 et la partie de L_1 située entre P_1 et P_2 serait alors situé un point singulier.

En vertu du théorème IV il est alors évident que toute demi-caractéristique passant par un point quelconque de $\bar{Q}P_1$ et correspondant à des valeurs croissantes de t doit aboutir à P , car ne pouvant pas traverser la normale $P_1\bar{Q}$ du côté positif au côté négatif elle doit toujours être située dans la partie du plan limitée par L , par L_1 et par la normale $P_1\bar{Q}$.

Supposons maintenant qu'il n'existe entre \bar{Q} et Q_1 aucun point de la normale par lequel passe une demi-caractéristique aboutissant à P et située tout entière à l'intérieur de C . Soit alors P_1 un point quelconque de la normale $\bar{Q}Q_1$, le théorème IV nous apprend que la caractéristique L_1 passant par P_1 doit nécessairement sortir de la région limitée par C , quand t va en croissant.

Soit P_1 le point de C où cela a lieu, on s'assure de la même manière qu'au théorème N que P_1 tend vers un point déterminé S , quand P_1 tend vers \bar{Q} .

Il est d'ailleurs évident que L_1 doit sortir de la région limitée par C , aussi pour t décroissant.

Par aucun point de C situé entre Q et S ne peut alors passer une demi-caractéristique aboutissant à P et située tout entière à l'intérieur de C . En effet si L_2 était une pareille caractéristique, toutes les caractéristiques passant par des points de la normale situés entre \bar{Q} et Q_1 seraient situées dans la partie du plan limité par L , par L_1 et par C et aucune d'entre elles ne pourrait sortir de la région limitée par C dans le voisinage de S .

Envisageons maintenant la demi-caractéristique L' passant par S et correspondant à des valeurs décroissantes de t ; nous voulons prouver que L' aboutit à P .

Entourons à cet effet S par un cercle B suffisamment petit pour que B ne coupe pas la normale $\bar{Q}Q_1$ entre \bar{Q} et Q_1 , et envisageons la partie de L' qui est située à l'intérieur de B . Je dis que cette partie de L' ne passe par aucun point situé à l'extérieur de C .

En effet, si S' était un point de L' situé à l'extérieur de C et tel que la partie SS' de L était tout entière située à l'intérieur de B , les demi-caractéristiques correspondant à des valeurs décroissantes de t et passant par des points très voisins de S sortiraient toutes de la région limitée par C , avant d'avoir atteint le contour B , et il n'y aurait alors aucune caractéristique L_1 passant par un point P'_1 voisin de S qui couperait la normale $\bar{Q}Q_1$ en P_1 avant de sortir de C quand t va en décroissant.

L' est donc situé à l'intérieur de C dans le voisinage de S , et on établit aisément que L' ne peut jamais sortir de la région limitée par C .

En effet L' ne peut pas couper la normale $\bar{Q}Q_1$ avant de sortir de cette région. Si L' sortait donc de la dite région en S' , une demi-carac-

téristique passant par un point quelconque très voisin de S et correspondant à $t < t_0$ sortirait donc aussi de la région limitée par C dans le voisinage de S' sans avoir rencontré la normale entre \bar{Q} et Q_1 , ce qui est contraire à notre hypothèse.

Or L' étant par conséquent toujours situé à l'intérieur de C , le théorème IV nous apprend que L' aboutit à P , ce qui fait voir que L' est le prolongement de L .

En appliquant le même raisonnement aux points de $\bar{Q}Q_2$, on s'assure que le seul cas où il n'existe pas de prolongement de L sera quand il existe et sur $\bar{Q}Q_1$, et sur $\bar{Q}Q_2$, des points par lesquels passent des caractéristiques aboutissant à P , et il est alors évident que l'on peut entourer \bar{Q} par un cercle tel que par chaque point de ce cercle passe une caractéristique aboutissant à P . Par conséquent on peut aussi entourer Q par un cercle jouissant de la même propriété. c. q. f. d.

16. Nous désignerons dorénavant par le nom de *région nodale* appartenant au point singulier P , une pareille région du plan où toutes les caractéristiques aboutissent à P . Quand les caractéristiques d'une région nodale n'aboutissent à P que pour $t = +\infty$ (ou $t = -\infty$), nous dirons qu'elle est ouverte. Envisageons maintenant un point singulier isolé P , que nous entourerons par une courbe fermée C , ne comprenant à son intérieur aucun point singulier autre que P .

Je dis qu'il n'existe qu'un nombre fini de caractéristiques coupant C et aboutissant à P d'une manière telle qu'elles aient des prolongements par rapport à C .

Supposons en effet qu'il y ait un nombre infini de pareilles caractéristiques qui puissent être prolongées par rapport à C . On peut alors supposer que celles qui aboutissent à P , quand t va en croissant, sont en nombre infini. Désignons-les par $L_1, L_2, \dots, L_\nu, \dots$.

Si L_ν aboutissait à P , comme nous l'avons supposé, il existerait un point P_ν qui serait le dernier point où L_ν rencontrerait C , quand t va en croissant, de sorte que L_ν serait toujours situé à l'intérieur de C entre P_ν et P .

Les points $P_1, P_2, \dots, P_\nu, \dots$ auraient alors au moins un point limite P'' situé sur C . Il est alors évident que la caractéristique L' , passant par P'' , aboutirait à P quand t va en croissant. En effet, s'il n'en était pas ainsi,

la courbe L' sortirait de C quand t va en croissant, et on en concluerait que les caractéristiques passant par des points très voisins de P' , en sortiraient aussi quand t va en croissant. Mais en prenant des valeurs convenables de ν , suffisamment grandes, on pourrait faire en sorte que les points P_ν correspondants fussent situés aussi près de P' que l'on voudra. On en conclut donc qu'il existerait des courbes L_ν qui ne resteraient pas à l'intérieur de C entre P_ν et P , ce qui est contraire à notre hypothèse.

On conclut de cela que L' doit nécessairement aboutir à P , ainsi que L_ν . En prenant alors P_ν suffisamment voisin de P' , le théorème que nous venons de démontrer met en évidence, que toute la région du plan, comprise entre L' , L_ν et C , formerait une seule région nodale, où toutes les caractéristiques s'arrêteraient en P , ce qui est contraire à notre supposition qu'il passe dans le voisinage de P' une infinité de caractéristiques L_ν qui peuvent être prolongées par rapport à C .

Nous sommes ainsi parvenus à une contradiction en supposant qu'il existe une infinité de courbes telles que L_ν . c. q. f. d.

17. A l'égard des points singuliers isolés nous distinguerons les deux classes suivantes.

Il peut arriver, qu'ayant entouré le point singulier par un cercle C de rayon aussi petit que l'on voudra, il existe toujours à l'intérieur de C une infinité de caractéristiques fermées entourant P .

Dans ce cas nous dirons que le point singulier est un *Centre*.¹

Mais il peut évidemment aussi arriver qu'il y ait des caractéristiques aboutissant au point singulier. Nous prouverons dans le théorème suivant que ce sont les deux seuls cas à distinguer.

Théorème VI. *Si le point singulier isolé P n'est pas un centre, il existe toujours au moins une caractéristique aboutissant à P . Ayant entouré un pareil point singulier par une courbe fermée C , ne comprenant à son intérieur aucun point singulier autre que P , il n'existe qu'un nombre fini de*

¹ On doit observer que cette définition diffère de celle de M. POINCARÉ. Dans le cas étudié par l'illustre géomètre le centre est en effet toujours tel que toutes les caractéristiques qui passent par des points suffisamment voisins du point singulier sont des caractéristiques fermées. Comparer les travaux cités de M. POINCARÉ.

caractéristiques coupant C et aboutissant à P de manière qu'elles puissent être prolongées par rapport à C .

En effet, soit P un point singulier qui n'est pas un centre; entourons P par une courbe fermée C , à l'intérieur de laquelle ne se trouve aucun point singulier autre que P , ni aucune caractéristique fermée entourant P . Soient C' un cercle ayant P pour centre et situé à l'intérieur de C , Q un point quelconque du contour de C' , et L la caractéristique passant par Q .

Nous voulons d'abord prouver qu'il existe au moins une caractéristique aboutissant à P .

Si L reste à l'intérieur de C , soit quand t va en croissant, soit quand t va en décroissant, le théorème IV nous fait voir qu'il existe une caractéristique aboutissant à P , car les cas 1) et 2) sont exclus, à cause de notre supposition qu'il n'existe pas à l'intérieur de C de caractéristique fermée entourant l'origine.

Désignons maintenant par ρ la distance minima de P à la partie de L comprise à l'intérieur de C .

Quand Q parcourt le contour C' , les valeurs de ρ auront une limite inférieure, laquelle nous désignerons par g . Il existe alors sur le contour de C' au moins un point Q' tel que la limite inférieure de ρ soit égale à g pour les caractéristiques passant par les points situés dans le voisinage de Q' . Si L' désigne la caractéristique passant par Q' , il ne peut pas arriver que L' sort de C , et quand t va en croissant, et quand t va en décroissant. En effet s'il en était ainsi, le théorème I nous apprend que la distance minima de P à L' ne pourrait être plus grande que g . Or on s'assure de la même manière que cette distance minima ne peut pas être égale à g , car par un point très voisin de L' , et situé entre P et L' , passerait alors une caractéristique qui sortirait de C et, quand t va en croissant, et quand t va en décroissant. La distance minima de cette caractéristique à P serait évidemment $< g$, ce qui est impossible, g étant par supposition la limite inférieure de ρ . Or si l'une des demi-caractéristiques passant par Q' reste toujours à l'intérieur de C , le théorème IV fait voir qu'il existe toujours au moins une caractéristique aboutissant à P .

c. q. f. d.

Quant à la seconde partie du théorème, nous l'avons déjà démontrée. Supposons maintenant qu'il existe une caractéristique isolée aboutissant

à P pour $t = +\infty$. Il n'est pas difficile de s'assurer qu'il en existe alors aussi une, aboutissant à P pour $t = -\infty$.

En effet s'il n'y avait que la seule demi-caractéristique L aboutissant à P , on prouverait de la même manière qu'au théorème V, qu'une caractéristique passant par un point très voisin de L entre en C par un point situé d'un côté de L et sort de cette aire par un point très voisin, situé de l'autre côté de L . Mais il s'en suivrait que les caractéristiques passant d'un côté de L traverseraient une normale à cette courbe du côté positif au côté négatif, et celles situées de l'autre côté traverseraient la même normale du côté négatif au côté positif, ce qui est impossible.

Le nombre de caractéristiques aboutissant à P sera donc supérieur ou égal à deux.

18. Observons enfin que, *s'il n'existe qu'un nombre fini m de caractéristiques aboutissant à un point singulier P , le nombre m est un nombre pair, et il existe autant de caractéristiques aboutissant à P pour $t = +\infty$ que pour $t = -\infty$.*

Soient en effet L_1, L_2, \dots, L_m les caractéristiques aboutissant à P , rangées de telle manière que $(L_\nu, L_{\nu+1})$ traverse P , pour $\nu = 1, 2, \dots, m$ (L_{m+1} étant identique à L_1), et supposons, pour fixer les idées, que L_1 aboutisse à P pour $t = +\infty$.

Il s'ensuit que L_2 aboutira à P pour $t = -\infty$, que L_3 aboutira à P pour $t = +\infty$, et ainsi de suite.

Si m était un nombre impair, $L_{m+1} = L_1$ devrait donc aboutir à P pour $t = -\infty$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Dans le cas, où il n'existe pas plus de deux caractéristiques aboutissant au point singulier, celui-ci peut être assimilé à un point régulier, car il n'existe alors qu'une seule caractéristique passant par ce point, de même que pour les points réguliers. L'origine par exemple est un tel point pour l'équation

$$x^{n+2} \frac{dy}{dx} = ax^2 + by^2; \quad \begin{array}{l} a > 0; \\ b > 0; \end{array}$$

car il n'existe aucune caractéristique autre que $x = 0$, qui aboutit à l'origine.¹

¹ Voir mon mémoire *Sur les points singuliers des équations différentielles*, Öfversigt af K. Kongl. Vet. Akad. Förel. 1898, page 186.

Si l'on veut étudier les caractéristiques dans le voisinage d'un point singulier P , on doit donc entourer P par un contour C ne contenant à son intérieur aucun point singulier autre que P . Il faudra avant tout déterminer les courbes intégrales passant par des points de C et aboutissant à P d'une manière telle qu'elles puissent être prolongées par rapport à C . Ces courbes une fois déterminées, limiteront un certain nombre de régions nodales, à l'intérieur desquelles chaque caractéristique finit en P . Une caractéristique qui n'appartient pas à l'une de ces régions nodales, traversera toujours la courbe fermée.

S'il n'existe pas de caractéristique qui puisse être prolongée au delà de P , le point P sera un Noeud ou un Centre.

19. Nous voulons maintenant prouver le théorème suivant.

Théorème VII. *Si une demi-caractéristique L , convenablement prolongée par rapport aux points singuliers auxquels elle aboutit, est toujours située à l'intérieur d'une région finie A ne renfermant qu'un nombre fini m de points singuliers, l'un des trois cas suivants aura lieu: La caractéristique sera ou une courbe fermée, ou elle s'approchera indéfiniment d'une courbe fermée, (qui sera composée d'une caractéristique et de ses prolongements) ou enfin elle s'arrêtera en un point singulier.*

Soient en effet P_1, P_2, \dots, P_m les points singuliers. Entourons chacun de ces points P_v par un cercle C_v , à l'intérieur duquel ne se trouve d'autre point singulier que P_v , tous les cercles C_v étant en outre situés l'un à l'extérieur de l'autre, et envisageons une caractéristique L passant par un point P de A , situé à l'extérieur de tous les C_v .

Supposons de plus que L ne finisse pas en un point singulier, quand t croît vers $+\infty$. Si alors L n'a aucun des points P_v pour point limite quand t croît vers $+\infty$, le théorème se réduit au théorème II. Si L a un seul des points P_v pour point limite, le théorème se réduit ou au théorème IV ou il existe un point limite de L , situé à l'extérieur de tous les C_v ; nous traiterons ce cas tout à l'heure.

Supposons enfin que L ait P_1, P_2, \dots, P_r pour points limites. Il s'ensuit que L a un point limite Q , situé à l'extérieur de tous les C_v . Soit K la caractéristique passant par Q . On prouve alors aisément que K doit nécessairement aboutir à un point singulier, car s'il n'en était

pas ainsi, le même raisonnement qu'au théorème II mettrait en évidence que K serait une courbe fermée n'aboutissant pas à un point singulier, et L ne pourrait avoir alors pour point limite un point singulier.

Or K ne peut pas finir en un point singulier, sans que L y finisse aussi. Si K aboutit à P_v , cette courbe doit donc pouvoir être prolongée au delà de P_v . Soit K_1 le prolongement de K par rapport à C_v , il est évident que tous les points de K_1 sont des points limites de L . Si au contraire K a deux prolongements K_1 et K'_1 par rapport à C_v dont l'un sera situé à gauche, l'autre à droite de K , l'une de ces caractéristiques sera alors telle que tous ses points seront des points limites de L . En prenant cette caractéristique K_1 pour prolongement de K , on s'assure de la même manière que pour K , que K_1 ira à un point singulier P_v au delà duquel cette caractéristique pourra être prolongée par une courbe K_2 qui sortira de C_v . En continuant ainsi on reviendra toujours finalement à la première caractéristique K , car il n'existe qu'un nombre fini de caractéristiques aboutissant aux points singuliers de telle manière qu'elles puissent être prolongées en dehors des cercles C_v . On en conclut enfin que la courbe limite ainsi décrite est une courbe fermée; composée d'une caractéristique et de ses prolongements.

c. q. f. d.

CHAPITRE II.

Théorèmes généraux relatifs au cas où X et Y sont des fonctions holomorphes.

20. Nous supposons toujours dans les chapitres suivants que X et Y sont des fonctions holomorphes dans le voisinage de chaque point de A , et qu'elles ne possèdent pas de diviseur commun. On sait qu'alors chaque point singulier est un point singulier isolé, et tous les théorèmes du chapitre I ont alors lieu.

Supposons que le point $x = 0$, $y = 0$ soit le point singulier que nous voulons étudier. Il est évident alors que l'on peut toujours supposer que les termes de la plus petite dimension dans les développements de X et de Y en série de TAYLOR sont de même ordre m . En effet, s'il n'en

était pas ainsi, on pourrait toujours à l'aide d'une substitution linéaire convenable faire en sorte que cela ait lieu.

Écrivons donc nos équations différentielles de la manière suivante:

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X_m + X_{m+1}, \\ \frac{dy}{dt} &= Y_m + Y_{m+1}, \end{aligned}$$

X_m et Y_m désignant des polynômes en x et en y de dimension m , et X_{m+1} , Y_{m+1} désignant des séries de TAYLOR ne contenant que des termes de dimension plus grande que m , et convergentes pour $|x| \leq \delta$, $|y| \leq \delta$. Nous supposerons en outre que δ soit suffisamment petit pour que le point $x = 0$, $y = 0$, soit le seul point singulier du système, situé à l'intérieur du cercle C , $x^2 + y^2 \leq \delta^2$.

21. Je veux d'abord démontrer le théorème suivant:

Théorème VIII. *Le système d'équations différentielles (6) possède au plus $2m$ régions nodales fermées aboutissant à l'origine.*

Envisageons en effet une caractéristique L appartenant à une région nodale fermée, et soit

$$x = x(t); \quad y = y(t);$$

l'équation de cette caractéristique.

Comme $x(t)$ s'annule pour $t = +\infty$, ainsi que pour $t = -\infty$, cette fonction atteindra nécessairement sa valeur maxima pour une certaine valeur t_1 de t , pour laquelle on aura

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

C'est à dire qu'il existe sur L un point tel que l'on ait

$$(7) \quad X_m + X_{m+1} = 0.$$

On en conclut que l'une des courbes satisfaisant à l'équation (7) traverse la région nodale en question.

Or on sait qu'il existe au plus $2m$ branches de courbes satisfaisant à

(7) et aboutissant à l'origine, ce qui met en évidence que le nombre de régions nodales fermées est égale au plus à $2m$. c. q. f. d.

On peut tirer de ce théorème la conséquence suivante:

Si L est une caractéristique aboutissant à l'origine et qui peut être prolongée au delà de l'origine, il existe nécessairement une caractéristique L' aboutissant à l'origine et telle que (L, L') soit une caractéristique traversant l'origine.

Dans le cas où X et Y sont des fonctions holomorphes, nous pouvons donc affirmer qu'une caractéristique aboutissant à un point singulier P , ou bien finit en P , ou bien traverse P .

22. Revenons maintenant au système d'équations (6); nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Théorème IX. *Le système d'équations différentielles (6) possède au plus $2(m+1)$ caractéristiques traversant l'origine.*

Soit en effet (LL') une pareille caractéristique, et envisageons la caractéristique K passant par un point (x_0, y_0) très voisin de L et situé entre L et L' . Un point de cette caractéristique entrera alors en C pour une certaine valeur t_1 de t et en sortira pour une autre valeur t_2 de cette variable. On en conclut que la fonction

$$ax^2 + by^2, \quad a > 0; \quad b > 0;$$

prendra une valeur minima à l'intérieur de C , quand le point parcourt la caractéristique K . Il existe donc sur une pareille caractéristique K au moins un point satisfaisant à

$$axX_m + byY_m + axX_{m+1} + byY_{m+1} = 0,$$

et on en conclut, de la même manière qu'au théorème VIII, que le nombre de caractéristiques traversant l'origine est égal au plus à $2(m+1)$. En général il suffit de prendre $a = b = 1$, mais pour le cas où $xX_m + yY_m$ s'annule identiquement on doit donner à ces quantités d'autres valeurs convenables.

c. q. f. d.

Il n'est pas difficile de s'assurer qu'il existe des cas où le nombre des caractéristiques traversant l'origine est égal à $2(m+1)$. Cela sera par exemple le cas, si l'origine est un *Col*.

Si X et Y sont des fonctions holomorphes, un point singulier sera donc traversé par un certain nombre c de caractéristiques, qui limiteront un certain nombre n de régions nodales.

Pour l'étude des points singuliers, il nous sera d'abord nécessaire de déterminer ces deux nombres c et n .

Si $c = 0$, chaque caractéristique qui aboutit au point singulier s'y arrêtera. Si au contraire $n = 0$, chaque caractéristique qui aboutit au point singulier traversera ce point.

Quant aux régions nodales nous aurons à distinguer les *régions nodales fermées* des *régions nodales ouvertes*. On doit observer enfin qu'une région nodale peut être composée de plusieurs régions nodales fermées et d'un certain nombre de régions nodales ouvertes. On établit aisément à l'égard de ces régions nodales les résultats suivants:

Une région nodale fermée appartenant au point singulier P , sera limitée par une caractéristique L qui traverse un point singulier.

En effet, si L ne traverse aucun point singulier, cette courbe doit finir en P pour $t = +\infty$, ainsi que pour $t = -\infty$, et les courbes voisines y finissant aussi, il est évident que L serait situé à l'intérieur de la région nodale fermée.

En général les demi-caractéristiques L_+ et L_- dont L est composé traverseront toutes les deux P . Mais si l'une d'entre elles, par exemple L_+ , finit en P , L traversera nécessairement P ou un autre point singulier P_1 , et on aura alors une région nodale, limitée par L_+ et située à l'extérieur de la région nodale fermée que nous avons envisagée. Cette nouvelle région nodale peut évidemment être ou une région nodale fermée ou une région nodale ouverte.

On établit de la même manière le résultat suivant:

Une caractéristique, limitant une région nodale ouverte appartenant à P , traversera toujours un point singulier.

En effet il est évident qu'une pareille caractéristique sera ou une courbe intégrale qui traverse P , ou une caractéristique limitant une région nodale fermée.

23. Nous voulons maintenant démontrer le théorème suivant.

Théorème X. *Une caractéristique du système d'équations différentielles (6), aboutissant à l'origine, sera une spirale se rapprochant indéfiniment de l'origine, ou bien elle aura à l'origine une tangente déterminée satisfaisant à l'équation¹*

$$(8) \quad xY_m - yX_m = 0.$$

Deux cas seront ici à distinguer, suivant que le membre gauche de l'équation (8) s'annule identiquement ou non.

Dans le second cas, les seules tangentes à l'origine possibles seront données par l'équation (8). Dans le premier cas au contraire, à chaque demi-droite tirée de l'origine correspond en général une et une seule caractéristique qui parvient à l'origine de telle manière qu'elle y est tangente à cette demi-droite.

1) Supposons d'abord que l'équation (8) ne soit pas identiquement satisfaite et faisons la substitution

$$x = \rho \cos \theta; \quad y = \rho \sin \theta;$$

On obtient alors

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{d\rho}{dt_1} &= \rho [\cos \theta X_m(\cos \theta, \sin \theta) + \sin \theta Y_m(\cos \theta, \sin \theta) + \rho \bar{X}(\rho, \cos \theta, \sin \theta)], \\ \frac{d\theta}{dt_1} &= \cos \theta Y_m(\cos \theta, \sin \theta) - \sin \theta X_m(\cos \theta, \sin \theta) + \rho \bar{Y}(\rho, \cos \theta, \sin \theta) \end{aligned}$$

où \bar{X} et \bar{Y} sont des fonctions développables en séries de TAYLOR pour tout système de valeurs ρ, θ , telles que

$$0 \leq \rho \leq \delta, \quad -\infty < \theta < +\infty,$$

et où t_1 désigne une variable auxiliaire telle que $\frac{dt_1}{dt} = \rho^{m-1}$.

Soit maintenant L une caractéristique du système (6) aboutissant à l'origine, quand t tend vers $+\infty$, on peut alors toujours déterminer un nombre positif m tel que le point, parcourant la courbe L , reste à l'intérieur de C , tant que $t > m$.

¹ J'ai donné une démonstration de ce théorème dans le dernier de mes mémoires: *Sur les points singuliers des équations différentielles*. Öfversigt af Kongl. Vet. Akad. Förh. 1898.

A la courbe L du plan des x, y correspond alors une caractéristique L_1 du plan des ρ, θ , satisfaisant aux équations (9), et telle que L_1 reste toujours entre les deux droites

$$\rho = 0, \quad \text{et} \quad \rho = \delta,$$

tant que $t_1 > m_1$, où m_1 est la valeur de t_1 correspondant à la valeur m de t . Observons de plus que la première des équations (9) nous montre que $t_1 = \infty$, quand $\rho = 0$; d'où l'on conclut que t_1 tend vers l'infini en même temps que t .

Donc t_1 tendant vers l'infini, L_1 tendra vers un ou plusieurs points limites. La seconde hypothèse n'est pas admissible. En effet, supposons que les points $\rho = 0; \theta = a$; et $\rho = 0; \theta = b > a$; soient de tels points limites de L_1 , et envisageons un point $\rho = 0; \theta = \alpha$; de l'intervalle $a \dots b$ qui ne soit pas un point singulier. Supposons pour fixer les idées que

$$\cos \alpha Y_m(\cos \alpha, \sin \alpha) - \sin \alpha X_m(\cos \alpha, \sin \alpha) > 0$$

et assujettissons en outre la quantité δ à la condition

$$\frac{d\theta}{dt_1} > 0 \quad \text{pour} \quad \theta = \alpha, \quad \text{tant que} \quad |\rho| \leq \delta.$$

L'inégalité $\frac{d\theta}{dt_1} > 0$ nous apprend alors que la courbe L_1 ne peut entre les droites $\rho = \delta$ et $\rho = 0$, traverser la droite $\theta = \alpha$ plus d'une fois, car elle doit toujours traverser cette droite du côté du plan des ρ, θ , où $\theta < \alpha$ au côté où $\theta > \alpha$, quand t_1 va en croissant, et les deux points a, b ne peuvent donc pas être des points limites de L_1 .

Il y a donc un seul point limite qui est ou bien l'infini, ou bien un point singulier $\rho = 0, \theta = \beta$.

Dans le premier cas L sera une spirale, dans le second L aboutira à l'origine avec la tangente déterminée

$$y \cos \beta - x \sin \beta = 0,$$

satisfaisant à l'équation (8).

2) Si au contraire l'équation (8) est identiquement satisfaite, on aura

$$x Y_m = y X_m = xy Q_{m-1},$$

Q_{m-1} désignant un polynôme en x et en y de dimension $m - 1$.

La substitution

$$x = \rho \cos \theta; \quad y = \rho \sin \theta;$$

nous donne alors

$$(9') \quad \begin{aligned} \frac{d\rho}{dt_1} &= Q_{m-1}(\cos \theta, \sin \theta) + \rho \bar{X}(\rho, \cos \theta, \sin \theta), \\ \frac{d\theta}{dt_1} &= \rho^r [Z_{m+r+2}(\cos \theta, \sin \theta) + \rho \bar{Y}(\rho, \cos \theta, \sin \theta)], \end{aligned} \quad r \geq 0,$$

Z_{m+r+2} désignant un polynome en $\cos \theta, \sin \theta$ de dimension $m + r + 2$, \bar{X} et \bar{Y} désignant des fonctions développables en séries de TAYLOR pour $0 \leq \rho \leq \delta$; $-\infty < \theta < +\infty$; et t_1 étant une variable auxiliaire telle que $\frac{dt_1}{dt} = \rho^m$.

Soit $\theta = \alpha, \rho = 0$, un point régulier de ce système, il existe une caractéristique et une seule passant par le point $\theta = \alpha, \rho = 0$. Si $Q_{m-1}(\cos \alpha, \sin \alpha) \neq 0$, on en conclut qu'il existe une caractéristique et une seule du système (6) aboutissant à l'origine avec la tangente déterminée

$$x = \rho \cos \alpha; \quad y = \rho \sin \alpha; \quad \rho > 0,$$

Désignons maintenant par L' et L'' les deux caractéristiques du système (9') passant par les points $\rho = 0, \theta = \alpha$, et $\rho = 0, \theta = \alpha + 2\pi$.

A une caractéristique L du système (6), aboutissant à l'origine, correspond alors une caractéristique L_1 du système (9') qui sera, pour des valeurs suffisamment grandes de t , située entre L', L'' , et les deux droites $\rho = 0, \rho = \delta$.

Quant t croît vers l'infini, t_1 tendra vers une limite déterminée, finie ou infinie.

Si cette limite est une quantité finie T , L_1 tendra vers un point régulier $\rho = 0, \theta = \beta$, et on en conclut que L aboutira à l'origine avec la tangente déterminée

$$y \cos \beta - x \sin \beta = 0.$$

Si la limite de t_1 est infinie, L_1 doit aboutir à un point singulier $\rho = 0, \theta = \beta$, car autrement elle tendrait vers plusieurs points limites situés entre L' et L'' , et on s'assure aussi aisément que dans le premier cas, que cela est impossible.

On en conclut enfin que L aboutira à l'origine avec la tangente déterminée

$$y \cos \beta - x \sin \beta = 0.$$

24. Le théorème X étant ainsi démontré, nous en tirons le corollaire suivant:

Corollaire. *S'il existe une caractéristique L du système (6) aboutissant à l'origine avec une tangente déterminée, toute caractéristique, aboutissant à l'origine, y aura en ce point une tangente déterminée.*

En effet, s'il existait une caractéristique qui fut une spirale, cette spirale rencontrerait nécessairement la courbe L à l'intérieur de C , ce qui est impossible à cause de notre supposition que l'origine est le seul point singulier situé à l'intérieur de C .

25. Supposons maintenant qu'il existe une caractéristique L qui soit une spirale se rapprochant indéfiniment de l'origine. Il s'ensuit que l'identité (8) n'est pas satisfaite. Le système (9) possède alors une caractéristique tendant vers l'infini de telle manière que

$$\rho = 0 \quad \text{pour } \theta = \infty.$$

Soit alors $\rho = 0$, $\theta = \alpha$, un point régulier du système (9), et supposons pour fixer les idées que

$$\cos \alpha Y_m(\cos \alpha, \sin \alpha) - \sin \alpha X_m(\cos \alpha, \sin \alpha) > 0,$$

et que l'on ait choisi δ de telle manière que

$$\frac{d\theta}{dt_1} > 0 \quad \text{pour } \theta = \alpha, \text{ tant que } \rho \leq \delta.$$

On peut alors déterminer un nombre n suffisamment grand pour que le point où la caractéristique correspondante L_1 du plan des ρ, θ rencontre la droite $\theta = \alpha + 2n\pi$ soit situé entre les droites $\rho = 0$ et $\rho = \delta$ du plan des ρ, θ .

Envisageons maintenant une caractéristique passant par un point quelconque de la droite $\theta = \alpha + 2n\pi$, situé entre L_1 et la droite $\rho = 0$. Quand t_1 va en croissant, cette caractéristique sera toujours située entre L_1 et la droite $\rho = 0$, et ne pouvant pas rencontrer l'une des droites $\theta = \alpha + 2(n + \nu)\pi$ plus d'une fois, il est évident qu'une pareille carac-

téristique, qui ne peut pas aboutir à un point singulier situé sur la droite $\rho = 0$, à cause du corollaire que nous venons de démontrer, doit nécessairement s'éloigner vers l'infini.

Comme on a $\rho = 0$ pour $\theta = \infty$ sur cette caractéristique, on en conclut enfin que la caractéristique correspondante du plan des x, y , sera une spirale se rapprochant de l'origine.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

S'il existe une caractéristique qui est une spirale se rapprochant indéfiniment de l'origine, on peut entourer l'origine par un cercle C de rayon suffisamment petit pour qu'une caractéristique, passant par un point quelconque de C , soit toujours une spirale se rapprochant indéfiniment de l'origine.

Nous dirons dans ce cas avec M. POINCARÉ que l'origine est un *Foyer*.

On conclut enfin que chaque branche d'une caractéristique traversant l'origine sera une courbe qui aboutit à l'origine avec une tangente déterminée.

26. Rappelons enfin une notion importante introduite par M. POINCARÉ,¹ à savoir celle de l'*indice* d'une courbe fermée et d'un point singulier.

Supposons qu'un point parcourt une courbe fermée dans le sens positif, et considérons les variations de signe de l'expression $\frac{Y}{X}$. Soit h le nombre de fois que cette expression saute de $-\infty$ à $+\infty$, et k le nombre de fois que l'expression saute de $+\infty$ à $-\infty$. Soit

$$i = \frac{h - k}{2},$$

le nombre i s'appelle, d'après M. POINCARÉ, l'*indice* de la courbe fermée.

Par indice d'un point singulier on entend alors l'indice d'une courbe fermée infiniment petite entourant le point singulier,

et on établit aisément le théorème suivant:

L'indice d'une courbe fermée est égale à la somme des indices de tous les points singuliers situés à l'intérieur de la courbe fermée.

¹ Voir POINCARÉ: *Sur les courbes définies par des équations différentielles*. Journal de Math., 1881, pages 400 et suivantes.

A l'égard de l'indice d'un point singulier nous démontrerons ici un théorème important:

Théorème XI. *Soit c le nombre de caractéristiques traversant un point singulier, n_f le nombre de régions nodales fermées appartenant à ce point, et i son indice, on aura toujours*

$$(10) \quad c - n_f = 2(i + 1).$$

Nous commencerons par établir que l'indice d'un point singulier n'est pas changé, si l'on effectue sur les variables une substitution linéaire à déterminant positif.

27. Envisageons à cet effet le système d'équations différentielles

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X, \\ \frac{dy}{dt} &= Y, \end{aligned}$$

où X et Y sont des fonctions holomorphes de x et de y , s'annulant pour $x = 0$, $y = 0$, et faisons la substitution linéaire

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha x + \beta y, \\ y_1 &= \gamma x + \delta x, \end{aligned} \quad \text{où } \alpha\delta - \beta\gamma > 0.$$

Je dis que l'indice d'une courbe fermée C ne sera pas changé par cette substitution. Après la substitution nous devons en effet chercher le nombre de fois que la fonction

$$\frac{\gamma X + \delta Y}{\alpha X + \beta Y}$$

saute de $-\infty$ à $+\infty$, ainsi que le nombre de fois que cette fonction saute de $+\infty$ à $-\infty$, quand le point x, y parcourt le contour C .

Soit i l'indice de l'expression $\frac{Y}{X}$ sur C , et i' l'indice de l'expression $\frac{\gamma X + \delta Y}{\alpha X + \beta Y}$ sur le même contour.

Dans le voisinage des points où $\alpha X + \beta Y = 0$, on aura sensiblement

$$\frac{\gamma X + \delta Y}{\alpha X + \beta Y} \approx -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\beta^2 \left[\frac{\alpha}{\beta} + \frac{Y}{X} \right]}.$$

Nous n'avons donc à étudier que la manière dont la fonction

$$-\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{Y}{X}}$$

saute par l'infini.

Soient P_1, P_2, \dots, P_n les points consécutifs du contour C , où $\frac{Y}{X}$ passe par l'infini, et désignons par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, des quantités qui sont égales à 1, si $\frac{Y}{X}$ saute de $-\infty$ à $+\infty$, mais égales à -1 , si l'expression en question saute de $+\infty$ à $-\infty$.

Envisageons deux points consécutifs P_ν et $P_{\nu+1}$, et désignons par i'_ν la valeur qu'on obtient pour l'indice de la fonction $\frac{\gamma X + \partial Y}{\alpha X + \beta X}$, en parcourant la partie de C , située entre P_ν et $P_{\nu+1}$. L'on devra distinguer les cas suivants:

Si $\varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu+1} = 0$, l'expression $\frac{Y}{X}$, ainsi que $\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{Y}{X}}$, aura le même signe pour des points de C très voisins de P_ν et $P_{\nu+1}$ (et situés entre P_ν et $P_{\nu+1}$). La fonction $-\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{Y}{X}}$ ne pouvant changer de signe qu'en passant par ∞ , doit donc sauter autant de fois de $-\infty$ à $+\infty$ que de $+\infty$ à $-\infty$, et on en conclut que $i'_\nu = 0$.

Si $\varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu+1} = 2$, l'expression $\frac{Y}{X}$, ainsi que $\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{Y}{X}}$, aura le signe $+$ pour des points de C très voisins de P_ν et le signe $-$ pour des points très voisins de $P_{\nu+1}$. En parcourant la partie de C , située entre P_ν et $P_{\nu+1}$, la fonction $-\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{Y}{X}}$ sautera une fois plus de $-\infty$ à $+\infty$ que de $+\infty$ à $-\infty$, ce qui nous donne $2i'_\nu = 1$.

Si $\varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu+1} = -2$, on prouve de même que $2i'_\nu = -1$.

On aura donc toujours

$$\frac{\varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu+1}}{2} = 2i'_\nu.$$

Or on a évidemment

$$2i = \sum_{\nu=1}^n \frac{\varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu+1}}{2}; \quad (\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_1)$$

et

$$2i' = \sum_{v=1}^n 2i'_v,$$

ce qui nous permet d'affirmer que $i' = i$.

Le nombre i est donc invariant pour une substitution linéaire à déterminant positif.

Ce point étant établi, nous pouvons toujours supposer que Y n'est pas divisible par x , ni X par y , car s'il en était autrement, on pourrait au moyen d'une substitution linéaire convenable faire que cela ait lieu.

28. Afin d'établir la relation (10), nous envisagerons l'indice i sous un point de vue nouveau.

Posons à cet effet

$$x = \rho \cos \theta; \quad y = \rho \sin \theta;$$

On obtient alors

$$(12) \quad \frac{d\rho}{d\theta} = \rho \cdot \frac{xX + yY}{xY - yX}.$$

Entourons maintenant l'origine par un cercle $\rho = \delta$, et supposons qu'un point parcourre le contour de ce cercle dans le sens positif (c'est à dire de telle manière que θ aille en croissant). Soit h le nombre de fois que l'expression $\frac{xX + yY}{xY - yX}$ passe par zéro, en passant du signe $-$ au signe $+$, et soit k le nombre de fois que cette expression passe par zéro, en passant du signe $+$ au signe $-$; je dis que

$$2(i + 1) = h - k.$$

Chaque fois que le second membre de l'équation (12) passe par zéro, on aura

$$\frac{Y}{x} = -\frac{X}{y} = \frac{xY - yX}{x^2 + y^2},$$

en effet, à cause des suppositions faites sur X et Y , la fonction $xX + yY$ ne s'annule, ni pour $x = 0$, ni pour $y = 0$

L'expression $\frac{xX + yY}{xY - yX}$ passera donc par zéro exactement de la même manière que l'expression

$$-\frac{xX + yY}{yX},$$

c'est à dire de la même manière que

$$\frac{x}{y} - \frac{Y}{X}.$$

Désignons par h le nombre de fois que cette dernière expression saute de $-\infty$ à $+\infty$, et par k le nombre de fois que cette expression saute de $+\infty$ à $-\infty$. On aura évidemment

$$h - k = - (h' - k').$$

Mais $\frac{h' - k'}{2}$ est l'indice de la fonction $-\frac{x}{y} - \frac{Y}{X}$, qui sera égal à $-i - 1$.

On aura donc

$$h - k = 2(i + 1).$$

29. Soit maintenant (L_1, L'_1) (voir Fig. VI) une caractéristique traversant l'origine, et soit P_c le point où L_1 sort du cercle $\rho = \delta$, et P'_c le

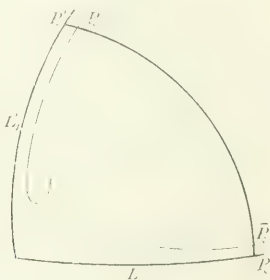


Fig. VI.

point où L'_1 sort du même cercle. Supposons pour fixer les idées qu'on parcoure l'arc de cercle $P_c P'_c$ dans le sens positif, en allant de P_c à P'_c , et envisageons une caractéristique L_c passant par un point \bar{P}_c très voisin de P_c . L_c entrera donc dans le cercle par \bar{P}_c et en sortira par un point

\bar{P}'_e très voisin de P'_e . La distance ρ de l'origine aura donc un certain nombre de valeurs minima, quand on parcourt L_e de \bar{P}_e à \bar{P}'_e , et il est évident que ρ passera par une valeur minima une fois de plus que par une valeur maxima, si l'on parcourt L_e de \bar{P}_e à \bar{P}'_e .

La valeur de $h - k$ sur L_e sera donc égale à $+1$, et on en conclut que la valeur de $h - k$ sur l'arc de cercle $\bar{P}_e \bar{P}'_e$ sera aussi égale à $+1$. L'arc de cercle en question et la caractéristique L_e forment en effet une courbe fermée à l'intérieur de laquelle il n'existe pas de point, où les deux fonctions $xX + yY$ et $xY - yX$ s'annulent simultanément, et le théorème de la page 38 nous apprend que l'indice de l'expression $\frac{xY - yX}{xX + yY}$ sur ce contour fermé est alors égal à zéro.

On en conclut enfin que la valeur de $h - k$ sur l'arc de cercle $P_e P'_e$ est égal à $+1$.

30. Envisageons maintenant une région nodale ouverte, et soit P_n le point par où on entre dans cette région, si on parcourt le contour du cercle $\rho = \delta$ dans le sens positif, et P'_n le point par où l'on sort de cette région nodale.

Soit P_1 le premier point sur l'arc de cercle $P_n P'_n$ où la fonction $\frac{xX + yY}{xY - yX}$ passe par zéro en changeant de signe, et supposons pour fixer les idées qu'elle passe en ce point de $+$ à $-$. Soit enfin L la caractéristique passant par P_1 . Les deux demi-caractéristiques seront alors situées à l'intérieur du cercle dans le voisinage de P_1 , car ρ aura en P_1 une valeur maxima. Or l'une de ces demi-caractéristiques sortira nécessairement du cercle $\rho = \delta$, autrement L appartiendrait à une région nodale fermée. Soit P'_1 le point où L sort du cercle. Quand un point parcourt la caractéristique L de P_1 à P'_1 , sa distance de l'origine passera nécessairement par un certain nombre de valeurs minima, ce qui met en évidence que P'_1 est situé entre P_1 et P'_n , et, comme le point commence par s'approcher de l'origine et finit par s'en éloigner, il passe par une valeur minima une fois de plus que par une valeur maxima. On en conclut que la valeur de $h - k$ que l'on obtient en parcourant L entre P_1 et P'_1 est égal à $+1$. Elle sera donc égale à $+1$ entre P_1 et P'_1 sur le cercle, et, comme la valeur de $h - k$ est égale à -1 en passant par P_1 , on en conclut que la valeur de $h - k$ sur l'arc de cercle $P_n P'_1$ est égale à zéro.

Soit maintenant P_2 le premier point sur l'arc de cercle $P'_1P'_n$ où la fonction $\frac{xX + yY}{xY - yX}$ passe par zéro en changeant de signe, et supposons dans ce cas qu'elle passe en ce point de $-$ à $+$. Soit enfin L la caractéristique passant par P_2 . Les deux demi-caractéristiques passant par P_2 seront donc situées à l'extérieur du cercle dans le voisinage de P_2 , mais l'une d'entre elles aboutira à l'origine, d'où l'on conclut que l'une d'entre elles entrera à l'intérieur du cercle par un point P'_2 . On prouve alors de la même manière que ci-dessus que P'_2 est situé entre P_2 et P'_n , et que la valeur de $h - k$ sur l'arc de cercle P'_1P_2 est égale à zéro.

L'arc de cercle $P_nP'_n$ sera de cette manière divisé en plusieurs parties telles que la valeur de $h - k$ sur chacune de ces parties sera égale à zéro. La valeur de $h - k$ sur l'arc de cercle $P_nP'_n$ sera alors égale à zéro.

31. Envisageons enfin une région nodale fermée, et soit P_{n_f} le point par où un point qui parcourant le cercle $\rho = \delta$ dans le sens positif entre en cette région nodale, et soit P'_{n_f} le point par où il en sort.

Il existe alors certainement une courbe intégrale L , appartenant à cette région nodale fermée, qui est tangente au cercle $\rho = \delta$ et qui ne sort jamais de ce cercle. Soit P le point où L rencontre le cercle $\rho = \delta$. On démontre alors, de la même manière que pour une région nodale ouverte, que la valeur de $h - k$ qu'on obtient en parcourant l'arc de cercle de P_{n_f} jusqu'à un point très voisin de P sera égale à zéro. En parcourant l'arc de cercle situé entre un point très voisin de P (situé entre P et P'_{n_f}) et P'_{n_f} , $h - k$ aura aussi la valeur zéro. En parcourant l'arc de cercle infiniment petit passant par P , la valeur de $h - k$ sera égale à -1 , ce qui met en évidence que la valeur de $h - k$ sur $P_{n_f}P'_{n_f}$ sera égale à -1 .

32. Nous sommes donc parvenus au résultat suivant.

La valeur de $h - k$ sera égale à $+1, 0$, ou -1 , suivant que l'arc de cercle correspondant est limité par deux branches de caractéristiques traversant l'origine, ou par les deux caractéristiques limitant une région nodale ouverte ou enfin par la caractéristique limitant une région nodale fermée.

En parcourant tout le cercle, on aura donc comme conséquence immédiate que $h - k = c - n_f$, ou enfin que

$$c - n_f = 2(i + 1). \quad \text{c. q. f. d.}$$

CHAPITRE III.

Les termes de la plus petite dimension sont d'ordre 1.

33. Nous traiterons d'abord l'équation différentielle

$$(13) \quad x^m \frac{dy}{dx} = ay + bx + \mathfrak{P}(x, y),$$

\mathfrak{P} désignant une série de TAYLOR ne contenant que des termes d'une dimension ≥ 2 , et a une quantité différente de zéro.

Cette équation joue un rôle capital dans les recherches qui suivent. On peut en effet réduire l'étude d'un point singulier quelconque à celle de diverses équations de la forme (13).

Nous voulons donc étudier le point $x = 0$, $y = 0$, de cette dernière équation.¹

Observons d'abord qu'il n'existe pas de région nodale fermée appartenant à l'origine de cette équation, car, sur une courbe fermée d'une pareille région nodale, on aurait un point où $\frac{dx}{dy} = 0$, c'est à dire où $x = 0$, ce qui est impossible, aucune caractéristique ne pouvant couper la caractéristique $x = 0$, dans le voisinage de l'origine en un point autre que le point $x = 0$, $y = 0$.

L'équation (10) nous donne dans ce cas

$$c = 2(i + 1),$$

et le nombre de caractéristiques traversant l'origine sera ainsi déterminé.

Pour étudier de plus près la nature de ces caractéristiques, nous entourons l'origine par un cercle C de rayon suffisamment petit δ pour qu'il n'existe à l'intérieur de C aucun point singulier autre que l'origine.

¹ Comparer à ce sujet mon mémoire: *Sur les points singuliers des équations différentielles*. Öfversigt af Kongl. Vet. Akad. Förh. Febr. 9, 1898, où j'ai donné une méthode pour calculer par des approximations successives les caractéristiques de cette équation passant par l'origine.

L'expression $\frac{dy}{dx}$ ne devenant jamais infinie à l'intérieur de C , excepté sur la caractéristique $x=0$, il est évident que la partie d'une caractéristique quelconque, qui est située à l'intérieur de C , peut être décrite de telle manière que $|x|$ aille toujours en décroissant.

34. Il faut alors distinguer les quatre cas suivants:

1) $a > 0$; $m =$ nombre pair.

Déterminons alors $\partial_1 < \partial$ de telle manière que

$$\begin{aligned} a\partial_1 + \mathfrak{P}(0, \partial_1) &> 0, \\ -a\partial_1 + \mathfrak{P}(0, -\partial_1) &< 0. \end{aligned}$$

On peut alors déterminer un nombre positif ε suffisamment petit pour que

$$\begin{aligned} a\partial_1 + bx + \mathfrak{P}(x, \partial_1) &> 0, \\ -a\partial_1 + bx + \mathfrak{P}(x, \partial_1) &< 0, \end{aligned} \quad \text{pour } |x| \leq \varepsilon.$$

Envisageons enfin le rectangle R , formé par les quatre droites

$$y = \partial_1; \quad x = 0; \quad y = -\partial_1; \quad x = \varepsilon.$$

On sait qu'il n'y a pas de point singulier à l'intérieur de R .

La valeur de $\frac{dy}{dx}$ étant alors partout positive sur le côté $y = \partial_1$ de ce rectangle, on en conclut qu'une caractéristique, passant par un point quelconque de ce côté, entrera à l'intérieur de R , quand x va en décroissant.

De la même manière on s'assure qu'une caractéristique, passant par un point quelconque du côté $y = -\partial_1$, entrera à l'intérieur de R , quand x va en décroissant.

Une caractéristique L , passant par un point quelconque de R , ne peut donc pas sortir de R , quand x va en décroissant, car elle ne peut pas traverser ni le côté $y = \partial_1$, ni le côté $y = -\partial_1$, ni enfin le côté $x = 0$ qui est une caractéristique. On en conclut que L doit aboutir à l'origine, car autrement il existerait une caractéristique fermée située à l'intérieur de R , ce qui est contraire au théorème III.

Le rectangle R en question constitue donc une *région nodale*.

Envisageons maintenant le rectangle R_1 , limité par les quatre droites

$$y = \delta_1; \quad x = 0; \quad y = -\delta_1; \quad x = -\varepsilon.$$

Une caractéristique passant par un point quelconque du côté $y = \delta_1$ de ce rectangle sortira alors de R_1 quand $|x|$ va en décroissant, car en un tel point on a $\frac{dy}{dx} > 0$. On s'assure aussi de la même manière qu'une caractéristique passant par un point du côté opposé, sortira aussi de R_1 , quand $|x|$ va en décroissant.

La caractéristique L , passant par un point P , situé sur la droite $y = \delta_1$, doit donc, quand $|x|$ va en croissant, traverser le côté $x = -\varepsilon$ en un point P' . Si P tend vers le point $x = 0$, $y = \delta_1$, P' tendra vers un point déterminé S , situé sur le côté $x = -\varepsilon$, et on prouve aisément que la caractéristique K , passant par S , aboutit aussi à l'origine, et qu'elle sera le prolongement de l'axe des y positifs.

À gauche de l'axe des y , il existe donc au moins une caractéristique aboutissant à l'origine. Je veux maintenant prouver qu'il n'existe certainement pas plus d'une seule caractéristique aboutissant à l'origine et située à gauche de l'axe des y .

Supposons en effet qu'il en existe deux, et soient

$$y = y_1(x); \quad y = y_2(x);$$

leurs équations (on sait en effet qu'à chaque valeur de x correspond une seule valeur de y , $\frac{dy}{dx}$ étant toujours fini). On aura alors

$$x^m \frac{d(y_2 - y_1)}{dx} = (y_2 - y_1)[a + \chi(x)],$$

où

$$\chi(x) = \frac{\mathfrak{P}(x, y_2) - \mathfrak{P}(x, y_1)}{y_2 - y_1} = \mathfrak{P}_1(x, y_1, y_2),$$

\mathfrak{P}_1 désignant une série de TAYLOR en x, y_1, y_2 , et qui s'annule pour $x = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$. On aura donc $\chi(0) = 0$.

Cela posé, on peut déterminer un nombre positif σ suffisamment petit pour que

$$|\chi(x)| < \frac{\sigma}{2}, \quad \text{pour } |x| \leq \sigma.$$

On en conclut alors que

$$y_2 - y_1 = (\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1) e^{\int_{x_0}^x \frac{1}{x^{n+1}} dx},$$

\tilde{y}_1 et \tilde{y}_2 désignant les valeurs $y_1(x_0)$ et $y_2(x_0)$, et x_0 une valeur négative de x dont la valeur absolue est $< \sigma$.

Pour les valeurs de x situées entre x_0 et 0 on aura alors

$$\begin{aligned} |y_2 - y_1| &> |\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1| e^{\frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{a}{x^m} dx} \\ &> |\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1|, \end{aligned}$$

ce qui est contraire à notre supposition que ces caractéristiques vont toutes deux à l'origine.

Il n'existe donc qu'une seule caractéristique aboutissant à l'origine et située à gauche de l'axe des y .

Les nombres n et c seront donc dans ce cas

$$c = 2; \quad n = 1;$$

et l'axe des y positifs ainsi que l'axe des y négatifs pourra être prolongé au delà de l'origine, à gauche de l'axe des y (voir Fig. VII).



Fig. VII.

2) $a < 0$; $m =$ nombre pair.

Ce cas se réduit au précédent par la substitution $x = -\xi$, ce qui nous donne

$$c = 2; \quad n = 1;$$

et l'axe des y positifs, ainsi que l'axe des y négatifs, pourra être prolongé, à droite de l'axe des y , au delà de l'origine.

3) $a > 0$; $m =$ nombre impair.

Pour la partie du plan, située à droite de l'axe des y , on démontre qu'elle forme une *région nodale* de la même manière qu'au cas (1). Au moyen de la substitution $x = -\xi$, on s'assure que la partie du plan, située à gauche de cet axe, forme aussi une *région nodale*. On aura donc

$$c = 0; \quad n = 1.$$

Dans ce cas l'origine est un *Nœud*.

4) $a < 0$; $m =$ nombre impair.

Pour $x > 0$ la discussion est la même que pour le cas 2), et pour $x < 0$ elle est la même que pour le cas 1). On en conclut que

$$c = 4; \quad n = 0.$$

L'origine dans ce cas sera donc un *Col*.

35. Envisageons maintenant un système d'équations différentielles

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x + \beta y + X_2, \\ \frac{dy}{dt} &= \gamma x + \delta y + Y_2, \end{aligned}$$

X_2 et Y_2 désignant des séries de TAYLOR dont tous les termes sont de dimension > 1 , et désignons par μ_1 et μ_2 les racines de l'équation

$$(15) \quad \begin{vmatrix} \alpha - \mu & \beta \\ \gamma & \delta - \mu \end{vmatrix} = 0$$

36. Les différents cas qui peuvent se présenter sont les suivants:

I. μ_1 et μ_2 sont réels et de même signe.

Pour fixer les idées nous supposerons que μ_1 et μ_2 soient tous les deux > 0 .

Au moyen d'une substitution linéaire convenable

$$\xi = ax + by; \quad \eta = cx + dy;$$

on obtient alors

$$(16) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \mu_1 \xi + \bar{X}_2, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \mu_2 \eta + \bar{Y}_2, \end{aligned}$$

\bar{X}_2 et \bar{Y}_2 désignant des séries de TAYLOR dont tous les termes sont de dimension ≥ 2 .

On aura donc

$$\xi \frac{d\xi}{dt} + \eta \frac{d\eta}{dt} = \mu_1 \xi^2 + \mu_2 \eta^2 + \xi \bar{X}_2 + \eta \bar{Y}_2,$$

ce qui met en évidence que

$$\xi \frac{d\xi}{dt} + \eta \frac{d\eta}{dt} > 0, \quad \text{pour } |\xi| < \delta, \quad |\eta| < \delta,$$

quand δ est un nombre positif suffisamment petit.

Une caractéristique, passant par un point du cercle $\xi^2 + \eta^2 = \delta^2$, entrera donc à l'intérieur de ce cercle, quand t ira en décroissant, et n'en pourra donc plus sortir, quand t ira en décroissant. Mais à l'intérieur de ce cercle il n'existe pas de caractéristique fermée, car sur une pareille caractéristique $\xi^2 + \eta^2$ aurait une valeur maxima ce qui conduirait à $\xi \frac{d\xi}{dt} + \eta \frac{d\eta}{dt} = 0$. Il est donc évident que la caractéristique aboutira à l'origine, qui dans ce cas sera un Noeud.

Le seul cas où on ne parvient pas à un système de la forme (16) est celui où μ_1 et μ_2 sont égaux, et alors au moyen d'une substitution linéaire convenable on aura

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \mu_1 \xi + \bar{X}_2, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \lambda \xi + \mu_1 \eta + \bar{Y}_2. \end{aligned}$$

Soit maintenant α une quantité positive suffisamment grande pour que

$$\alpha \mu_1 \xi^2 + \lambda \xi \eta + \mu_1 \eta^2$$

soit une forme quadratique définie, on aura

$$x\xi\frac{d\xi}{dt} + \eta\frac{d\eta}{dt} > 0 \text{ tant que } |\xi| \leq \delta, \quad |\eta| \leq \delta,$$

δ désignant une quantité positive suffisamment petite.

Soit

$$x\xi^2 + \eta^2 = \delta_1^2$$

une ellipse suffisamment voisine de l'origine; on prouve, de la même manière que ci-dessus, que par chaque point de cette ellipse passe une caractéristique aboutissant à l'origine.

Dans ce cas on aura donc toujours

$$c = 0; \quad n = 1; \quad n_f = 0;$$

37. II. μ_1 et μ_2 sont réels et de signes contraires.

Posons alors

$$\mu_1 = a > 0; \quad \mu_2 = -b < 0;$$

Une substitution linéaire convenable nous donnera alors

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= a\xi + \overline{X}_2, \\ \frac{d\eta}{dt} &= b\eta + \overline{Y}_2. \end{aligned}$$

où \overline{X}_2 et \overline{Y}_2 ne contiennent que des termes au moins de la seconde dimension.

La substitution

$$\eta = \xi\eta_1$$

nous donnera alors

$$\xi\frac{d\eta_1}{d\xi} = \frac{-(b+a)\eta_1 + \xi\varphi}{a + \xi\psi},$$

φ et ψ désignant des fonctions holomorphes. Les développements du n° 34 nous apprennent alors que cette dernière équation possède exactement quatre branches de caractéristiques aboutissant à l'origine. Deux de ces branches seront données par $\xi = 0$, à laquelle correspond le point $\xi = 0, \eta = 0$ des équations (17).

Il existe donc deux, et pas plus de deux, branches de caractéristiques des équations (17), qui aboutissent à l'origine et y ont pour tangente $\eta = 0$.

On prouve de la même manière qu'il existe deux, et pas plus de deux, branches de caractéristiques du système (17) aboutissant à l'origine et ayant $\xi = 0$ pour tangente.

Mais toutes les caractéristiques du système (17) qui aboutissent à l'origine devant y avoir une tangente déterminée, aussitôt qu'il en existe une seule aboutissant à l'origine avec une tangente déterminée, on voit que les caractéristiques aboutissant à l'origine doivent y avoir des tangentes dont la direction est déterminée par l'équation

$$\xi\eta = 0.$$

On en conclut enfin qu'il n'existe pas plus de quatre branches de caractéristiques du système (17) qui aboutissent à l'origine.

On aura donc toujours dans ce cas

$$c = 4; \quad n = 0;$$

38. III. $\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2 i$; $\mu_2 = \lambda_1 - \lambda_2 i$.

Pour fixer les idées nous supposons en outre que $\lambda_1 \geq 0$.

Une substitution linéaire réelle convenable nous donnera alors

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi - \lambda_2 \eta + \bar{X}_2,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \lambda_2 \xi + \lambda_1 \eta + \bar{Y}_2.$$

L'équation déterminant les tangentes possibles à l'origine sera

$$\lambda_2 [\xi^2 + \eta^2] = 0$$

d'où l'on conclut que l'origine dans ce cas est un Foyer ou un Centre.

Si $\lambda_1 > 0$, on aura

$$\xi \frac{d\xi}{dt} + \eta \frac{d\eta}{dt} = \lambda_1 \xi^2 + \lambda_1 \eta^2 + \xi \bar{X}_2 + \eta \bar{Y}_2,$$

c'est à dire

$$\xi \frac{d\xi}{dt} + \eta \frac{d\eta}{dt} > 0; \quad \text{pour } |\xi| < \delta, \quad |\eta| < \delta,$$

si δ est une valeur positive suffisamment petite; on prouve alors, comme au cas I, qu'une caractéristique, passant par un point suffisamment voisin de l'origine, aboutira à l'origine.

On aura donc dans ce cas

$$c = 0; \quad n = 1; \quad n_f = 0;$$

et l'origine sera un Foyer.

Pour le cas où $\lambda_1 = 0$, cas qui sera traité dans le chapitre suivant, nous renvoyons le lecteur à l'intéressante discussion de M. POINCARÉ.¹

39. IV. $\mu_2 = 0$, mais μ_1 est différent de zéro.

Au moyen d'une substitution linéaire convenable

$$x = ax_1 + by_1; \quad y = cx_1 + dy_1;$$

on obtient alors

$$(18) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt_1} &= X_{q_1} + X_{q_1+1}, \\ \frac{dy_1}{dt_1} &= y_1 - k_1 x_1 + Y_2, \end{aligned}$$

X_{q_1+1} et Y_2 désignant des séries de TAYLOR ne contenant que des termes de dimensions plus grandes que q_1 et 1, et X_{q_1} un polynôme de dimension $q_1 > 1$. La variable auxiliaire t_1 est liée à l'ancienne variable t par la relation $dt_1 = \mu_1 dt$. L'équation déterminant les tangentes possibles à l'origine sera alors

$$x_1(y_1 - k_1 x_1) = 0.$$

Nous prouverons d'abord qu'il existe deux, et pas plus de deux, branches de caractéristiques du système (18) aboutissant à l'origine et ayant $x_1 = 0$ pour tangente.

Mettons à cet effet

$$x_1 = \xi y_1$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt_1} &= -\xi[1 - k\xi + y_1\varphi] + y_1\psi, \\ \frac{dy_1}{dt_1} &= y_1[1 - k\xi + y_1\chi], \end{aligned}$$

¹ Voir POINCARÉ, *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, Journal de Math. 1885, pages 172—193.

φ , ψ et χ désignant des séries de TAYLOR convergentes pour des valeurs suffisamment petites de ξ et de y_1 . Or pour ce système l'équation (15) devient

$$(\mu + 1)(\mu - 1) = 0$$

ce qui fait voir qu'il passe 4, et pas plus de 4, branches de caractéristiques par le point $\xi = 0$, $y_1 = 0$, dont deux sont données par l'équation $y_1 = 0$, à laquelle correspond le point $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ du système (18). Il existe donc deux, et pas plus de deux, branches de caractéristiques du système (18) aboutissant à l'origine et ayant $x_1 = 0$ pour tangente, l'une étant située au-dessus et l'autre au-dessous de l'axe des x_1 .

On en conclut donc que toutes les autres caractéristiques qui aboutissent à l'origine ont la tangente déterminée

$$y_1 - k_1 x_1 = 0.$$

Posons donc

$$y_1 = (k_1 + y_2)x_1$$

ce qui donne

$$(19) \quad x_1^{q_1} \frac{dy_2}{dx_1} = \frac{y_2 - k_2 x_1 + Y_2}{X_{q_2} + X_{q_2+1}} - x_1^{q_1-1} (k_1 + y_2),$$

X_{q_2} désignant les termes de la plus petite dimension dans le dénominateur.

Si $q_2 = 0$, cette équation se réduit à une équation pareille à celle que nous avons traitée au n° 33.

Si au contraire $q_2 > 0$, on doit observer qu'il nous suffit d'étudier les caractéristiques aboutissant à l'origine et ayant $y_2 - k_2 x_1 = 0$ pour tangente. On prouve en effet, de la même manière que ci-dessus, que l'équation (19) ne possède pas plus de deux branches de caractéristiques aboutissant à l'origine et ayant $x_1 = 0$ pour tangente, d'où l'on conclut que la droite $x_1 = 0$ est la seule caractéristique aboutissant à l'origine avec cette tangente. La substitution

$$y_2 = (k_2 + y_3)x_1$$

donnera alors une équation de la forme

$$x_1^{q_1+q_2} \frac{dy_3}{dx} = \frac{y_3 - k_3 x_1 + Y_3''}{X_{q_3} + X_{q_3+1}} - x_1^{q_1-1} \cdot \varphi,$$

où X_{q_3} désigne un polynôme de dimension q_3 et Y_3'' , X_{q_3+1} et φ des séries

de TAYLOR dont les deux premières ne contiennent que des termes des dimensions respectives ≥ 2 et $q_3 + 1$.

Si $q_3 > 0$, nous ferons la substitution

$$y_3 = (k_3 + y_4)x_1.$$

En continuant ainsi, au moyen de la substitution

$$y_{\lambda-1} = (k_{\lambda-1} + y_{\lambda})x_1$$

on parviendra à l'équation

$$(19') \quad x_1^{q_1+q_2+\dots+q_{\lambda-1}} \frac{dy_{\lambda}}{dx_1} = \frac{y_{\lambda} - k_{\lambda}x_1 + Y_2^{(\lambda-1)}}{X_{q_{\lambda}} + X_{q_{\lambda}+1}} - x_1^{q_1-1} \cdot \varphi,$$

où $X_{q_{\lambda}}$ est un polynôme de dimension q_{λ} en x_1 et en y_{λ} , et φ une série de TAYLOR. Il nous suffira d'étudier les caractéristiques de cette équation aboutissant à l'origine et ayant $y_{\lambda} - k_{\lambda}x_1 = 0$ pour tangente.

Je dis qu'en prenant λ suffisamment grand, on parviendra toujours à une pareille équation (19'), où $q_{\lambda} = 0$.

On aura en effet

$$(20) \quad \begin{aligned} Y &= y_1 - k_1x_1 + Y_2 = x_1[y_2 - k_2x_1 + Y_3] = \dots = x_1^{\lambda-1}[y_{\lambda} - k_{\lambda}x_1 + Y_2^{\lambda-1}], \\ X &= X_{q_1} + X_{q_1+1} = x_1^{q_1}[X_{q_2} + X_{q_2+1}] = \dots = x_1^{q_1+q_2+\dots+q_{\lambda-1}}[X_{q_{\lambda}} + X_{q_{\lambda}+1}]. \end{aligned}$$

Mais en faisant

$$\alpha x_1 + \beta y_1 = \xi, \quad \gamma x_1 + \delta y_1 = \eta,$$

les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des constantes convenables, on aura¹

$$Y = [\eta - \varphi(\xi)]e^{\mathfrak{P}(\xi, \eta)},$$

$$X = [\gamma^{q_1} + \phi_1(\xi)\gamma^{q_1-1} + \dots + \phi_{q_1}(\xi)]e^{\mathfrak{P}_1(\xi, \eta)},$$

$\varphi, \phi_1, \dots, \phi_{q_1}$, \mathfrak{P} et \mathfrak{P}_1 désignant des fonctions holomorphes des variables. Soit

$$L(\xi, \eta) = \frac{\gamma^{q_1} + \phi_1(\xi)\gamma^{q_1-1} + \dots + \phi_{q_1}(\xi) - [\varphi(\eta) + \phi_1(\xi)\varphi^{q_1-1} + \dots + \phi_{q_1}]}{\eta - \varphi(\xi)}.$$

¹ Voir WEIERSTRASS, *Einige auf die Theorie der analytischen Functionen sich beziehende Sätze*, Math. Werke, Tome II.

on aura

$$\eta^{q_1} + \phi_1(\xi)\eta^{q_1-1} + \dots + \phi_{q_1} - [\eta - \varphi(\xi)]L(\xi, \eta) = \xi^s e^{\mathfrak{P}(\xi)}$$

où $\mathfrak{P}(\xi)$ est une série de TAYLOR et s un nombre entier.

En exprimant les variables ξ, η en y_2, x_1 , les équations (20) et (21) nous apprennent que le premier membre de cette dernière équation est divisible par x_1^{s-1} . Or le second membre ne sera divisible que par x_1^s , si $\alpha + \beta k_1 \neq 0$, car on a

$$\begin{aligned}\xi &= (\alpha + \beta k_1 + \beta y_2)x_1 \\ &= (\alpha + \beta k_1)x_1 + \beta k_2 x_1^2 + \dots + \beta y_2 x_1^s.\end{aligned}$$

Après un nombre $\lambda > s + 1$ de substitutions on parviendra donc nécessairement à une équation différentielle (19') telle que X_{q_λ} soit une constante.

On distinguera alors les trois cas suivants:

I. Si l'on a $X_{q_\lambda} > 0$, $q_1 + q_2 + \dots + q_{\lambda-1} =$ nombre impair.

Il n'existe pas de caractéristique de l'équation (19') traversant l'origine, et on en conclut que le système (18) ne possède pas de caractéristique traversant l'origine.

On aura donc

$$c = 0; \quad n = 1.$$

II. Si $X_{q_\lambda} < 0$, $q_1 + q_2 + \dots + q_{\lambda-1} =$ nombre impair.

Alors il existe seulement deux caractéristiques de l'équation (19') aboutissant l'origine, si l'on ne compte pas la caractéristique $x_1 = 0$ à laquelle correspond le point $x_1 = 0, y_1 = 0$ du système (18).

Nous avons donc 4, et pas plus de 4, caractéristiques du système (18) aboutissant l'origine, ce qui nous donne

$$c = 4; \quad n = 0;$$

III. Si enfin $X_{q_\lambda} \neq 0$; $q_1 + q_2 + \dots + q_{\lambda-1} =$ nombre pair.

Il existe alors deux caractéristiques de l'équation (19') traversant l'origine. Ces deux caractéristiques correspondront évidemment à deux caractéristiques du système (18) traversant l'origine de telle sorte que l'une des branches de chacune de ces caractéristiques aboutira à l'origine et y aura $x_1 = 0$ pour tangente, tandis que l'autre y aura $y_1 - k_1 x_1 = 0$ pour tangente. Nous aurons alors

$$c = 2; \quad n = 1.$$

40. On s'assure enfin aisément que le système (18) ne possède jamais de région nodale fermée appartenant à l'origine.

En effet, s'il y avait une pareille région nodale fermée, il existerait toujours une infinité de caractéristiques aboutissant à l'origine avec la tangente déterminée $y_1 - k_1 x_1 = 0$ et pour $t_1 = +\infty$ et pour $t_1 = -\infty$. A la tangente $x_1 = 0$ ne correspond en effet pas plus de deux branches de caractéristiques.

On en concluerait que le système

$$\frac{dx_1}{dt_1} = x_1^{q_1} [X_{q_1} + X_{q_1+1}],$$

$$\frac{dy_2}{dt_1} = y_2 - k_2 x_1 + Y_2' - x_1^{q_1-1} (k_1 + y_2) [X_{q_2} + X_{q_2+1}]$$

aurait une infinité de demi-caractéristiques aboutissant à l'origine pour $t_1 = +\infty$ ainsi qu'une infinité, y aboutissant pour $t_1 = -\infty$. De la même manière on s'assurerait qu'il existerait une infinité de demi-caractéristiques du système

$$\frac{dx_1}{dt_1} = x_1^{q_1+q_2+\dots+q_{\lambda}-1} [X_{q_{\lambda}} + X_{q_{\lambda}+1}],$$

$$\frac{dy_{\lambda}}{dt_1} = y_{\lambda} - k_{\lambda} x_1 + Y_{\lambda}' - x_1^{q_1-1} \varphi [X_{q_{\lambda}} + X_{q_{\lambda}+1}],$$

aboutissant à l'origine pour $t_1 = +\infty$, ainsi qu'une infinité y aboutissant pour $t_1 = -\infty$.

Or ce dernier système possède tout au plus une région nodale et pas de région nodale fermée. Les caractéristiques de cette région nodale aboutissent donc toutes à l'origine pour $t_1 = +\infty$, s'il y a une seule d'entre elles y aboutissant pour $t_1 = +\infty$, et on en conclut qu'il n'existe pas une infinité de caractéristiques aboutissant à l'origine pour $t_1 = -\infty$.

Nous pouvons réunir dans le théorème suivant les résultats obtenus pour tous les cas traités jusqu'ici.

Quand les racines de l'équation (15) ne sont pas toutes les deux égales à zéro, la nature du point singulier $x = 0, y = 0$, du système (14) sera complètement déterminée par la valeur de i , et on aura

$$c = 2(i+1); \quad 2n = (1-i)(2+i); \quad n_f = 0.$$

Dans le cas, au contraire, où les deux racines de l'équation (15) sont égales à zéro, on voit aisément qu'il ne suffit pas de connaître la valeur de i pour savoir déterminer la nature du point singulier.

41. Supposons enfin que les deux racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha - \mu & \beta \\ \gamma & \delta - \mu \end{vmatrix} = 0$$

soient toutes les deux égales à zéro.

Au moyen d'une substitution linéaire convenable on peut alors réduire le système d'équations différentielles à la forme suivante

$$\frac{dx_1}{dt_1} = X_{q_1} + X_{q_1+1},$$

$$\frac{dy_1}{dt_1} = x_1 + Y_2,$$

t_1 étant une nouvelle variable auxiliaire convenable.

En faisant

$$y_1 = \xi; \quad x_1 + ay_1 = \eta;$$

on obtient

$$(22) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt_1} &= \eta - \alpha\xi + X_2, \\ \frac{d\eta}{dt_1} &= \alpha(\eta - \alpha\xi) + Y_2, \end{aligned}$$

X_2 et Y_2 ne contenant que des termes dont la dimension est > 1 .

Nous traiterons d'ailleurs ce cas plus tard.

CHAPITRE IV.

Cas où le polynome $x_1 Y_m - y_1 X_m$ (ou Q_{m-1}) n'a pas de facteur linéaire réel multiple.

42. A cause des développements des pages 34, 35 au moyen d'une substitution linéaire convenable on peut réduire le système d'équations différentielles à l'une des formes suivantes:

$$(23) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_m(x_1, y_1) + X_{m+1}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= Y_m(x_1, y_1) + Y_{m+1}, \end{aligned}$$

où $x_1 Y_m - y_1 X_m$ ne s'annule pas identiquement, et

$$(23') \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 Q_{m-1}(x_1, y_1) + X_{m+1}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= y_1 Q_{m-1}(x_1, y_1) + Y_{m+1}. \end{aligned}$$

La substitution peut en outre être choisie de telle manière que les polynomes X_m et Q_{m-1} soient encore assujettis aux conditions

$$X_m(0, y_1) \neq 0, \quad Q_{m-1}(0, y_1) \neq 0.$$

Nous ne traiterons en général dans ce chapitre que le cas où aucun des polynomes

$$x_1 Y_m - y_1 X_m \quad \text{et} \quad Q_{m-1}(x_1, y_1)$$

ne contient de facteur linéaire réel multiple.

Envisageons d'abord le système (23). On devra distinguer deux cas suivant que $x_1 Y_m - y_1 X_m$ a des facteurs linéaires réels ou non.

43. I. Supposons d'abord que $x_1 Y_m - y_1 X_m$ n'ait pas de facteur linéaire réel.

On sait qu'il n'existe pas alors de caractéristique aboutissant à l'origine avec une tangente déterminée, et l'origine sera alors un Foyer ou un Centre.

Pour pouvoir décider lequel de ces cas aura lieu, nous ferons la substitution

$$\begin{aligned}x_1 &= \rho \cos \theta, \\ y_1 &= \rho \sin \theta,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \rho \left[\cos \theta X_m(\cos \theta, \sin \theta) + \sin \theta Y_m(\cos \theta, \sin \theta) + \rho P \right],$$

P et Q désignant des séries de TAYLOR en ρ , $\cos \theta$, $\sin \theta$, convergentes tant que ρ est suffisamment petit.

A cause des suppositions faites la fonction

$$\cos \theta Y_m(\cos \theta, \sin \theta) - \sin \theta X_m(\cos \theta, \sin \theta)$$

ne s'annule pour aucune valeur de θ . On peut alors développer le second membre de la dernière équation en série ordonnée suivant les puissances entières positives de ρ , ce qui donne

$$(24) \quad \frac{d\rho}{d\theta} = \rho V_1(\theta) + \rho^2 V_2(\theta) + \dots + \rho^\nu V_\nu(\theta) + \dots,$$

où les fonctions V_ν sont des fonctions rationnelles finies de $\cos \theta$ et $\sin \theta$. Soit $\rho(\theta, \rho_0)$ l'intégrale de cette équation prenant pour $\theta = 0$ la valeur ρ_0 . En donnant à $|\rho_0|$ une valeur suffisamment petite, la fonction $\rho(\theta, \rho_0)$ d'après un théorème bien connu de M. POINCARÉ,¹ peut alors être développée en série procédant suivant les puissances entières positives de ρ_0 , convergente pour ces valeurs de ρ_0 , tant que $0 \leq \theta \leq 2\pi$. On pourra par conséquent écrire

$$\rho(\theta, \rho_0) = \rho_0 u_1(\theta) + \rho_0^2 u_2(\theta) + \dots + \rho_0^\nu u_\nu(\theta) + \dots$$

Or on sait que

$$\rho(0, \rho_0) = \rho_0,$$

ce qui nous donne

$$u_1(0) = 1; \quad u_\nu(0) = 0, \quad \nu = 2, 3, \dots$$

En introduisant cette valeur de $\rho(\theta, \rho_0)$ dans l'équation (24) et en égalant

¹ Voir POINCARÉ: *Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*. Tome I, page 58.

les coefficients des diverses puissances de ρ_0 dans les deux membres de cette équation, on obtient une série d'équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les fonctions u_ν , à savoir

$$(25) \quad \begin{aligned} \frac{du_1}{d\theta} &= u_1 V_1(\theta), \\ \frac{du_2}{d\theta} &= u_2 V_1(\theta) + u_1^2 V_2(\theta), \\ \frac{du_3}{d\theta} &= u_3 V_1(\theta) + 2u_1 u_2 V_2(\theta) + u_1^3 V_3(\theta), \\ &\dots \end{aligned}$$

Les fonctions u_ν seront complètement déterminées par la condition que $u_1(0) = 1$, $u_\nu(0) = 0$, pour $\nu = 2, 3, \dots$.

Supposons maintenant que les $q - 1$ premières fonctions u_ν soient des fonctions périodiques de θ , mais que u_q ne soit pas périodique.

Supposons pour fixer les idées que

$$u_q(2\pi) - u_q(0) = -h < 0.$$

On aura alors

$$\rho(2\pi, \rho_0) - \rho(0, \rho_0) = \rho_0^q [-h + \rho_0[u_{q+1}(2\pi) - u_{q+1}(0)] + \dots].$$

En prenant δ suffisamment petit on aura donc

$$\rho(2\pi, \rho_0) - \rho(0, \rho_0) < 0 \quad \text{pour } 0 < \rho_0 < \delta.$$

On en conclut que

$$\rho(0, \rho_0) > \rho(2\pi, \rho_0) > \rho(4\pi, \rho_0) > \dots$$

La caractéristique du système qui rencontre la droite $y = 0$ au point ρ_0 rencontrera donc cette droite de nouveau en des points de plus en plus voisins de l'origine. Il n'existe donc pas de caractéristique fermée dans le voisinage de l'origine, et ce point sera donc un Foyer.

La condition nécessaire et suffisante, pour que l'origine soit un Centre est donc que toutes les fonctions u_ν soient des fonctions périodiques de θ , et dans ce cas l'origine sera évidemment entourée par une région où toutes les caractéristiques seront des courbes fermées.

Quant à la question de savoir si les fonctions u_ν sont des fonctions périodiques ou non, on doit observer que l'on peut toujours par des calculs algébriques déterminer, si la fonction u_1 est périodique ou non. Mais, quand il s'agit des fonctions u_ν où $\nu > 1$, les difficultés sont beaucoup plus grandes. On devra faire alors une étude analogue à celle que j'expose dans mon mémoire *Sur les équations différentielles linéaires à solutions périodiques*,¹ pour pouvoir déterminer si dans ce cas, l'on peut s'assurer par des calculs algébriques si u_ν est une fonction périodique ou non.

44. II. Si au contraire $x_1 Y_m - y_1 X_m$ a des facteurs linéaires réels, nous ferons la substitution $y_1 = x_1 \eta$, ce qui nous donne

$$(26) \quad x_1 \frac{d\eta}{dx} = \frac{Y_m(1, \eta) - \eta X_m(1, \eta) + x_1 \bar{Y}}{X_m(1, \eta) + x_1 \bar{X}},$$

\bar{X} et \bar{Y} désignant des séries de TAYLOR en x_1 et en η .

Soient $k_1 < k_2 < \dots < k_s$ les différentes racines réelles de l'équation

$$Y_m(1, \eta) - \eta X_m(1, \eta) = 0,$$

on sait que, à cause des suppositions faites,

$$\frac{d}{d\eta} [Y_m(1, \eta) - \eta X_m(1, \eta)] \neq 0, \quad \text{pour } \eta = k,$$

En vertu des développements du chapitre précédent on sait alors déterminer complètement la nature de chaque point singulier, $x_1 = 0$, $\eta = k_\nu$, de l'équation (26). En particulier on sait qu'il passe par un tel point, $x_1 = 0$, $\eta = k_\nu$, au moins une caractéristique autre que la droite $x_1 = 0$. Il existe donc certainement des caractéristiques du système (23) aboutissant à l'origine avec une tangente déterminée. On en conclut que toutes les caractéristiques aboutissant à l'origine y ont des tangentes déterminées.

Les directions des tangentes possibles seront alors données par l'équation

$$x_1 Y_m - y_1 X_m = 0.$$

Au moyen de l'hypothèse que $X_m(0, \eta) \neq 0$, on a fait en sorte qu'il n'y ait pas de caractéristique aboutissant à l'origine avec la tangente $x_1 = 0$,

¹ Voir Öfversigt af Kongl. Vet. Akad. Förh. 11 Mars 1896.

et on a évité de cette manière la discussion des points à distance infinie de l'équation (26).

On déterminera donc toutes les caractéristiques du système (23) aboutissant à l'origine, si l'on sait déterminer toutes les caractéristiques de l'équation (26) aboutissant aux points singuliers $x_1 = 0$, $\eta = k_v$, problème que nous avons résolu dans le chapitre précédent.

Observons d'abord que, s'il existe une caractéristique de l'équation (26) traversant le point $x_1 = 0$, $\eta = k_v$, l'axe des η est nécessairement l'une des branches de cette caractéristique. On en conclut que les deux branches d'une caractéristique du système (23) qui traversent l'origine n'aboutissent pas en ce point avec la même tangente. Si l'une de ces branches aboutit à l'origine avec la tangente $y_1 - k_v x_1 = 0$, l'autre y parviendra ou avec la tangente $y_1 - k_{v+1} x_1 = 0$, ou avec la tangente $y_1 - k_{v-1} x_1 = 0$.

Étudions les divers cas qui peuvent se présenter, en nous bornant pourtant, pour fixer les idées, aux caractéristiques situées à droite de l'axe des y . Désignons à cet effet par P_1, P_2, \dots, P_s , les différents points $x = 0$, $\eta = k_v$, du plan des x, η , et par L_v la partie de l'axe des η interceptée entre P_v et P_{v+1} .

On devra distinguer les cas suivants .

1) L_{v0} peut être prolongé au delà de P_v et de P_{v+1} .

Soit alors (L_{v0}, L_v) la caractéristique traversant P_v , et (L_{v0}, L_{v+1}) celle traversant P_{v+1} . Soient de plus L'_v et L'_{v+1} les caractéristiques du système (23) correspondant à L_v et L_{v+1} de l'équation (26). Il est alors évident que la caractéristique (L'_v, L'_{v+1}) traverse l'origine. Car par un point très voisin de L_v , et situé entre L_v et L_{v+1} , passe alors une caractéristique qui ne rencontre pas l'axe des η et qui est située entre L_v et L_{v+1} . Par le point correspondant du plan des x_1, y_1 passe alors une caractéristique n'aboutissant pas à l'origine, et située entre L'_v et L'_{v+1} .

2) L_{v0} peut être prolongé au delà de P_v , mais L_{v0} finit en P_{v+1} .

Si L_v désigne le prolongement de L_{v0} , et L'_v la caractéristique du plan des x_1, y_1 , correspondant à L_v , on s'assure aisément qu'une caractéristique passant par un point du plan des (x_1, y_1) très voisin de L_v et situé audessus de cette courbe, finira en P_{v+1} . La caractéristique correspondante du plan des x_1, y_1 , s'arrêtera donc à l'origine et appartiendra à une région nodale ouverte.

Si $L_{\nu 0}$ peut être prolongé au delà de $P_{\nu+1}$, mais finit en P_{ν} , on s'assure de la même manière qu'il existe une région nodale ouverte dont les caractéristiques aboutiront à l'origine avec $y_1 - k_{\nu}x_1 = 0$ pour tangente.

3) Si enfin $L_{\nu 0}$ s'arrête et en P_{ν} et en $P_{\nu+1}$, il est évident qu'une caractéristique passant par un point très voisin de $L_{\nu 0}$ s'arrêtera et en P_{ν} et en $P_{\nu+1}$. La caractéristique correspondante du plan des x_1, y_1 appartiendra donc à une *région nodale fermée*.

C'est donc seulement dans le cas 1) que le système (23) possède une caractéristique située à droite de l'axe des y et traversant l'origine. Elle traversera alors l'origine d'une manière telle que l'une des branches y ait la droite $y - k_{\nu}x = 0$ pour tangente, et que l'autre parvienne à l'origine avec la droite $y - k_{\nu+1}x = 0$ pour tangente.

Il est évident que ce procédé s'applique aussi au cas où il s'agit de déterminer, s'il existe une caractéristique traversant l'origine et dont les deux branches y auront pour tangentes les deux droites $y_1 - k_{\nu}x_1 = 0$ et $y_1 - k_1x_1 = 0$. On doit seulement observer que par un point très voisin de l'axe des η , situé à droite de cet axe et au-dessus de la droite $\eta = k_{\nu}$, passera une caractéristique s'éloignant vers l'infini et dont le prolongement sera une caractéristique très voisine de l'axe des η , située à gauche de cet axe et allant de $\eta = -\infty$ vers $\eta = k_1$, chose dont on s'assure aisément en effectuant la substitution $x_1 = \xi y_1$ et en étudiant l'équation différentielle

$$y_1 \frac{d\xi}{dy_1} = \frac{X_m(\xi, 1) - \xi Y_m(\xi, 1) + y_1 \bar{X}}{Y_m(\xi, 1) + y_1 \bar{Y}}$$

entre les variables ξ et y_1 .

45. Envisageons maintenant le système (26'). La substitution $y_1 = x_1 \eta$ donnera

$$(27) \quad \frac{d\eta}{dx_1} = x_1^{r-1} \frac{Z(x_1, \eta)}{Q_{m-1}(1, \eta) + x_1 Z_1}, \quad r \geq 1.$$

Comparer à ce sujet le n° 23.

Supposons d'abord que $r = 1$. L'équation (27) n'aura donc en général pas de point singulier situé sur l'axe des η . Par chaque point $x_1 = 0$, $\eta = k$ passe alors une caractéristique à laquelle correspondent deux caractéristiques du système (23) aboutissant à l'origine et ayant $y_1 - kx_1 = 0$, pour tangente.

On distinguera alors les cas suivants:

I. Si $Q_{m-1}(1, k) \neq 0$, la caractéristique du plan des x_1, η , passant par le point $x_1 = 0, \eta = k$, passera de l'un côté à l'autre de l'axe des η , et il s'ensuit que les caractéristiques voisines couperont de même nécessairement cet axe.

Les caractéristiques du plan des x_1, y_1 , correspondant aux demi-caractéristiques du plan des x_1, η , situées à gauche de l'axe des η , aboutiront donc toutes à l'origine, ce qui met en évidence que toutes ces caractéristiques appartiennent à une région nodale.

Il en sera évidemment de même pour les caractéristiques du plan des x_1, y_1 correspondant aux demi-caractéristiques du plan des x_1, η , qui sont situées à droite de l'axe des η .

II. Si au contraire $Q_{m-1}(1, k) = 0, \chi(0, k) \neq 0$, on devra distinguer deux cas suivant que la première dérivée de $Q_{m-1}(1, \eta)$ qui ne s'annule pas pour $\eta = k$ est d'ordre pair ou est d'ordre impair.

Si son ordre est un nombre pair, la caractéristique passant par le point $x_1 = 0, \eta = k$, passera de l'un côté à l'autre de l'axe des η , et la discussion sera identique à celle qui vient d'être faite.

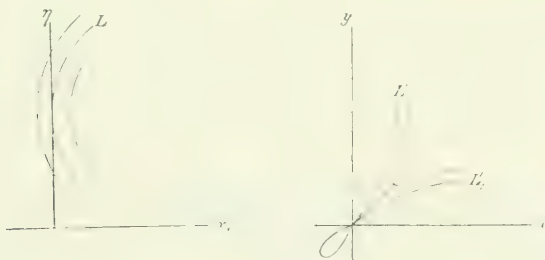


Fig. VIII.

Si au contraire la première dérivée de $Q_{m-1}(1, \eta)$ qui ne s'annule pas est d'ordre impair, la caractéristique L passant par le point $x_1 = 0, \eta = k$ sera tangente à l'axe des η (voir fig. VIII) et sera située de l'un des côtés de cet axe, ce qui met en évidence que les caractéristiques voisines, situées de l'un des côtés de L , couperont l'axe des η en deux points voisins du point $x_1 = 0, \eta = k$ et que les caractéristiques situées de l'autre côté s'éloigneront de l'axe

des η . A la caractéristique L correspondra donc dans le plan des x_1, y_1 deux branches de caractéristiques L' et L'_1 aboutissant à l'origine avec la même tangente $y_1 - kx_1 = 0$, et situées toutes les deux du même côté de l'axe des y_1 , et il est alors évident que la caractéristique (L', L'_1) traverse l'origine (voir Fig. VIII).

De l'autre côté de l'axe des η une caractéristique voisine de L ira couper l'axe des η en deux points, ce qui met en évidence que l'on aura dans le plan des x_1, y_1 une région nodale fermée située de l'autre côté de l'axe des y_1 .

Aux caractéristiques passant par des points de l'axe des η voisins du point $x_1 = 0$, $\eta = k$ correspondront dans ce cas dans le plan des x_1, y_1 une caractéristique traversant l'origine et une région nodale fermée.

Si l'équation

$$Q_{m-1}(1, \eta) = 0$$

a s racines réelles dont aucune n'est racine de $\chi(0, \eta) = 0$, il existe alors en général s courbes intégrales traversant l'origine et s régions nodales fermées.

III. Si $Q_{m-1}(1, k) = 0$, $\chi(0, k) = 0$, le point $x_1 = 0$, $\eta = k$ est un point singulier qui sera en général de la forme traitée dans le chapitre précédent. L'équation déterminant les tangentes possibles des caractéristiques aboutissant à ce point nous montre qu'il n'y a pas de caractéristique tangente à l'axe des η . Soit i_1 l'indice du point $x_1 = 0$, $\eta = k$, et $c_1 = 2(i_1 + 1)$ le nombre de caractéristiques traversant ce point, on distinguera les cas suivants:

1) $i_1 = -1$, $c_1 = 0$. Les caractéristiques passant par des points de l'axe des η très voisins du point $x = 0$, $\eta = k$, aboutiront alors toutes à ce point. Les caractéristiques passant par des points où $\eta < k$ correspondront donc à une région nodale fermée du plan des x_1, y_1 , et celles qui passent par des points où $\eta > k$ correspondront à une autre région nodale fermée de ce plan.

2) $i_1 = 0$; $c_1 = 2$. Il existe alors deux courbes intégrales traversant le point $x = 0$, $\eta = k$. L'une de ces courbes sera telle que l'une de ses branches sera située d'un côté et l'autre de l'autre de l'axe des η . A cette caractéristique ne correspond évidemment pas de caractéristique du plan des x_1, y_1 traversant l'origine. L'autre caractéristique qui traverse le point $x = 0$, $\eta = k$, sera telle que les branches sont toutes les deux situées

du même côté de l'axe des η . A cette caractéristique correspond évidemment une caractéristique du plan des x_1, y_1 traversant l'origine.

On prouve de la même manière qu'au cas 1), qu'on aura aussi une région nodale fermée correspondant à $x_1 = 0, \eta = k$.

3) $i_1 = 1; c_1 = 4$. On voit alors qu'il existe deux caractéristiques traversant le point $x_1 = 0, \eta = k$, dont les deux branches sont situées du même côté de l'axe des η . A ces caractéristiques correspondent alors dans le plan des x_1, y_1 deux caractéristiques traversant l'origine, et dans ce cas il n'y aura pas de région nodale fermée.

Si enfin $r > 1$, toutes les racines de l'équation

$$Q_{m-1}(1, \eta) = 0$$

nous donneront des points singuliers de l'équation (27) situés sur l'axe des η , et la discussion de ces points est tout analogue à celle du cas où $r = 1$. On doit seulement observer que si l'on a

$$Q_{m-1}(1, k) = 0; \quad \chi(0, k) = 0;$$

le point $x_1 = 0, \eta = k$ ne rentrera pas dans les cas traités dans le chapitre précédent.

CHAPITRE V.

Le cas général.

46. Au moyen d'une substitution de la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha x + \beta y, \\ y_1 &= \gamma x + \delta y, \end{aligned} \quad \text{où } \alpha\delta - \beta\gamma > 0,$$

on peut alors réduire le système (11) à l'une des formes (23) et (23'). Si on est en présence du système (23), la substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1, \\ y_1 &= (\eta_1 + k_1)\xi_1, \end{aligned}$$

où k_1 est une racine réelle de l'équation

$$(28) \quad Y_m(1, \eta) - \eta X_m(1, \eta) = 0,$$

nous donne un système de la forme

$$(29) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt_1} &= \xi_1 [X_m(1, \eta_1 + k_1) + \xi_1 \varphi], \\ \frac{d\eta_1}{dt_1} &= Y_m(1, \eta_1 + k_1) - (\eta_1 + k_1) X_m(1, \eta_1 + k_1) + \xi_1 \psi, \end{aligned}$$

φ et ψ désignant des séries de TAYLOR en ξ_1, η_1 , convergentes dans le voisinage de $\xi_1 = 0, \eta_1 = 0$.

A une caractéristique du système (23) aboutissant à l'origine et y ayant pour tangente $y_1 - k_1 x_1 = 0$, correspondra alors une caractéristique du système (29) aboutissant à l'origine.

S'il existe des courbes intégrales du premier système aboutissant à l'origine avec des tangentes déterminées, on les obtiendra toutes en déterminant les caractéristiques de tous les systèmes (29) passant par l'origine (correspondant aux différentes racines de l'équation (28)).

On doit observer de plus que toutes les caractéristiques du système (29) aboutissant à l'origine, y auront des tangentes déterminées, car il existe toujours une caractéristique, à savoir $\xi_1 = 0$, qui aboutit à l'origine avec une tangente déterminée.

On aura en outre

$$\begin{aligned} \alpha X + \beta Y &= \xi_1^m [X_m(1, \eta_1 + k_1) + \xi_1 \varphi], \\ [\gamma - \alpha(k_1 + \eta_1)] X + [\delta - \beta(k_1 + \eta_1)] Y \\ &= \xi_1^m [Y_m(1, \eta_1 + k_1) - (\eta_1 + k_1) X_m(1, \eta_1 + k_1) + \xi_1 \psi]. \end{aligned}$$

Si au contraire on est en présence du système (23'), et si k_1 est une racine réelle de

$$(28') \quad Q_{m-1}(1, \eta_1) = 0$$

la substitution en question réduit l'étude des caractéristiques du système (23') aboutissant à l'origine avec la tangente $y - k_1 x = 0$, à celle des caractéristiques aboutissant à l'origine d'un système d'équations de la forme

$$(29') \quad \begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt_1} &= Q_{m-1}(1, \eta_1 + k_1) + \xi_1 \varphi, \\ \frac{d\eta_1}{dt_1} &= \xi_1^{r-1} \chi(\xi_1, \eta_1), \end{aligned} \quad \text{où } r \geq 1.$$

On doit observer pourtant qu'il nous suffit d'étudier les caractéristiques de ce système aboutissant à l'origine avec des tangentes déterminées car une spirale se rapprochant indéfiniment de l'origine de l'équation (29') coupera nécessairement la droite $\xi_1 = 0$ en une infinité de points réguliers et ne nous donnera donc pas de caractéristiques du système (23') autres que celles qu'on obtient en étudiant les points réguliers de la droite $\xi_1 = 0$. Dans le cas où l'origine du système (29') est un *Foyer* (ou un *Centre*) il n'existe évidemment pas de caractéristique du système (23') aboutissant à l'origine avec la tangente $y_1 - k_1 x_1 = 0$; mais cette droite sera comprise dans deux régions nodales fermées, l'une située à gauche de l'axe des y , l'autre à droite.

A chaque demi-droite tirée de l'origine dans une direction voisine de celle de $y - k_1 x = 0$, correspondra alors une caractéristique appartenant à l'une de ces régions nodales fermées et aboutissant à l'origine de manière à y avoir pour tangente la demi-droite en question. Voir Fig. IX.



FIG. IX.

Les expressions des seconds membres du système (29') seront données par les équations suivantes:

$$\alpha X + \beta Y = \xi_1^m [Q_{m-1}(1, \eta_1 + k_1) + \xi_1 \varphi],$$

$$[\gamma - \alpha(k_1 + \eta_1)]X + [\delta - \beta(k_1 + \eta_1)]Y = \xi_1^{m+1} [\xi_1^{-1} \chi(\xi_1, \eta_1)].$$

47. Résumons enfin les résultats obtenus: Etant donné un système d'équations différentielles de la forme

$$(30) \quad \frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y,$$

on peut donc toujours par une substitution bilinéaire convenable réduire l'étude des caractéristiques de ce système à celle des caractéristiques, aboutissant à l'origine avec des tangentes déterminées, des divers systèmes d'équations de la forme

$$(31) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt_1} &= X_1(\xi_1, \eta_1), \\ \frac{d\eta_1}{dt_1} &= Y_1(\xi_1, \eta_1), \end{aligned}$$

où les termes de la plus petite dimension sont de l'ordre $m_1 \leq m+1$, et où l'on a

$$\alpha X + \beta Y = \xi_1^{m+1} X_1,$$

$$[\gamma - \alpha(k_1 + \eta_1)]X + [\delta - \beta(k_1 + \eta_1)]Y = \xi_1^{m+\varepsilon} Y_1,$$

ε étant une quantité égale à 1 ou à zéro, suivant que le polynôme de dimension en $xY - yX$ s'annule identiquement ou non. On aura donc enfin

$$(32) \quad \begin{aligned} X &= \xi_1^{m-1}[(a + b\eta_1)\xi_1^\varepsilon X_1 + b\xi_1^{1+\varepsilon} Y_1], \\ Y &= \xi_1^{m-1}[(c + d\eta_1)\xi_1^\varepsilon X_1 + d\xi_1^{1+\varepsilon} Y_1], \end{aligned}$$

les quantités a, b, c, d étant données par les équations suivantes

$$a = \frac{\delta - \beta k_1}{\alpha\delta - \beta\gamma}; \quad b = -\frac{\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma}; \quad c = -\frac{\gamma + \alpha k_1}{\alpha\delta - \beta\gamma}; \quad d = \frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma}.$$

Nous supposons en outre que les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont choisies de telle sorte que

$$\delta - \beta k_1 \neq 0,$$

k_1 désignant une racine quelconque de l'équation (28) ou de l'équation (28').

48. En écrivant la substitution bilinéaire sous la forme suivante

$$(33) \quad \begin{aligned} x &= (a + b\eta_1)\xi_1, \\ y &= (c + d\eta_1)\xi_1, \end{aligned} \quad a \neq 0$$

nous pouvons donc affirmer qu'au moyen d'une telle substitution on peut réduire l'étude des courbes intégrales du système (30) aboutissant à l'origine avec des tangentes déterminées à celle des caractéristiques aboutissant à l'origine avec des tangentes déterminées des divers systèmes de la forme (31) où les fonctions X_1, Y_1 et X, Y , sont assujetties aux relations (32).

49. En traitant le système (31) de la même manière on peut donc réduire l'étude de l'origine de ce système à celle de l'origine de divers systèmes d'équations différentielles

$$(31') \quad \begin{aligned} \frac{d\tilde{\xi}_2}{dt_2} &= X_2(\tilde{\xi}_2, \eta_2), \\ \frac{d\eta_2}{dt_2} &= Y_2(\tilde{\xi}_2, \eta_2), \end{aligned}$$

que l'on obtient au moyen de substitutions de la forme

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_1 &= (a_1 + b_1\eta_2)\tilde{\xi}_2, \\ \eta_1 &= (c_1 + d_1\eta_2)\tilde{\xi}_2, \end{aligned} \quad a_1 \neq 0$$

où les termes de la plus petite dimension sont de l'ordre $m_2 \leq m_1 + 1$, et où

$$\begin{aligned} X_1 &= \tilde{\xi}_2^{m_1-1}[(a_1 + b_1\eta_2)\tilde{\xi}_2^{s_1}X_2 + b_1\tilde{\xi}_2^{1+s_1}Y_2], \\ Y_1 &= \tilde{\xi}_2^{m_1-1}[c_1 + d_1\eta_2]\tilde{\xi}_2^{s_1}X_2 + d_1\tilde{\xi}_2^{1+s_1}Y_2]. \end{aligned}$$

En continuant ainsi on sera en général conduit à étudier les équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\xi}_\nu}{dt_\nu} &= X_\nu(\tilde{\xi}_\nu, \eta_\nu), \\ \frac{d\eta_\nu}{dt_\nu} &= Y_\nu(\tilde{\xi}_\nu, \eta_\nu), \end{aligned}$$

que l'on obtient au moyen des substitutions

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_{\nu-1} &= (a_{\nu-1} + b_{\nu-1}\eta_\nu)\tilde{\xi}_\nu, \\ \eta_{\nu-1} &= (c_{\nu-1} + d_{\nu-1}\eta_\nu)\tilde{\xi}_\nu, \end{aligned} \quad a_{\nu-1} \neq 0,$$

et où

$$\begin{aligned} X_{\nu-1} &= \tilde{\xi}_\nu^{m_{\nu-1}-1}[(a_{\nu-1} + b_{\nu-1}\eta_\nu)\tilde{\xi}_\nu^{s_{\nu-1}}X_\nu + b_{\nu-1}\tilde{\xi}_\nu^{s_{\nu-1}+1}Y_\nu], \\ Y_{\nu-1} &= \tilde{\xi}_\nu^{m_{\nu-1}-1}[c_{\nu-1} + d_{\nu-1}\eta_\nu]\tilde{\xi}_\nu^{s_{\nu-1}}X_\nu + d_{\nu-1}\tilde{\xi}_\nu^{s_{\nu-1}+1}Y_\nu]. \end{aligned}$$

On aura alors

$$(34) \quad \begin{aligned} x &= (a + b\eta_1)(a_1 + b_1\eta_2) \dots (a_{\nu-1} + b_{\nu-1}\eta_\nu)\tilde{\xi}, \\ y &= (c + d\eta_1)(c_1 + b_1\eta_2) \dots (c_{\nu-1} + b_{\nu-1}\eta_\nu)\tilde{\xi} \end{aligned}$$

et

$$(35) \quad \begin{aligned} X &= \xi_\nu^{m-1+m_1-1+\dots+m_{\nu-1}-1} \overline{X}_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu), \\ Y &= \xi_\nu^{m-1+m_1-1+\dots+m_{\nu-1}-1} \overline{Y}_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu), \end{aligned}$$

où X_ν et \overline{Y}_ν désignent des séries de TAYLOR en ξ_ν et η_ν convergentes dans le voisinage de $\xi_\nu = 0$, $\eta_\nu = 0$.

50. Je dis qu'en prenant ν suffisamment grand, on parviendra toujours à des fonctions \overline{X}_ν et \overline{Y}_ν telles que leurs termes de la plus petite dimension soient tout au plus du premier ordre.

En posant

$$\begin{aligned} hx + ky &= \xi, \\ h_1x + k_1y &= \eta, \end{aligned}$$

après avoir choisi les constantes h, k, h_1, k_1 d'une manière convenable, on sait en effet, d'après un théorème bien connu de WEIERSTRASS,¹ qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} \alpha X + \beta Y &= [\eta^m + \varphi_1(\xi)\eta^{m-1} + \dots + \varphi_m(\xi)]e^{\mathfrak{P}(\xi, \eta)}, \\ \gamma X + \delta Y &= [\eta^m + \phi_1(\xi)\eta^{m-1} + \dots + \phi_m(\xi)]e_1^{\mathfrak{P}(\xi, \eta)}, \end{aligned}$$

les fonctions φ_ν, ϕ_ν ainsi que \mathfrak{P} et \mathfrak{P}_1 étant des séries de TAYLOR convergentes dans le voisinage de $\xi = 0$, $\eta = 0$.

En faisant

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \eta) &= \eta^m + \varphi_1(\xi)\eta^{m-1} + \dots + \varphi_m(\xi), \\ \phi(\xi, \eta) &= \eta^m + \phi_1(\xi)\eta^{m-1} + \dots + \phi_m(\xi), \end{aligned}$$

on aura alors en vertu des équations (35)

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \eta) &= \xi_\nu^{m-1+m_1-1+\dots+m_{\nu-1}-1} X'_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu), \\ \phi(\xi, \eta) &= \xi_\nu^{m-1+m_1-1+\dots+m_{\nu-1}-1} Y'_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu), \end{aligned}$$

les fonctions X'_ν et Y'_ν étant des séries de TAYLOR convergentes dans le voisinage de $\xi_\nu = 0$, $\eta_\nu = 0$.

¹ Voir WEIERSTRASS: *Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze*. Math. Werke, tome II.

Appliquons maintenant la méthode de la recherche du plus grand commun diviseur aux deux polynômes en η , φ et ψ . On pourra alors déterminer deux polynômes en η , $L(\xi, \eta)$, $M(\xi, \eta)$ dont les coefficients sont des fonctions holomorphes en ξ , tels que l'on ait

$$(36) \quad L(\xi, \eta) \cdot \varphi(\xi, \eta) + M(\xi, \eta) \cdot \psi(\xi, \eta) = \mathfrak{P}(\xi),$$

\mathfrak{P} désignant une série de TAYLOR en ξ , convergente dans le voisinage de $\xi = 0$, et que l'on pourra mettre sous la forme

$$\mathfrak{P}(\xi) = \xi^s e^{\mathfrak{P}_1(\xi)}$$

où s sera un nombre entier facile à déterminer et \mathfrak{P}_1 une autre série de TAYLOR convergente dans le voisinage de $\xi = 0$.

Choisissons enfin les constantes h et k de sorte que l'on ait

$$ha + kc \neq 0,$$

et introduisons dans l'équation (36) les nouvelles variables ξ_ν, η_ν .

Les équations (34) nous apprennent alors que le second membre de l'équation (36) est divisible par ξ_ν^s mais ne l'est pas par ξ_ν^{s+1} . Le premier membre sera au contraire divisible par $\xi_\nu^{m-1+m_1-1+\dots+m_{\nu-1}-1}$.

Il s'ensuit que si $\nu > s$ l'une des quantités $m-1, m_1-1, \dots, m_{\nu-1}-1$ sera nécessairement égale à zéro.

Il est donc établi qu'on parviendra toujours à un système de la forme

$$\frac{d\xi_\nu}{dt_\nu} = X_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu),$$

$$\frac{d\eta_\nu}{dt_\nu} = Y_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu),$$

où les termes de la dimension minima sont au plus du premier ordre.

c. q. f. d.

51. On pourra donc toujours, à l'aide de la méthode de réduction développée ici, réduire l'étude de l'origine du système (30) à l'étude des courbes intégrales de diverses équations différentielles dont les termes de la plus petite dimension sont au plus du premier ordre. Les seuls de ces systèmes que nous ne sachions pas encore traiter sont ceux de la forme (22), et il ne nous reste donc à traiter qu'un système de cette forme.

Observons d'abord que les caractéristiques de ce système aboutissant à l'origine avec des tangentes déterminées y aboutiront avec $\eta - \alpha \xi = 0$ pour tangente.

Au moyen de la substitution

$$\eta = (\alpha + \eta_1)\xi_1, \quad \xi_1 = \xi$$

on obtient alors

$$(37) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= \xi_1[\eta_1 + \xi_1\varphi], \\ \frac{d\eta_1}{dt} &= -\eta_1^2 + \xi_1\psi(\xi_1, \eta_1), \end{aligned}$$

φ et ψ désignant des séries de TAYLOR.

Si $\psi(0, 0)$ ne s'annule pas, les caractéristiques aboutissant à l'origine avec des tangentes déterminées y aboutiront toutes avec $\xi_1 = 0$ pour tangente.

En faisant alors

$$\xi_1 = x_1\eta_1$$

on obtient

$$(38) \quad \begin{aligned} \frac{d\eta_1}{dt} &= -\eta_1^2 + x_1\eta_1\psi(0, 0) + \phi_3, \\ \frac{dx_1}{dt} &= 2x_1\eta_1 - x_1^2\psi(0, 0) + \varphi_3, \end{aligned}$$

ϕ_3 et φ_3 ne contenant que des termes de dimension supérieure à 2.

L'équation déterminant les tangentes à l'origine sera ici

$$x_1\eta_1(2x_1\psi(0, 0) - 3\eta) = 0.$$

Toutes ces tangentes étant distinctes nous savons traiter le système (38) à l'aide de la méthode du chapitre IV.

La substitution $\eta = (\alpha + \eta_1)\xi$ conduira donc à un système que nous savons déjà traiter ou à un système (37) tel que $\psi(0, 0) = 0$, dont les termes de la plus petite dimension seront évidemment d'ordre 2. En traitant ce système par notre méthode de réduction donnée dans ce chapitre, on parviendra ou à un système que nous savons déjà traiter ou à un système de la forme (22); ce dernier conduira à un système dont les termes de la plus petite dimension sont d'ordre 2, dans le cas où il ne conduit pas à un système que nous savons traiter.

Mais l'équation (36) met en évidence que nous ne pouvons pas rencontrer plus de s pareils systèmes d'équations dont les termes de la plus petite dimension sont d'ordre 2, et il s'ensuit que nous parviendrons toujours à des systèmes d'équations différentielles que nous savons traiter.

c. q. f. d.

52. La méthode de réduction développée ici offre la plus grande analogie avec celle qui a été employée par WEIERSTRASS pour l'étude des fonctions algébriques; je l'ai d'abord publiée dans un mémoire présenté à l'académie des sciences à Stockholm le 9 nov. 1898 et intitulé *Sur les points singuliers des équations différentielles*.

En appliquant cette méthode de réduction on sera donc conduit à étudier une suite d'équations différentielles de la forme

$$(39) \quad x^m \frac{dy}{dx} = ay + bx + c + \mathfrak{P}(x, y)$$

où \mathfrak{P} désigne une série de TAYLOR convergente pour des valeurs suffisamment petites de x et de y , et ne contenant que des termes au moins de la deuxième dimension.

Si $c \neq 0$, le point $x = 0, y = 0$, est un point régulier.

Dans le cas où toutes les équations différentielles (39) qu'on doit étudier sont telles que $x = 0, y = 0$ est un point régulier, on en conclut qu'il n'y a pas de caractéristique aboutissant à l'origine avec une tangente déterminée, et l'origine sera alors un Foyer ou un Centre. Inversément il est évident qu'il existe toujours au moins une branche de caractéristique aboutissant à l'origine avec une tangente déterminée, pourvu que l'une des équations (39) que l'on aura alors à étudier soit telle que $c = 0$.

Dans le cas où il existe des caractéristiques aboutissant à l'origine avec des tangentes déterminées, notre méthode permet toujours de déterminer les nombres c, n, n_f .

Dans le cas au contraire où il n'y a pas de caractéristique aboutissant à l'origine avec une tangente déterminée, notre méthode ne permet pas de décider si on est en présence d'un Foyer ou d'un Centre. L'étude de ces cas semble en général offrir des difficultés considérables que je n'ai pas su vaincre.

CHAPITRE VI.

Quelques théorèmes relatifs aux cas où X et Y sont des polynomes.

53. Dans le cas où X et Y sont des polynomes, on peut étudier les caractéristiques à distance infinie de la même manière que dans le voisinage d'un point singulier ordinaire. Supposons en effet que nos équations soient de la forme

$$(40) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X_{q-1}(x, y) + X_q(x, y) = X, \\ \frac{dy}{dt} &= Y_{q-1}(x, y) + Y_q(x, y) = Y, \end{aligned}$$

où X_q et Y_q sont des polynomes de dimension q , et où X_{q-1} , Y_{q-1} ne contiennent pas de termes de dimension $> q-1$.

Nous ferons une substitution de la forme

$$(41) \quad \bar{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \bar{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

A un cercle $x^2 + y^2 = R^2$, dans le plan des x, y , de rayon très grand R , correspond alors un cercle, $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = \frac{1}{R^2}$, dans le plan des \bar{x}, \bar{y} de rayon très petit $\frac{1}{R}$. Il nous suffit donc d'étudier le point $\bar{x}=0, \bar{y}=0$ dans la nouvelle équation en \bar{x} et en \bar{y} qu'on obtient.

Or les équations (40) donnent

$$(42) \quad \begin{aligned} \frac{d\bar{y}}{dt} &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} [x(xY - yX) - y(xX + yY)], \\ \frac{d\bar{x}}{dt} &= \frac{-1}{(x^2 + y^2)^2} [y(xY - yX) + x(xX + yY)]. \end{aligned}$$

On aura donc

$$(43) \quad \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{y[xX + yY] - x[xY - yX]}{x[xX + yY] + y[xY - yX]} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)},$$

où \bar{Y} et \bar{X} sont des polynômes en \bar{x} et \bar{y} dont les termes de la plus petite dimension sont

$$\bar{y}[\bar{x}Y_q(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{y}Y_q(\bar{x}, \bar{y})] - \bar{x}[\bar{x}Y_q(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{y}X_q(\bar{x}, \bar{y})]$$

et

$$\bar{x}[\bar{x}X_q(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{y}Y_q(\bar{x}, \bar{y})] + \bar{y}[\bar{x}Y_q(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{y}X_q(\bar{x}, \bar{y})].$$

L'équation déterminant les directions des tangentes à l'origine nouvelle sera

$$\bar{x}Y_q(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{y}X_q(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

et on en conclut que les directions des tangentes à l'infini du système (40) seront données par

$$(44) \quad xY_q(x, y) - yX_q(x, y) = 0.$$

On doit comparer à ceci la méthode de projection employée par M. POINCARÉ pour l'étude des points à l'infini.

Si l'équation (44) par exemple n'est satisfaite par aucune valeur réelle de $\frac{x}{y}$, l'infini sera un Foyer ou un Centre. Cela correspond chez M. POINCARÉ au cas où l'équateur est une caractéristique qui ne passe par aucun point singulier.

Les autres cas étudiés par l'illustre géomètre sont ceux où l'équation (44) n'a pas de facteur linéaire réel multiple.

Le cas où l'équation (44) est identiquement satisfaite correspondrait, ce me semble, dans la terminologie de M. POINCARÉ, au cas où chaque point de l'équateur est un point singulier.

Le nombre total des points singuliers (y compris le point à l'infini) étant dans ce cas un nombre fini, on peut donner la forme suivante au théorème VII de la page 28:

Théorème. *Une demi-caractéristique L sera ou bien une courbe fermée, ou bien s'approchera indéfiniment d'une caractéristique fermée, ou enfin s'arrêtera dans un point singulier.*

Il sera toujours possible de faire la discussion complète des caractéristiques du système (40) dans le voisinage des points singuliers à l'aide des méthodes développées dans ce mémoire.

Quant à la détermination des caractéristiques fermées, c'est un problème d'une nature beaucoup plus compliquée. Pour l'étude de ce problème nous renvoyons le lecteur aux travaux de M. POINCARÉ.

Il existe pourtant un cas où il est facile de s'assurer qu'il n'existe pas de caractéristique fermée. C'est quand l'équation

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$$

ne représente pas de courbe réelle. On aura en effet

$$\iint_A \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right] dx dy = - \int_S Y dx - X dy,$$

S désignant une courbe fermée, et A l'aire comprise à son intérieur. Si S est une caractéristique fermée, on aura donc

$$\iint_A \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right] dx dy = 0,$$

ce qui met en évidence que l'aire A doit être traversée par l'une des courbes satisfaisant à l'équation $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$.

54. Maintenant soit i_∞ l'indice du point $\bar{x} = 0, y = 0$ de l'équation (43) et soient i_1, i_2, \dots, i_m , les indices des différents points singuliers finis P_1, P_2, \dots, P_m , du système (40). Nous voulons prouver que la relation suivante

$$(45) \quad i_\infty + \sum_{\nu=1}^m i_\nu = -2,$$

subsiste toujours.

A cet effet soit I l'indice de la fonction

$$\frac{xX + yY}{xY - yX}$$

pour un contour fermé C entourant l'origine, et soient P_1, P_2, \dots, P_r les points singuliers du système (40) situés à l'intérieur de C . On aura alors la relation

$$(46) \quad I = -i_1 - i_2 - \dots - i_r - 1.$$

En effet supposons qu'on ait choisi les axes de telle manière qu'aucun des P_ν ne soit situé sur l'axe des x . Les seuls points où le numérateur et le dénominateur de la fonction $\frac{xX + yY}{xY - yX}$ s'annulent simultanément sont P_1, P_2, \dots, P_r , et l'origine. L'indice I sera donc égal à la somme des indices de ces points pour la fonction $\frac{xX + yY}{xY - yX}$.

Or cette fonction passe par zéro de la même manière exactement que la fonction

$$\frac{x}{y} - \frac{Y}{X}$$

(voir page 40). On en conclut que I est égal à l'indice de cette dernière fonction sur le contour C . Mais au point P_ν l'indice de la fonction $-\frac{x}{y} - \frac{Y}{X}$ est évidemment égal à $-i_\nu$, et à l'origine son indice est égal à -1 , ce qui met en évidence que l'équation (46) a lieu.

Maintenant prenons pour contour C le cercle $x^2 + y^2 = R^2$, comprenant à son intérieur tous les points singuliers P_1, P_2, \dots, P_m du système (40).

Quand le point x, y , parcourt le cercle $x^2 + y^2 = R^2$ dans le sens positif, le point correspondant \bar{x}, \bar{y} , parcourt le cercle $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = \frac{1}{R^2}$ dans le sens positif. Or on a

$$\frac{\bar{x}\bar{X} + \bar{y}\bar{Y}}{\bar{x}\bar{Y} - \bar{y}\bar{X}} = \frac{xX + yY}{xY - yX}.$$

L'indice du second membre sera sur le cercle C égal à $\sum_{\nu=1}^m i_\nu + 1$ et celui du membre premier sera sur le cercle $x^2 + y^2 = \frac{1}{R^2}$ égal à $-i_\infty - 1$, ce qui finalement donne

$$i_\infty + \sum_{\nu=1}^m i_\nu = -2.$$

En désignant par c^ν et n_f^ν les nombres c et n_f correspondant au point P_ν , cette relation peut s'écrire

$$(45') \quad c^\infty - n_f^\infty + \sum_{\nu=1}^m [c^\nu - n_f^\nu] = 2(m - 1).$$

On peut en conclure quelques résultats intéressants.

1) Dans le cas où il n'y a pas de point singulier fini, le point à l'infini sera nécessairement un point singulier auquel appartiendront au moins deux régions nodales fermées.

2) Dans le cas où $m \geq 2$, il existera nécessairement des caractéristiques traversant un point singulier.

55. Observons enfin que la relation (46) n'exige pas que X et Y soient des polynomes. En appliquant cette relation à une caractéristique fermée C entourant l'origine, on s'assure aisément que I est égal à zéro. A cause de la relation

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \rho \cdot \frac{xX + yY}{xY - yX}$$

I sera en effet égal à la différence entre le nombre des valeurs maxima et le nombre des valeurs minima de ρ que l'on obtient, quand un point parcourt le contour C .

Or il est évident que le nombre de valeurs maxima est égal au nombre de valeurs minima, ce qui donne

$$I = 0.$$

On pourra donc énoncer le théorème suivant

Soit C une caractéristique fermée et soient i_1, i_2, \dots, i_m les indices des points singuliers situés à l'intérieur de C , on aura

$$i_1 + i_2 + \dots + i_m = -1.$$

Il est évident qu'on pourrait obtenir le théorème (III) comme conséquence immédiate de ce dernier théorème.

CHAPITRE VII.

Sur le calcul des intégrales par des approximations successives.

56. Nous avons prouvé dans les chapitres précédents que l'étude des caractéristiques dans le voisinage d'un point singulier se réduit toujours à celle de plusieurs équations différentielles de la forme

$$(47) \quad x^m \frac{dy}{dx} = ay + bx + \varphi(x, y),$$

φ désignant une série de TAYLOR ne contenant que des termes de dimension ≥ 2 , convergente pour $|x| \leq \delta$, $|y| \leq \delta$, et a désignant une quantité différente de zéro.

Pour effectuer le calcul des intégrales il suffit donc de traiter les équations différentielles de cette forme.¹

57. Pour fixer les idées nous traiterons ici le cas où $m = 2n$ et $a > 0$, et nous écrirons alors notre équation de la manière suivante:

$$(48) \quad x^{2n} \frac{dy}{dx} = (2n - 1)[a_1 y + b_1 x + \varphi_1(x, y)], \quad a_1 > 0.$$

Nous donnerons une méthode d'approximations successives à l'aide de laquelle on peut effectuer le calcul des intégrales de cette équation dans le voisinage de l'origine.

A cet effet soit M la valeur maxima de $\frac{b_1 x + \varphi(x, 0)}{x}$, et soit N la valeur maxima de $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, pour $|x| < \rho_1 < \delta$; $|y| \leq \rho_1 < \delta$.

¹ Comparer à ce sujet mon mémoire: *Sur les points singuliers des équations différentielles*, Öfversigt af K. Vet. Akad. Förhandlingar, Febr. 9, 1898, où j'ai développé la méthode donnée dans ce chapitre d'une manière un peu différente de celle exposée ici.

En prenant ρ_1 suffisamment petit on peut alors faire en sorte que l'on ait

$$\frac{N}{a_1} < 1 \quad \text{pour } |x| \leq \rho_1; \quad |y| \leq \rho_1.$$

La quantité ρ_1 étant ainsi déterminée, on déterminera la quantité positive ρ en sorte que l'on ait

$$(49) \quad \rho \frac{\left[1 + \frac{M}{a_1}\right]}{1 - \frac{N}{a_1}} < \rho_1.$$

Soit maintenant x_0, y_0 , un point du plan tel que l'on ait

$$0 < x_0 \leq \rho; \quad |y_0| \leq \rho;$$

et soit $y(x)$ l'intégrale de l'équation (48) qui prend pour $x = x_0$ la valeur y_0 . On sait alors que $y(0) = 0$ (voir page 45) et on pourra calculer de la manière suivante les valeurs de $y(x)$ pour $0 \leq x \leq \rho$.

Déterminons d'abord la fonction y_1 de manière qu'elle satisfasse à

$$x^{2n} \frac{dy_1}{dx} = (2n - 1)[a_1 y_1 + b_1 x + \varphi_1(x, 0)]$$

et qu'elle prenne la valeur y_0 pour $x = x_0$.

Ayant formé ensuite l'équation différentielle

$$x^{2n} \frac{dy_2}{dx} = (2n - 1)[a_1 y_2 + b_1 x + \varphi_1(x, y_1)]$$

on déterminera y_2 par la condition qu'il prenne la valeur y_0 pour $x = x_0$. En continuant ainsi on déterminera y_ν de manière qu'il satisfasse à l'équation

$$x^{2n} \frac{dy_\nu}{dx} = (2n - 1)[a_1 y_\nu + b_1 x + \varphi_1(x, y_{\nu-1})], \quad \nu = 2, 3, \dots$$

et qu'il prenne la valeur y_0 pour $x = x_0$.

Je dis qu'alors l'intégrale $y(x)$ sera donnée par l'équation

$$y(x) = y_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (y_{\nu+1} - y_\nu), \quad \text{pour } 0 \leq x \leq x_0.$$

58. En effet observons que la méthode de résolution bien connue des équations linéaires donne

$$(50) \quad y_\nu = y_0 e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}} - \frac{a_1}{x^{2n-1}}} - e^{-\frac{a_1}{x^{2n-1}}} \int_x^{x_0} \frac{b_1 x + \varphi_1(x, y_{\nu-1})}{x^{2n}} (2n-1) e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx,$$

$\nu = 1, 2, 3, \dots$

Observons encore que si $\lim_{x \rightarrow +0} y_{\nu-1} = 0$, cette équation donne $\lim_{x \rightarrow +0} y_\nu = 0$.

On a en effet

$$y_\nu = y_0 e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}} - \frac{a_1}{x^{2n-1}}} - e^{-\frac{a_1}{x^{2n-1}}} \int_x^{x_0} \frac{\chi(x)}{x^{2n}} (2n-1) e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx$$

$$= e^{-\frac{a_1}{x^{2n-1}}} \int_x^{x_0} \frac{\chi(x)}{x^{2n}} (2n-1) e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx,$$

$\chi(x)$ désignant une fonction continue telle que $\lim_{x \rightarrow +0} \chi(x) = 0$, et ε une quantité positive très petite. Les deux premiers termes du second membre tendront vers zéro quand x tend vers $+0$. Le dernier terme pouvant s'écrire

$$e^{-\frac{a_1}{x^{2n-1}}} \int_x^{x_0} \frac{\chi(x)}{x^{2n}} (2n-1) e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx = \chi(x_1) \left[\frac{1}{a_1} - \frac{\frac{a_1}{x^{2n-1}} - \frac{a_1}{x_0^{2n-1}}}{a_1} \right],$$

x_1 étant une valeur de x située entre x et x_0 , on en conclut que cette expression tend vers zéro quand ε et $x < \varepsilon$ tendent vers zéro.

Revenons maintenant à l'équation (50). On en tire

$$y_{\nu+1} - y_\nu = e^{-\frac{a_1}{x^{2n-1}}} \int_x^{x_0} \frac{\varphi_1(x, y_\nu) - \varphi_1(x, y_{\nu-1})}{x^{2n}} (2n-1) e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx.$$

Tant que les fonctions y_ν et $y_{\nu-1}$ seront $< \rho_1$ en valeur absolue pour $0 \leq x \leq x_0$, on aura

$$|y_{\nu+1} - y_\nu| < e^{-\frac{a_1}{x^{2n-1}}} \int_x^{x_0} \frac{N |y_\nu - y_{\nu-1}|}{x^{2n}} (2n-1) e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx \quad \text{pour } 0 < x \leq x_0.$$

Désignons enfin par m_ν la valeur maxima que prend la fonction $|y_\nu - y_{\nu-1}|$ pour $0 \leq x \leq x_0$, on aura

$$|y_{\nu+1} - y_\nu| < e^{-\frac{a_1}{x^{2n-1}}} m_\nu \int_x^{x_0} \frac{N}{x^{2n}} (2n-1) e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx.$$

En effectuant l'intégration, on obtient

$$|y_{\nu+1} - y_\nu| < m_\nu \cdot \frac{N}{a_1} \left[1 - e^{\frac{a_1}{x_0^{2n-1}} - \frac{a_1}{x^{2n-1}}} \right] \quad \text{pour } 0 \leq x \leq x_0$$

ou finalement

$$m_{\nu+1} < m_\nu \cdot \frac{N}{a_1} \quad \text{pour } 0 \leq x \leq x_0.$$

Cette dernière inégalité subsiste tant que les fonctions y_ν et $y_{\nu-1}$ sont $< \rho_1$ en valeurs absolue pour $0 \leq x \leq x_0$. Or l'équation (50) donne

$$y_1 = y_0 e^{\frac{a_1}{x_0^{2n-1}} - \frac{a_1}{x^{2n-1}}} - e^{-\frac{a}{x^{2n-1}}} \int_x^{x_0} \frac{b_1 x + \varphi_1(x, 0)}{x^{2n}} (2n-1) e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx$$

ou enfin

$$|y_1| < \rho + e^{-\frac{a_1}{x_0^{2n-1}}} \int_x^{x_0} \frac{\rho M}{x^{2n}} (2n-1) e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx$$

$$< \rho \left[1 + \frac{M}{a_1} \right] < \rho_1 \quad \text{pour } 0 \leq x \leq x_0.$$

On en conclut que

$$m_2 < m_1 \cdot \frac{N}{a_1} < \frac{N}{a_1} \cdot \left[1 + \frac{M}{a_1} \right] \rho \quad \text{pour } 0 \leq x \leq x_0$$

d'où

$$|y_2| < |y_2 - y_1| + |y_1| < \rho \left[1 + \frac{M}{a_1} \right] \left[1 + \frac{N}{a_1} \right] < \rho_1.$$

De cette inégalité on tire

$$m_3 < m_2 \frac{N}{a_1} < \frac{N^2}{a_1} \left[1 + \frac{M}{a_1} \right] \rho \quad \text{pour } 0 \leq x \leq x_0$$

d'où l'on conclut

$$|y_3| < m_3 + m_2 + m_1 < \rho \left[1 + \frac{M}{a_1} \right] \left[1 + \frac{N}{a_1} + \frac{N^2}{a_1^2} \right] < \rho_1.$$

En continuant ainsi on voit que l'on a

$$m_{\nu+1} < m_{\nu} \frac{N}{a_1} \quad \text{pour } 0 \leq x \leq x_0$$

et on obtient

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} m_{\nu} < \rho \left[1 + \frac{M}{a_1} + \frac{N}{a_1} + \frac{N^2}{a_1^2} + \dots \right].$$

Cette dernière inégalité met en évidence que la série

$$y(x) = y_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (y_{\nu+1} - y_{\nu})$$

est uniformément convergente pour $0 \leq x \leq x_0$.

L'équation

$$\begin{aligned} x^{2n} \left| \sum_{\nu=m+1}^{m+m'} \frac{d}{dx} (y_{\nu+1} - y_{\nu}) \right| &= (2n-1) [a_1 (y_{m+m'+1} - y_{m+1}) + \varphi_1(x, y_{m+m'}) - \varphi_1(x, y_m)] \\ &< (2n-1) [a_1 |y_{m+m'+1} - y_{m+1}| + N |y_{m+m'} - y_m|] \end{aligned}$$

nous apprend alors que la série des dérivées $\sum_1^{\infty} \frac{d}{dx} (y_{\nu+1} - y_{\nu})$ est uniformément convergente pour $\varepsilon \leq x \leq x_0$, ε étant un nombre positif aussi petit que l'on voudra, et il s'ensuit que la fonction $y(x)$ satisfait pour toutes ces valeurs de x à l'équation différentielle donnée. Or ε étant aussi petit que l'on voudra, la fonction $y(x)$ représentera l'intégrale cherchée de l'équation (48) pour $0 < x \leq x_0$, et comme la série s'annule pour $x = 0$, elle représentera aussi pour cette valeur de x l'intégrale cherchée.

v. q. f. d.

59. Nous savons de cette manière calculer toute caractéristique aboutissant à l'origine et située à droite de l'axe des y . A gauche de cet axe il

n'existe plus qu'une seule caractéristique (voir page 46), et la méthode s'applique au calcul de cette caractéristique de la manière suivante.

Nous commencerons par prouver qu'une équation différentielle

$$x^{2n} \frac{dy}{dx} = (2n - 1)a_1 y + \phi(x),$$

où $\phi(x)$, pour des valeurs négatives de x , est une fonction continue telle que

$$\lim_{x \rightarrow -0} \phi(x) = 0,$$

possède une seule intégrale qui s'annule pour $x = -0$.

En effet l'intégrale générale de cette dernière équation pouvant s'écrire

$$y = e^{-\frac{a_1}{x^{2n-1}}} \left[C + \int_{-x_0}^x \frac{\phi(x)}{x^{2n}} e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx \right]$$

où C est une constante arbitraire, on voit qu'il faut avoir

$$C = - \int_{-x_0}^0 \frac{\phi(x)}{x^{2n}} e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx$$

pour que $\lim_{x \rightarrow -0} y$ s'annule. L'intégrale s'annulant pour $x = -0$, pourra donc s'écrire

$$y = - e^{-\frac{a_1}{x^{2n-1}}} \int_{-x_0}^0 \frac{\phi(x)}{x^{2n}} e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx \quad \text{pour } -x_0 \leq x \leq 0.$$

En appliquant notre méthode d'approximations successives à l'équation (48) nous déterminerons maintenant y_1 de manière que l'on ait

$$x^{2n} \frac{dy_1}{dx} = (2n - 1)[a_1 y_1 + b_1 x + \varphi_1(x, 0)]$$

et que $\lim_{x \rightarrow -0} y_1 = 0$.

Nous déterminerons ensuite y_2 en sorte que l'on ait

$$x^{2n} \frac{dy_2}{dx} = (2n - 1)[a_1 y_2 + b_1 x + \varphi_1(x, y_1)]$$

et que $\lim_{x \rightarrow -0} y_2 = 0$.

En continuant ainsi on obtient en général

$$y_\nu = -e^{-\frac{a_1}{x^{2n-1}}} \int_x^0 \frac{b_1 x + c_1(x, y_{\nu-1})}{x^{2n}} e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} (2n-1) dx, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

pour $-x_0 \leq x \leq 0$

et

$$|y_{\nu+1} - y_\nu| < e^{-\frac{a_1}{x^{2n-1}}} \int_x^0 \frac{N|y_\nu - y_{\nu-1}|}{x^{2n}} (2n-1) e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx,$$

tant que $|y_\nu| < \rho_1, |y_{\nu-1}| < \rho_1$

d'où l'on conclut enfin que

$$m_{\nu+1} < m_\nu \cdot \frac{N}{a_1}, \quad \text{pour } -x_0 \leq x \leq 0,$$

m_ν désignant, comme au cas précédent, la valeur maxima de $|y_\nu - y_{\nu-1}|$ pour $-x_0 \leq x \leq 0$, et l'inégalité ayant lieu tant que les fonctions y_ν et $y_{\nu-1}$ sont $< \rho_1$ en valeur absolue pour $-x_0 \leq x \leq 0$.

On prouve maintenant de la même manière qu'au cas précédent que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} m_\nu$$

est convergente, d'où l'on conclut que les séries

$$y(x) = y_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (y_{\nu+1} - y_\nu), \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d}{dx} (y_{\nu+1} - y_\nu)$$

sont uniformément convergentes, la première pour $-x_0 \leq x \leq 0$, la seconde pour $-x_0 \leq x \leq -\varepsilon$, ε étant une valeur positive aussi petite que l'on voudra. Il s'ensuit enfin que $y(x)$ est une intégrale de l'équation (48) telle que $\lim_{x \rightarrow -0} y(x) = 0$.

c. q. f. d.

Il est évident que la même méthode s'applique au calcul des intégrales de l'équation (47), quelles que soient les valeurs de m et de a . On doit pourtant observer que dans le cas où $m = 1$ et où $a > 0$, on aura

$$y = -e^{-\frac{a}{x}} \int_x^0 \frac{b_1 x + c_1(x, y)}{x^{a+1}} e^{\frac{a}{x}} dx.$$

Au contraire dans le cas où l'on a $m = 1$, $a = -a_1 < 0$, on aura

$$g_{x_1} = -x^{-a_1} \int_0^x [bx + c - r_1 g_{x_1-1}] x^{a_1-1} dx.$$

En ayant égard à cette observation, il est évident que la démonstration donnée embrasse aussi ces deux derniers cas.



SUR QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS INFINIS

PAR

HELGE VON KOCH

À STOCKHOLM.

Si l'on a deux déterminants *normaux*¹

$$A = [A_{ik}]_{i,k=1,2,\dots,+\infty}, \quad B = [B_{ik}]_{i,k=1,2,\dots,+\infty}$$

et qu'on désigne par C_{ik} l'une quelconque des quatre séries

$$\Sigma_i A_{ij} B_{jk}, \quad \Sigma_j A_{ij} B_{jk}, \quad \Sigma_j A_{ji} B_{jk}, \quad \Sigma_j A_{ji} B_{kj}$$

on sait, d'après ce que j'ai démontré précédemment,² que le déterminant C des C_{ik} est normal et que l'on a

$$AB = C.$$

Après avoir étendu, dans le mémoire cité, une partie des résultats valables pour les déterminants normaux à une classe un peu plus générale pour laquelle M. VIVANTI³ a proposé ensuite le nom de déterminants *normaloïdes*, j'ai dit sans démonstration, qu'à ces déterminants s'applique aussi le théorème de multiplication. Mais je n'ai pas remarqué que cet énoncé n'est exact qu'en adoptant pour C_{ik} la seconde ou la troisième des valeurs (Σ).⁴

¹ Pour abrégé, j'appelle ainsi les déterminants infinis désignés par le nom de déterminants de la forme *normale* dans un mémoire précédent (*Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires*, Acta mathematica, t. 16).

² loc. cit. n° 12.

³ Annali di matematica, Ser. II, t. 21, p. 27.

⁴ Pour corriger cet erratum qui n'a d'ailleurs aucune influence sur les autres résultats du mémoire cité, il suffit de lire (page 236 ligne 7 en remontant) 8 et 13 au lieu de 8, 12 et 13.

Cette remarque a été faite par M. CAZZANIGA dans une note récente.¹

La lecture de cette note m'a rappelé une difficulté plus grave que j'ai rencontrée en cherchant à étendre le théorème en question au cas général des déterminants absolument convergents.

Après avoir résumé, au § 1, quelques résultats obtenus dans mon travail *Sur la convergence des déterminants d'ordre infini*² j'étudie au § 2 cette question de la multiplication des déterminants absolument convergents en m'attachant surtout au cas des déterminants de genre fini.

Dans le paragraphe suivant, je passe à l'objet principal de ce travail, savoir l'étude d'une classe nouvelle de déterminants infinis pour lesquels je propose le nom de déterminants *hypernormaux* et qui jouent un rôle important pour l'étude de certains systèmes d'ordre infini d'équations différentielles linéaires.

Cette application se trouve brièvement indiquée au § 4.

¹ Annali di matematica, Ser. III, t. 2, p. 229. M. CAZZANIGA cherche à étendre l'étude à une classe plus générale de déterminants («normaloidi generalizzati») définis par les conditions suivantes: le produit HA_{ik} des éléments diagonaux converge absolument et il existe deux suite de quantités (non nulles) x_i ($i = 1, 2, \dots$) et y_i ($i = 1, 2, \dots$) telles que la série

$$\sum_{i,k} \frac{x_i}{y_i} A_{ik} \quad (i \neq k)$$

converge absolument, et telles, en outre, que le produit

$$\prod \frac{x_i}{y_i}$$

converge absolument. Il faut remarquer que cette classe n'est pas distincte des déterminants normaloïdes. En effet, il résulte des conditions énoncées que la série

$$\sum_{i,k} \frac{x_i}{x_k} A_{ik} \quad (i \neq k) \quad [\text{ainsi que la série } \sum_{i,k} \frac{y_i}{y_k} A_{ik} \quad (i \neq k)] \text{ converge absolument.}$$

² Bihang till K. Sv. Vet.-Ak. Handl. Bd. 22. Stockholm 1896.

§ 1. *Généralités sur les déterminants absolument convergents.*

1. Soit donné un tableau à double entrée, illimité à droite et en bas:

$$(1) \quad \begin{array}{cccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Supposons que le produit des éléments diagonaux

$$(2) \quad A_{11} \ A_{22} \ A_{33} \ \dots$$

converge absolument et formons une suite de nouveaux produits en laissant fixes les premiers indices des facteurs A_{ii} et permutant successivement les seconds indices de toutes les manières possibles; attribuons à chaque produit le signe + ou le signe — selon la parité ou l'imparité du nombre des transpositions nécessaires pour passer du produit initial (2) au produit considéré. Si la série qu'on peut former avec tous ces produits a une valeur Δ finie et déterminée (c'est-à-dire indépendante de l'ordre des termes), nous dirons que le déterminant des A_{ik} *converge absolument*¹ et a pour valeur Δ ; et nous le désignerons par l'une ou l'autre des notations suivantes:

$$\Delta = [A_{ik}]_{i,k=1,2,\dots,+\infty} = \Sigma \pm A_{11}A_{22}A_{33} \dots$$

$$\left| \begin{array}{cccc} A_{11} & A_{12} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right|$$

2. Désignant par Δ_n le déterminant formé avec les n premières lignes et les n premières colonnes du tableau (1), on démontre facilement (voir *Sur la convergence des déterminants d'ordre infini*, p. 5) que, Δ étant supposé absolument convergent, on a

$$\lim \Delta_n = \Delta \quad (\text{pour } n = +\infty).$$

¹ J'ai donnée cette définition dans une note présentée à l'Académie des Sciences de Paris. (Comptes rendus, 30 janvier 1893.)

3. Définissons les sous-déterminants de Δ . Dans le tableau (1), remplaçons les éléments $A_{i_1 k_1}, A_{i_2 k_2}, \dots, A_{i_r k_r}$ par l'unité et les autres éléments des lignes i_1, \dots, i_r par zéro. Si le déterminant du tableau ainsi obtenu converge absolument, nous l'appellerons *sous-déterminant* ou *mineur* d'ordre r du déterminant Δ et nous le désignerons par

$$\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ k_1 & \dots & k_r \end{pmatrix}.$$

Il est clair que ce déterminant reste inaltéré si l'on y remplace tous les éléments des colonnes $k_1 \dots k_r$ (sauf ceux déjà remplacés par l'unité) par zéro.

Si tous les mineurs d'ordre fini qu'on peut ainsi former convergent absolument, nous dirons que *tous les déterminants du tableau (1) convergent absolument*.

4. Ceci posé, j'ai démontré (loc. cit. n° 5) le théorème suivant:

Pour que le déterminant des A_{ik} et tous ses mineurs convergent absolument, il faut et il suffit

- 1° *que le produit des éléments diagonaux converge absolument;*
- 2° *que la série formée avec tous les produits circulaires converge absolument;*
- 3° *que la série formée avec tous les produits demi-circulaires appartenant à un élément quelconque converge absolument.*

Par *produit circulaire* j'entends tout produit de la forme

$$(3) \quad A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \dots A_{i_k i_1}$$

les indices i étant supposés distincts; je le dis d'ordre $k - 1$ si le nombre des facteurs A est k . Par *produit demi-circulaire* d'ordre k j'entends tout produit de la forme

$$(4) \quad A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \dots A_{i_k i_{k+1}},$$

tous les i étant distincts.

Désignant le produit (3) par $(i_1 \dots i_k)$, le produit (4) par $(i_1 \dots i_k; i_{k+1})$ les trois conditions énoncées peuvent se résumer ainsi:

Le produit

$$(5) \quad \prod_i A_{ii}$$

converge absolument;
la série

$$(6) \quad \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k} (i_1 \dots i_k)$$

converge absolument;
la série

$$(7) \quad \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k} (\beta \ i_1 \dots i_k; \alpha)$$

converge absolument quels que soient α et β .

Dans chaque terme de la série (6) les $i_1 \dots i_k$ sont distincts et, pour que chaque produit circulaire ne figure qu'une seule fois, il faut supposer que l'un des indices, par exemple le premier, soit inférieur aux autres.

Dans la série (7) les indices $i_1 \dots i_k$ ne sont assujettis qu'à cette condition que les indices $i_1 \dots i_k$ définissant un terme quelconque doivent être différents de α et β et distincts entre eux.

5. Dans mon mémoire cité plus haut (Acta mathematica, t. 16) j'ai donné (n° 7) divers modes de développement d'un déterminant *de forme normale*. On peut démontrer sans difficulté que tous ces développements restent valables pour un déterminant remplissant les conditions précédentes.

Par exemple, Δ étant un tel déterminant, si l'on pose

$$A_{ii} = 1 + a_{ii}, \quad A_{ik} = a_{ik} \quad (i \neq k)$$

on a le développement suivant

$$(8) \quad \Delta = 1 + \sum_i a_{ii} + \sum_{i,j} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} + \sum_{i,j,k} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} + \dots$$

où

$$i < j < k < \dots;$$

et ce développement reste convergent si l'on y remplace tous les a_{ik} par leurs valeurs absolues et que, dans tous les déterminants qui y figurent, on prend tous les termes avec le signe $+$.

6. Soit

$$x_1, x_2, \dots$$

une suite de quantités (non nulles); j'appelle *substitution multiplicatoire* et je désigne pas

$$\left| A_{ik}; A_{ik} \frac{x_i}{x_k} \right|$$

l'opération qui consiste à remplacer partout les A_{ik} par $A_{ik} \frac{x_i}{x_k}$.

Il résulte immédiatement de la définition adoptée plus haut qu'un déterminant absolument convergent reste inaltéré par une substitution multiplicatoire quelconque.

On vérifie aussi que, par cette substitution, un mineur quelconque $\left(\begin{smallmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{smallmatrix} \right)'$ du nouveau déterminant est lié au mineur correspondant de l'ancien par la relation

$$\left(\begin{smallmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{smallmatrix} \right)' = \frac{x_{k_1} \dots x_{k_r}}{x_{i_1} \dots x_{i_r}} \left(\begin{smallmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{smallmatrix} \right).$$

7. Étant donné un déterminant infini, si l'on veut décider s'il converge absolument ou non, la règle précédente est, dans des cas particuliers, assez facile à appliquer; mais, en général, on la trouvera trop compliquée. J'ai donc cherché des règles de convergence plus simples remplissant les deux conditions suivantes:

Chaque règle donne des conditions suffisantes pour la convergence absolue;

la règle $n^{\text{ième}}$ s'approche, pour n très grand, autant que l'on veut de la règle générale qui donne les conditions nécessaires et suffisantes.

Voici le théorème que j'ai obtenu: ¹

Pour que le déterminant des A_{ik} converge absolument, il suffit

1° que le produit des éléments diagonaux converge absolument;

2° que la série formée avec tous les produits circulaires d'ordre 1, 2, ..., $2n-2$ converge absolument;

3° que la série formée avec tous les produits demi-circulaires d'ordre $n, n+1, \dots, 2n-1$ converge absolument.

*Ces conditions remplies, pour que tous les mineurs de Δ convergent aussi absolument, il suffit que la série formée par tous les produits demi-circulaires appartenant à un élément quelconque $A_{a\beta}$ et d'ordre inférieur à n converge absolument.*¹

Si ces conditions sont remplies, je dirai que le déterminant des A_{ik} est de genre $n - 1$.

Si ces conditions ne sont remplies pour aucune valeur de n , je dirai que le déterminant est de genre infini ou qu'il n'a pas de genre.

Si ces conditions ne sont remplies qu'après une substitution multiplicatoire convenable, je dirai que le déterminant des A_{ik} est semblable à un déterminant de genre $n - 1$.

8. Pour $n = 0$ les trois conditions se réduisent à une seule: la convergence absolue de la série Σa_{ij} ($A_{ii} = 1 + a_{ii}$, $A_{ik} = a_{ik}$)² de sorte que l'on retrouve la règle de M. POINCARÉ et l'on tombe sur les déterminants normaux. Si la série

$$\sum_{i,j} |a_{ij}|$$

diverge mais peut être rendue convergente moyennant une substitution multiplicatoire convenable, le déterminant des A_{ik} est *normaloïde*.

Donc, selon notre terminologie, les déterminants de genre zéro se partagent en deux classes: déterminants *normaux* et déterminants *normaloïdes*.

Pour $n = 1$, la règle précédente coïncide avec celle que j'ai donnée dans la note citée plus haut (Comptes Rendus 1893) et peut se résumer ainsi:

Pour que le déterminant des A_{ik} et tous ses mineurs convergent absolument, il suffit que les trois séries

$$\sum_i a_{ii}, \sum_{i,j,k} a_{ij} a_{jk}, \sum_{ijkl} a_{ij} a_{jk} a_{kl}$$

¹ Cette dernière condition est vérifiée d'elle-même s'il n'y a dans Δ aucune ligne ni aucune colonne dont tous les éléments non-diagonaux s'annulent. Cette hypothèse est toujours légitime puisque, dans le cas contraire, on peut remplacer Δ par un de ses mineurs (Cf. loc. cit. n° 11). Dans tout ce qui suit nous ferons donc cette hypothèse qui nous dispense de la condition supplémentaire.

² Cette notation sera conservée dans ce qui va suivre.

convergent absolument; ou bien, que ces séries peuvent être rendues convergentes moyennant une substitution multiplicatoire convenable.

9. La règle n^{me} énoncée plus haut se simplifie beaucoup si l'une des deux conditions suivantes est remplie:

$$\sum_j |a_{ij}| < K \quad (\text{pour toute valeur de } i),$$

$$\sum_i |a_{ij}| < K \quad (\text{pour toute valeur de } j),$$

K désignant une constante. En effet, dans ce cas, la convergence absolue de la série $\sum_{i_1, \dots, i_k} (i_1 \dots i_{k-1}; i_k)$ pour $k > n + 1$ est une conséquence nécessaire de la convergence absolue de la même série pour $k = n + 1$.

10. Il est facile de démontrer que les éléments d'un déterminant de genre $n - 1$ satisfont encore aux trois conditions suivantes:

1° La série

$$s_i^{(k)} = \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{k-1} i_k}$$

converge absolument quel que soit k .

2° La série

$$t_i^{(k)} = \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_k i}$$

converge absolument quel que soit k .

3° La série

$$s_{a\beta}^{(k)} = \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}} a_{\beta i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{k-1} a}$$

formée avec tous les produits demi-circulaires d'ordre quelconque k et appartenant à un élément quelconque $A_{a\beta}$ converge absolument.

§ 2. Sur le théorème de multiplication.

11. Nous pouvons venir maintenant à la question de la multiplication de deux déterminants

$$A = [A_{ik}]_{i,k=1,2,\dots,\infty}, \quad B = [B_{ik}]_{i,k=1,2,\dots,\infty}$$

absolument convergents.

Posons

$$(I) \quad C_{ik}^{(1)} = \sum_j A_{ij} B_{kj},$$

$$(II) \quad C_{ik}^{(2)} = \sum_j A_{ij} B_{jk},$$

$$(III) \quad C_{ik}^{(3)} = \sum_j A_{ji} B_{kj},$$

$$(IV) \quad C_{ik}^{(4)} = \sum_j A_{ji} B_{jk}.$$

Nous dirons que la loi de multiplication ν est applicable aux déterminants A et B si les trois conditions suivantes sont remplies:

Les séries

$$C_{ik}^{(\nu)} \quad (i, k = 1, 2, \dots, +\infty)$$

convergent absolument;

le déterminant des $C_{ik}^{(\nu)}$ converge absolument;

ce déterminant est égal au produit AB .

Cette définition admise, nous commencerons par démontrer le lemme suivante:

Pour que la loi de multiplication ν soit applicable, il suffit que le déterminant des $\overline{C}_{ik}^{(\nu)}$ converge absolument, $\overline{C}_{ik}^{(\nu)}$ désignant ce que devient $C_{ik}^{(\nu)}$ quand on y remplace tous les A et tous les B par leurs valeurs absolues.

En effet, posons d'abord

$$C_{ik} = C_{ik}^{(1)}, \quad \overline{C}_{ik} = \overline{C}_{ik}^{(1)}.$$

Le déterminant \overline{C} des \overline{C}_{ik} étant supposé absolument convergent et chaque terme du déterminant C des C_{ik} étant inférieur (ou égal) en valeur absolue au terme correspondant de \overline{C} , il est évident que C converge absolument.

Par définition on a

$$(9) \quad C = \sum_{\varepsilon} A_{i\varepsilon} B_{\mu\varepsilon} A_{q\varepsilon} B_{\nu\varepsilon} \dots$$

la sommation s'étendant à toute permutation

$$(10) \quad \mu, \nu, \dots$$

des nombres 1, 2, ... et à toute valeur entière et positive des

$$i, j, \dots$$

et ε désignant $+1$ ou -1 selon que la permutation (10) peut se déduire de la permutation $1, 2, \dots$ par un nombre pair ou impair de transpositions.

Le développement (9) étant absolument convergent, nous pouvons ranger les termes ainsi:

$$(11) \quad \sum_{i,j,\dots} \left(\sum_{\mu,\nu,\dots} \varepsilon B_{\mu i} B_{\nu j} \dots \right) A_{1i} A_{2j} \dots$$

Or, la série entre crochets étant nulle quand deux des indices i, j, \dots sont égaux, il suffit d'étendre la sommation à toute permutation i, j, \dots des nombres $1, 2, \dots$.

De plus, comme pour une permutation quelconque i, j, \dots des nombres $1, 2, \dots$ on a

$$\sum_{\mu,\nu,\dots} \varepsilon B_{\mu i} B_{\nu j} \dots = +B \quad \text{ou} \quad -B$$

selon que cette permutation se déduit de $1, 2, \dots$ à l'aide d'un nombre pair ou impair de transpositions, la somme (11) se réduit à la suivante

$$B \sum_{i,j,\dots} \varepsilon A_{1i} A_{2j} \dots = BA$$

ce qui donne bien

$$AB = C.$$

La démonstration est la même si, au lieu de la définition (I), on adopte pour C_{ik} la définition II, III ou IV.

12. Passons à la multiplication de deux déterminants de genre $n-1$. Soient donc

$$A = [A_{ik}]_{i,k=1,\dots,n-1}, \quad B = [B_{ik}]_{i,k=1,\dots,n-1}$$

et supposons que les A_{ik} et les B_{ik} remplissent les conditions énoncées plus haut.

Remarquons aussitôt qu'il est facile de former des exemples où toutes les quatres lois de multiplication ne sont pas vraies simultanément. Prenons par exemple le déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & & \\ \beta_1 & 1 & \alpha_2 & \\ & \beta_2 & 1 & \\ & & & \ddots \end{vmatrix}$$

qui intervient dans la théorie des fractions continues¹ et qui converge absolument toujours et seulement si la série

$$(12) \quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots$$

converge absolument.

Pour que ce déterminant soit de genre *m* il suffit évidemment de supposer

1° que la série (12) converge absolument;

2° que la série

$$\sum [|\beta_i| + |\alpha_{i+1}|][|\alpha_i| + |\beta_{i+1}|]$$

converge;

3° que les α_i et les β_i restent moindres, en valeur absolue, qu'un nombre positif K .

Si nous prenons par exemple

$$\alpha_{2i} = \frac{1}{\sqrt{2^i}}, \quad \alpha_{2i+1} = \frac{1}{2^i - 1}, \quad (i=1, 2, \dots, +\infty)$$

$$\beta_i = \frac{1}{i} \quad (i=1, 2, \dots, +\infty)$$

ces trois conditions sont vérifiées. Or, si l'on prend le carré du déterminant A et cherche à appliquer la première loi de multiplication on trouve pour C_{ii} la valeur suivante:

$$C_{11} = 1 + \alpha_1^2, \quad C_{ii} = 1 + \beta_{i-1}^2 + \alpha_i^2 \quad (i > 1)$$

ce qui, la série $\sum \alpha_i^2$ étant divergente, montre que le produit HC_{ii} diverge; donc, le déterminant des C_{ik} n'étant pas absolument convergent, la première loi est en défaut. (Il en est de même de la loi IV.)

Au contraire, on vérifie sans difficulté que les lois II et III sont applicables dans le cas considéré.

Voici un théorème qui, dans la plupart des cas, permet de décider si le théorème de multiplication est applicable à deux déterminants donnés de genre $n-1$.

¹ Voir ma note: *Quelques théorèmes concernant la théorie générale des fractions continues*. Öfversigt af K. V. A. Förhandl. Stockholm 1895.

Pour que les lois II et III de multiplication soient applicables à deux déterminants A et B de genre $n - 1$, il suffit que tout élément A_{ik} et que tout élément B_{ik} soit inférieur en valeur absolue, à l'élément correspondant P_{ik} d'un déterminant de genre $n - 1$.

Pour que les lois I et IV soient applicables, il suffit que, quels que soient i et k , l'élément A_{ik} soit inférieur à P_{ik} et l'élément B_{ik} inférieur à P_{ik} en valeur absolue.

En effet supposons d'abord

$$(13) \quad |A_{ik}| < P_{ik}, \quad |B_{ik}| < P_{ik}$$

les P_{ik} étant des nombres positifs formant un déterminant de genre $n - 1$. Introduisons pour abréger la notation symbolique

$$A(i_1 \dots i_k) = A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \dots A_{i_k i_1},$$

$$A(i_1 \dots i_k; i_{k+1}) = A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \dots A_{i_k i_{k+1}}$$

pour désigner les produits circulaires et semicirculaires d'un déterminant quelconque. Par hypothèse, le produit HP_{ii} converge absolument, la série

$$(14) \quad \sum_{i_1, i_2} P(i_1 \dots i_k)$$

converge absolument pour $k = 1, 2, \dots, 2n - 2$ et la série

$$(14') \quad \sum_{i_1, i_2, i_3} P(i_1 \dots i_k; i_{k+1})$$

converge absolument pour $k = n, n + 1, \dots, 2n - 1$.

De là résulte que la série (14) converge absolument quel que soit k et que la série (14') converge absolument dès que $k \geq n$.

Posons maintenant

$$(15) \quad C_{ik} = \sum_j A_{ij} B_{jk},$$

ce qui donne, pour $i = k$,

$$C_{ii} = A_{ii} B_{ii} + \sum_j A_{ij} B_{ji}.$$

En tenant compte des conditions (13) et de la convergence absolue de la série $\sum_{ij} P(ij)$, on voit donc que le produit

$$\prod C_{ii}$$

converge absolument.

Pour $i \neq k$ la formule (15) nous donne

$$(15') \quad |C_{ik}| < K \left(P_{ik} + \sum_{j \neq i, k} P(ij; k) \right)$$

d'où

$$\begin{aligned} |C(i_1 \dots i_k)| &< K^k \left[P(i_1 \dots i_k) + \dots + \sum_{j_1, j_k} P(i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_k j_k) \right], \\ \sum_{i_1, i_k} |C(i_1 \dots i_k)| &< K^k \left[\sum_{i_1, i_k} P(i_1 \dots i_k) + \dots + \sum_{i_1, i_k} \sum_{j_1, j_k} P(i_1 j_1 \dots i_k j_k) \right]. \end{aligned}$$

Les séries entre les crochets dans cette formule sont en nombre fini et, dans chacune d'elles, ne figure que des produits circulaires d'ordre inférieur à $2k$.

Donc la série formée par les produits circulaires d'ordre k

$$\sum C(i_1 \dots i_k)$$

converge absolument pour toute valeur de k .

Il nous reste à examiner la convergence des séries formées par les produits demi-circulaires.

La formule (15) nous donne

$$|C(i_1 \dots i_k; i_{k+1})| < K^k \left[P(i_1 \dots i_k; i_{k+1}) + \dots + \sum_{j_1, j_k} P(i_1 j_1 \dots i_k j_k; i_{k+1}) \right],$$

d'où

$$\sum_{i_1, i_{k+1}} |C(i_1 \dots i_k; i_{k+1})| < K^k \left[\sum_{i_1, i_{k+1}} P(i_1 \dots i_k; i_{k+1}) + \dots + \sum_{i_1, i_{k+1}} \sum_{j_1, j_k} P(i_1 j_1 \dots i_k j_k; i_{k+1}) \right],$$

ce qui montre que la série du premier membre converge dès que $k \geq n$.

Donc le déterminant des C_{ik} est de genre $n - 1$.

On voit de la même manière que le déterminant des éléments C_{ik}

$$\bar{C}_{ik} = \sum_j |A_{ij} B_{jk}|$$

est de genre $n - 1$. Or, de la convergence absolue du déterminant des \bar{C}_{ik} on peut conclure, nous l'avons vu plus haut, que le déterminant des C_{ik} est égal au produit du déterminant des A_{ik} par celui des B_{ik} .

Done, dans l'hypothèse (13), la loi de multiplication II est applicable et l'on voit de la même manière que la loi III l'est également.

Si l'on suppose au contraire

$$|A_{ik}| < P_{ik}, \quad |B_{ik}| < P_{ki}$$

les P_{ik} formant un déterminant de genre $n - 1$, on peut démontrer, d'une manière absolument analogue, que les lois I et IV sont valables, c'est à dire que le déterminant des C'_{ik}

$$C'_{ik} = \sum_j A_{ij} B_{kj} \quad \text{ou} \quad C'_{ik} = \sum_j A_{ji} B_{jk}$$

est de genre $n - 1$ et égal au produit AB .

§ 3. Sur une classe nouvelle de déterminants.

13. J'arrive maintenant à une classe de déterminants qui, en général, sont de genre infini. Cette classe est définie par le théorème suivant:

Pour que le déterminant des A_{ik} et tous ses mineurs convergent absolument, il suffit

1° *que le produit ΠA_{ii} des éléments diagonaux converge absolument;*

2° *qu'il existe deux suites de nombres positifs*

$$S_1, S_2, \dots$$

et

$$T_1, T_2, \dots$$

telles que la série

$$(16) \quad S_1 T_1 + S_2 T_2 + \dots$$

converge et telles que

$$(17) \quad |A_{ik}| \leq S_i T_k. \quad (i \neq k)$$

Remarquons d'abord qu'il est toujours permis de supposer la somme (16) moindre que l'unité. En effet, dans le cas contraire, après avoir choisi m de telle sorte que l'on ait

$$S_{m+1} T_{m+1} + S_{m+2} T_{m+2} + \dots < 1$$

on choisira un nombre K suffisamment grand pour que l'on ait

$$\frac{S_1 T_1 + \dots + S_m T_m}{K} + S_{m+1} T_{m+1} + S_{m+2} T_{m+2} + \dots < 1$$

et posera

$$B_{ik} = \frac{A_{ik}}{K} \quad (\text{pour } i = 1, 2, \dots, m),$$

$$B_{ik} = A_{ik} \quad (\text{pour } i > m);$$

on remplacera le déterminant A des A_{ik} par le déterminant B des B_{ik} ; on aura

$$B = \frac{1}{K^m} A$$

et, pour B , la condition en question sera évidemment vérifiée.

Supposons donc

$$(18) \quad S_1 T_1 + S_2 T_2 + \dots = S < 1$$

et formons tous les produits circulaires $A(i_1 \dots i_k)$. A cause de l'hypothèse (17) on aura

$$|A(i_1 \dots i_k)| \leq S_{i_1} T_{i_1} \dots S_{i_k} T_{i_k}$$

d'où

$$\sum_{i_1, \dots, i_k} |A(i_1 \dots i_k)| < S^k,$$

ce qui prouve que la série formée par tous les produits circulaires des A_{ik} converge absolument.

Passons aux produits demi-circulaires. Nous avons

$$|A(\beta i_1 \dots i_k; \alpha)| \leq S_\beta T_\alpha S_{i_1} T_{i_1} S_{i_2} T_{i_2} \dots S_{i_k} T_{i_k}$$

d'où résulte que la série formée avec les valeurs absolues de tous les produits demi-circulaires appartenant à l'élément $A_{\alpha\beta}$ a pour somme une quantité inférieure à

$$S_\beta T_\alpha \cdot \frac{1}{1 - S}.$$

Le théorème est donc démontré.

Il est facile de voir que les lois de multiplication II et III sont applicables aux déterminants de cette classe.

Soient en effet

$$A = [A_{ik}]_{i,k=1,2,\dots,+\infty}, \quad B = [B_{ik}]_{i,k=1,2,\dots,+\infty}$$

deux tels déterminants et posons

$$C_{ik} = \sum_j A_{ij} B_{jk}, \quad \bar{C}_{ik} = \sum_j |A_{ij}| |B_{jk}|.$$

Des conditions

$$|A_{ij}| \leq S_i T_j, \quad |B_{jk}| \leq S_j T_k$$

et de la convergence absolue des produits $\prod A_{ii}$ et $\prod B_{ii}$ il s'ensuit que $\prod \bar{C}_{ii}$ converge absolument et que, K désignant une constante,

$$|\bar{C}_{ik}| < K S_i T_k. \quad (i \neq k)$$

Donc le déterminant des C_{ik} appartient à la même classe que A et B et l'on a, en vertu du théorème démontré plus haut (n° 11),

$$AB = C.$$

La démonstration est la même pour la loi III.

Considérons un déterminant

$$A = [A_{ik}]_{i,k=1,2,\dots,+\infty},$$

dans lequel les éléments dépendent d'un paramètre t de la manière suivante

$$A_{ii} = 1 + t a_{ii}, \quad A_{ik} = t a_{ik} \quad (i \neq k)$$

les a_{ik} désignant des constantes vérifiant les conditions

$$|a_{ik}| \leq S_i T_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, +\infty)$$

où les S_i et T_k sont tels que la série

$$S = S_1 T_1 + S_2 T_2 + \dots$$

converge.

En appliquant à ce déterminant le développement (8) nous aurons

$$(19) \quad A = 1 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots$$

où

$$A_1 = \sum_i a_{ii}, \quad A_2 = \sum_{i,j} \frac{a_{ii} a_{jj}}{a_{ij}}, \dots$$

et d'une manière générale,

$$A_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k i_1} & \dots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix}.$$

Je dis que la fonction de t ainsi définie est une fonction *entière* de t , c'est à dire que le développement (19) est toujours convergent.

Soit en effet ε une quantité aussi petite qu'on le veut; déterminons l'entier m de telle manière que l'on ait

$$S_{m+1} T_{m+1} + S_{m+2} T_{m+2} + \dots < \varepsilon$$

et un nombre $K > 1$ suffisamment grand pour que

$$\frac{S_1 T_1 + \dots + S_m T_m}{K} + S_{m+1} T_{m+1} + S_{m+2} T_{m+2} + \dots < \varepsilon.$$

Posons

$$(20) \quad \begin{cases} b_{ik} = \frac{a_{ik}}{K} & (\text{pour } i = 1, 2, \dots, m) \\ b_{ik} = a_{ik} & (\text{pour } i = m+1, m+2, \dots, +\infty) \\ \bar{S}_i = \frac{S_i}{K} & (\text{pour } i = 1, 2, \dots, m) \\ \bar{S}_i = S_i & (\text{pour } i = m+1, m+2, \dots, +\infty). \end{cases}$$

Nous aurons

$$b_{ik} < S_i T_i$$

et

$$\bar{S}_1 T_1 + \bar{S}_2 T_2 + \dots = \bar{S} < \varepsilon.$$

Or, tout terme du déterminant

$$(21) \quad \begin{vmatrix} b_{i_1 i_1} & \dots & b_{i_1 i_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i_k i_1} & \dots & b_{i_k i_k} \end{vmatrix}$$

étant composé d'un certain nombre de facteurs b_{ii} et d'un certain nombre

de produits circulaires, on voit que tout terme est inférieur, en valeur absolue, au produit

$$S_{i_1} T_{i_1} S_{i_2} T_{i_2} \dots S_{i_k} T_{i_k}$$

d'où résulte que la somme des valeurs absolues des $\lfloor k \rfloor$ termes du déterminant (21) est inférieure à la quantité

$$\lfloor k \rfloor \cdot S_{i_1} T_{i_1} S_{i_2} T_{i_2} \dots S_{i_k} T_{i_k}.$$

On a donc

$$\overline{B}_k \leq \overline{S}^k,$$

\overline{B}_k désignant la somme des valeurs absolues des termes de tous déterminants tels que (21), $i_1 \dots i_k$ désignant successivement toute combinaison de k nombres de la suite 1, 2, ...

Désignant par \overline{A}_k ce que devient \overline{B}_k quand on y remplace partout les b_{ik} par les a_{ik} , il est clair, d'après les relations (20), que

$$\overline{B}_k \geq \frac{1}{K^m} \overline{A}_k,$$

d'où

$$|\overline{A}_k| \leq K^m \overline{S}^k < K^m \varepsilon^k.$$

Donc la série entière (19) converge pour $|t| < \frac{1}{\varepsilon}$, ce qui montre que cette série est *toujours* convergente.

Il est facile de former des exemples où la fonction entière (19) se réduit soit à une constante, soit à une fonction entière rationnelle de t . Supposons par exemple

$$a_{ik} = \sigma_i \tau_k,$$

les σ_i et τ_k étant tels que la série $\sum \sigma_i \tau_i$ converge absolument.

La formule (19) montre immédiatement que l'on a, dans ce cas,

$$A = 1 + t \sum_1^{+\infty} \sigma_i \tau_i.$$

En second lieu, prenons

$$\begin{aligned} A_{ii} &= 1, & A_{ji} &= \varepsilon_i, & A_{ii} &= \sigma_i, \\ A_{ij} &= 0 & (\text{pour } i > 1, j > 1, i \neq j) \end{aligned}$$

de sorte que le déterminant prenne la forme

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \tau_2 t & \tau_3 t & \dots \\ \sigma_2 t & 1 & 0 & \dots \\ \sigma_3 t & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix};$$

nous trouverons

$$A = 1 - t^2 \sum_2^{\infty} \sigma_i \tau_i.$$

14. En effectuant sur les éléments A_{ik} une substitution multiplicatoire convenable, on peut donner au théorème démontré au numéro précédent une autre forme.

En effet, les A_{ik} remplissant les conditions

$$|A_{ik}| \leq S_i T_k, \quad (i \neq k)$$

le déterminant des A_{ik} se change, par la substitution

$$A_{ik} \rightarrow A_{ik} \frac{T_i}{T_k}$$

en un déterminant

$$A = [B_{ik}]_{i,k=1,2,\dots,\infty}$$

dont les éléments remplissent les conditions

$$B_{ik} = A_{ik} \frac{T_i}{T_k} < S_i T_i \quad (i \neq k)$$

d'où ce théorème: ¹

Pour que le déterminant des A_{ik} et tous ses mineurs convergent absolument, il suffit que le produit des éléments diagonaux converge absolument et que les éléments non-diagonaux de chaque ligne soient moindres en valeur absolue que les termes d'une série donnée absolument convergente.

¹ Il est clair qu'on peut aussi arriver à ce théorème en supposant, dans l'énoncé précédent (n° 13), que tous les S_i soient égaux à l'unité.

Si ces conditions sont remplies je dirai que le déterminant des A_{ik} est *hypernormal*¹ et j'appellerai la suite des nombres positifs

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots$$

suite majorante de ce déterminant si la série formée par ces nombres converge et que l'on ait (en posant $A_{ii} = 1 + \alpha_{ii}$, $A_{ik} = \alpha_{ik}$)

$$|a_{ik}| < K\alpha_k,$$

K désignant une constante.

On voit immédiatement que les déterminants normaux entrent comme cas particulier dans cette nouvelle classe.

Il est facile d'étendre la plupart des propriétés des déterminants normaux aux déterminants hypernormaux. Quant à la multiplication on peut énoncer ce théorème:

Soient A et B deux déterminants hypernormaux, A ayant la suite majorante

$$(\alpha) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \dots$$

et B ayant la suite majorante

$$(\beta) \qquad \beta_1, \beta_2, \dots$$

les lois de multiplication II et III sont applicables à ces déterminants de telle sorte que le produit AB prend la forme d'un déterminant hypernormal ayant la suite majorante (β) ou (α) selon qu'on applique la loi II ou la loi III.

Je n'insisterai plus ici sur les propriétés des déterminants en question. Je me bornerai à énoncer deux propriétés des mineurs d'un tel déterminant qui nous seront utiles dans ce qui suit.

On voit que le mineur

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix}$$

¹ Un déterminant du type étudié plus haut (n° 13) pouvant être ramené à ce nouveau type par une substitution multiplicatoire, nous le dirons *semblable* à un déterminant hypernormal.

s'approche indéfiniment de l'unité quand m va en croissant. Il en résulte que, parmi les mineurs de Δ , il y en a qui ne sont pas nuls.

Il résulte d'une formule démontrée dans mon travail cité plus haut (*Sur la convergence etc.* p. 15) que l'on a

$$(22) \quad \begin{vmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{vmatrix} < k \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k} P K^k,$$

$$(23) \quad \left| \begin{vmatrix} h_1 & \dots & h_i & i_1 & \dots & i_k \\ h_1 & \dots & h_i & j_1 & \dots & j_k \end{vmatrix} \right| \leq |k \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k} P K^k|,$$

tous les indices étant supposés distincts et P et K ne dépendant ni de k ni des h, i, j .

§ 4. Application aux systèmes d'ordre infini d'équations différentielles linéaires.

15. Considérons d'abord un système d'équations linéaires

$$(24) \quad \sum_1^{+\infty} A_{ik} x_k = 0$$

le déterminant Δ des A_{ik} étant hypernormal et ayant la suite majorante $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$.

En se servant d'un raisonnement parfaitement analogue à celui employé dans mon mémoire (*Acta mathematica*, t. 16) pour le cas des déterminants normaux, on arrive au théorème suivant:

Pour qu'il existe une solution x_1, x_2, \dots du système (24) autre que $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots$ et telle que la série

$$(25) \quad \sum_k \alpha_k x_k$$

converge absolument, il faut que Δ soit nul.

Si Δ s'annule avec tous ses mineurs d'ordre 1, 2, ..., $r-1$ mais, parmi les mineurs d'ordre r il y en a un au moins, soit

$$\begin{vmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ k_1 & \dots & k_r \end{vmatrix}$$

qui n'est pas nul, l'équation i^{me} du système (24) (pour $i = i_1, \dots, i_r$) est une conséquence des autres équations du système (24) et la solution générale de ce système peut s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ k_1 & \dots & k_r \end{pmatrix} x_k = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ k & k_2 & \dots & k_r \end{pmatrix} x_{k_1} + \dots + \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_{r-1} & i_r \\ k_1 & \dots & k_{r-1} & k \end{pmatrix} x_{i_r}$$

$x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$ désignant des constantes arbitraires.

16. Passons à un système infini d'équations différentielles linéaires de la forme

$$(26) \quad \frac{dx_i}{dt} = \phi_{i1}x_1 + \phi_{i2}x_2 + \dots \quad (i=1, 2, \dots, +\infty)$$

où les ϕ_{ik} sont des fonctions données de t . Supposons ces fonctions holomorphes dans une région R du plan des t et telles en outre que, pour tout domaine intérieur à R ,

$$(27) \quad |\phi_{ik}| \leq \alpha_i,$$

les α_i étant des nombres positifs formant une série convergente.

Soit t_0 un point à l'intérieur de R de sorte que les ϕ_{ik} soient holomorphes dans le voisinage de $t = t_0$.

Dans ces conditions, j'ai démontré le théorème suivant (*Sur les systèmes d'ordre infini d'équations différentielles*. Öfversigt af Kongl. Vet. Ak. Förhandl. Stockholm 1899):

Il existe un système de fonctions (et un seul)

$$x_1, x_2, \dots$$

satisfaisant au système (26), holomorphes dans le voisinage de $t = t_0$ et prenant à ce point les valeurs initiales

$$(28) \quad x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad \dots$$

les x_i^0 étant supposés tels que la série

$$x_1^0 + x_2^0 + \dots$$

converge absolument.

J'ai démontré ce théorème en comparant le système (26) au suivant

$$(29) \quad \frac{d\tilde{z}_i}{dt} = - \frac{a_i}{t} (\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 + \dots), \quad (i=1, 2, \dots, +\infty)$$

ρ étant pris inférieur au rayon de convergence du développement Taylorien des a_{ik} dans le voisinage de $t = t_0$.

Désignant par

$$\tilde{z}_\nu^{(1)}, \tilde{z}_\nu^{(2)}, \dots$$

la solution du système (29) qui vérifie les conditions initiales

$$\tilde{z}_\nu^{(i)} = 0 \quad (i \neq \nu); \quad \tilde{z}_\nu^{(\nu)} = 1$$

pour $t = 0$ on a, en posant $\alpha = \sum \alpha_\nu$

$$\begin{aligned} \tilde{z}_\nu^{(\nu)} &= 1 + \frac{\alpha_\nu}{\alpha} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{t}{\rho}\right)^{\alpha_\nu}} - 1 \right), \\ \tilde{z}_\nu^{(i)} &= \frac{\alpha_i}{\alpha} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{t}{\rho}\right)^{\alpha_\nu}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Il en résulte que si l'on désigne par

$$x_\nu^{(1)}, x_\nu^{(2)}, \dots$$

la solution du système (26) satisfaisant aux conditions initiales (pour $t = t_0$)

$$(30) \quad x_\nu^{(i)} = 0 \quad (i \neq \nu), \quad x_\nu^{(\nu)} = 1$$

on a, pour $|t - t_0| < \rho$,

$$(31) \quad \begin{aligned} |x_\nu^{(\nu)} - 1| &\leq \frac{\alpha_\nu}{\alpha} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{|t - t_0|}{\rho}\right)^{\alpha_\nu}} - 1 \right), \\ |x_\nu^{(i)}| &\leq \frac{\alpha_i}{\alpha} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{|t - t_0|}{\rho}\right)^{\alpha_\nu}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Comme la solution générale

$$x_1, x_2, \dots$$

définie par les conditions initiales (pour $t = t_0$)

$$x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad \dots$$

s'exprime sous la forme

$$x_i = x_1^0 x_1^{(i)} + x_2^0 x_2^{(i)} + \dots, \quad (i=1, 2, \dots, +\infty)$$

on peut dire, par analogie avec les systèmes d'ordre fini, que les solutions

$$(32) \quad x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots \quad (\nu=1, 2, \dots, +\infty)$$

constituent un *système fondamental d'intégrales* du système (26).

Les formules (31) font voir que le déterminant formé par ces fonctions

$$(33) \quad \Delta(t) = \begin{vmatrix} x_1^{(1)}, & x_1^{(2)}, & \dots \\ x_2^{(1)}, & x_2^{(2)}, & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

est hypernormal et a pour suite majorante $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ tant que t reste dans le domaine

$$|t - t_0| < \rho.$$

De là et du théorème énoncé au n° 15 il résulte que les constantes

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad \dots$$

sont les seules pour lesquelles on a identiquement

$$c_1 x_1^{(i)} + c_2 x_2^{(i)} + \dots = 0 \quad (i=1, 2, \dots, +\infty)$$

et pour lesquelles en outre la série

$$c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots$$

converge absolument.

Pour cette raison nous pourrions dire que les solutions du système fondamental (32) sont *linéairement indépendantes*.

Plus généralement, si les solutions

$$y_\nu^{(1)}, y_\nu^{(2)}, \dots \quad (\nu=1, 2, \dots, +\infty)$$

ont pour $t = t_0$ un déterminant hypernormal D qui n'est pas nul, ces

solutions sont linéairement indépendantes et la solution définie par les conditions initiales

$$x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad \dots \quad (\text{pour } t = t_0)$$

(les x_i^0 formant une série absolument convergente) peut s'exprimer linéairement par rapport à ces solutions:

$$x_i = c_1 y_1^{(i)} + c_2 y_2^{(i)} + \dots$$

En effet, il suffit pour cela de prendre

$$c_i = \frac{D_i}{D},$$

D_i désignant ce que devient D quand on y remplace la colonne formée par les $y_k^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots$) par celle formée par les x_i^0 ($i = 1, 2, \dots$).

Soit L un chemin passant du point t_0 à un point t' et situé tout entier à l'intérieur de la région R et faisons la continuation analytique des fonctions $x_v^{(i)}(t)$ en suivant ce chemin. *Je dis que le déterminant (33) ne cesse pas d'être hypernormal et d'avoir la suite majorante $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$.*

En effet, choisissons sur L des points

$$t_1, t_2, \dots, t_{p-1}$$

de telle manière que (posant $t_p = t'$, $\rho_0 = \rho$)

$$t_v - t_{v-1} < \rho_{v-1}, \quad (v = 1, 2, \dots, p)$$

ρ_{v-1} désignant le rayon de convergence du développement taylorien des fonctions $\phi_{ik}(t)$ dans le voisinage de $t = t_{v-1}$.

Soit

$$x_k^{(1)}(t; t_v), x_k^{(2)}(t; t_v), \dots$$

la solution du système (26) qui est holomorphe dans le voisinage de $t = t_v$ et qui, pour $t = t_v$, satisfait aux conditions initiales

$$x_k^{(i)} = 0 \quad (i \neq k), \quad x_k^{(k)} = 1.$$

Nous savons alors que le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)}(t; t_v) & x_1^{(2)}(t; t_v) & \dots \\ x_2^{(1)}(t; t_v) & x_2^{(2)}(t; t_v) & \dots \end{vmatrix}$$

admet la suite majorante $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$; autrement dit, en posant

$$A_{ii} = 1 + a_{ii}, \quad A_{ik} = a_{ik}, \quad (i \neq k)$$

on a

$$|a_{ik}| < K\alpha_k,$$

K désignant une constante.

Ceci établi, proposons-nous la question s'il existe une solution

$$y_1, y_2, \dots$$

du système (26) qui se multiplie par une constante ω quand on fait décrire à t le chemin fermé L ; ce qui s'exprime en écrivant

$$(34) \quad \bar{y}_i = \omega y_i,$$

\bar{u} désignant la valeur qu'acquiert une fonction u quand, partant d'un point t voisin de t_0 , on y retourne après avoir décrit le chemin L .

Posons

$$y_i = c_1 x_1^{(i)} + c_2 x_2^{(i)} + \dots$$

de sorte que c_i désigne la valeur initiale de y_i (pour $t = t_0$) et remarquons que nous avons

$$\bar{x}_k^{(i)} = \sum_j A_{kj} x_j^{(i)},$$

nous aurons donc, pourvu que la série

$$(35) \quad c_1 + c_2 + \dots$$

converge absolument,

$$\bar{y}_i = \sum_{k,j} c_k A_{kj} x_j^{(i)}$$

la série double du second membre étant absolument convergente tant que l'on a

$$|t - t_0| < \rho.$$

Pour que la condition (34) soit remplie il faut donc que l'on ait, pour toute valeur de t ,

$$(36) \quad \sum_j x_j^{(i)} b_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, +\infty)$$

où nous avons mis, pour abrégér

$$b_j = \omega c_j - \sum_k c_k A_{kj}.$$

La série (35) devant être absolument convergente, il en est de même de la série

$$b_1 + b_2 + \dots$$

Donc, le déterminant du système linéaire (36) n'étant pas nul identiquement, il résulte du théorème énoncé plus haut (n° 15) qu'il faut avoir

$$b_j = 0, \quad (j=1, 2, \dots, +\infty)$$

c'est-à-dire que les c_k doivent vérifier le système linéaire

$$(37) \quad \omega c_j - \sum_k c_k A_{kj} = 0. \quad (j=1, 2, \dots, +\infty)$$

Supposant $\omega \neq 1$ nous pouvons poser

$$\omega - 1 = -\frac{1}{\mu}$$

de sorte que ce système prenne la forme

$$(38) \quad c_j + \mu \sum_k a_{kj} c_k = 0. \quad (j=1, 2, \dots, +\infty)$$

Le déterminant de ce système

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} 1 + \mu a_{11} & \mu a_{12} & \dots \\ \mu a_{21} & 1 + \mu a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

est hypernormal et possède, pour chaque valeur de μ , la suite majorante (a_1, a_2, \dots) .

Donc, pour que le système (38) admette une solution c_1, c_2, \dots telle que la série (35) converge absolument, il faut et il suffit que μ soit une racine de $\Delta(\mu) = 0$. Donc, pour que le système linéaire (26) admette une solution

$$y_1, y_2, \dots$$

jouissant de la propriété

$$y_i = \omega y_i$$

et telle, en outre, que la somme

$$y_1 + y_2 + \dots$$

converge absolument pour $t = t_0$, il faut que ω satisfasse à l'équation

$$(39) \quad \Delta\left(\frac{1}{1-\omega}\right) = 0.$$

Cette condition est aussi suffisante. En effet, soit $\omega_1 \neq 1$ une racine de l'équation (39). Supposons d'abord que ce soit une racine *simple*. On sait alors¹ que, parmi les mineurs de Δ du premier ordre, il y a un au moins qui ne s'annule pas pour $\omega = \omega_1$. Désignant par $\alpha_{ik}(\mu)$ les mineurs du premier ordre de $\Delta(\mu)$ et supposant, par exemple,

$$\alpha_{11}\left(\frac{1}{1-\omega_1}\right) \neq 0,$$

on pourra écrire la solution générale du système (38) sous la forme

$$c_k = c \cdot \alpha_{1k}, \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

c désignant une constante arbitraire.

Or, supposant comme il est permis que la somme

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots$$

soit inférieure à l'unité et appliquant la formule (23) on voit que les valeurs ainsi définies des c_k satisfont aux inégalités

$$|c_k| < K\alpha_k,$$

K désignant une constante.

Donc, si l'on pose

$$(40) \quad y_i = c_1 x_1^{(i)} + c_2 x_2^{(i)} + \dots,$$

on est assuré d'avoir des séries absolument convergentes telles que la série

$$y_1 + y_2 + \dots$$

converge absolument d'où, a fortiori, on voit que chacune des séries

$$\sum_k c_k^t y_k$$

¹ Ceci résulte, par exemple, de la formule (10) de mon travail cité plus haut: *Sur la convergence des déterminants d'ordre infini*.

converge absolument. Comme on a de plus

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_k \phi_{ik} y_k$$

la formule (40) définit bien une solution du système (26) jouissant de la propriété

$$y_i = \omega_i y_i.$$

Dans le cas d'une racine multiple ω_i d'ordre k on trouvera k solutions linéairement indépendantes qui pourront être rangés en sous-groupes comme dans le cas correspondant d'un système linéaire d'ordre n .

Comme $\omega = 1$ est un point singulier du premier membre de l'équation (39) (sauf dans le cas où Δ se réduit à une constante) on voit que la recherche des intégrales qui restent uniformes dans la partie considérée du plan échappe à la méthode précédente et exige une étude spéciale. Pour $\omega = 1$ le système (37) se réduit à un système

$$(41) \quad \sum_k a_{kj} c_k = 0 \quad (j=1, 2, \dots, +\infty)$$

dont le déterminant n'est pas absolument convergent; on arrive donc à cette conclusion, paradoxale au premier abord, que la recherche des intégrales uniformes du système (26) conduit à des difficultés plus graves que la recherche des intégrales non-uniformes jouissant de la propriété (34).

17. Sans insister ici sur ces questions que je n'ai pu qu'aborder dans ce travail, je considérerai l'exemple le plus simple pour éclaircir les résultats obtenus.

Soit

$$(42) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\phi_i}{1-t} (x_1 + x_2 + \dots) \quad (i=1, 2, \dots, +\infty)$$

le système proposé, les ϕ_i étant des constantes formant une série absolument convergente

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \dots$$

Supposons d'abord $\phi \neq 0$. En posant

$$x_\nu^{(\nu)} = 1 + \frac{\phi_\nu}{\phi} \left[\frac{1}{(1-t)^\nu} - 1 \right],$$

$$x_\nu^{(n)} = \frac{\phi_n}{\phi} \left[\frac{1}{(1-t)^\nu} - 1 \right], \quad (n \neq \nu)$$

on a une solution

$$x_{\nu}^{(1)}, x_{\nu}^{(2)}, \dots$$

du système (42) satisfaisant aux conditions initiales

$$x_{\nu}^{(\nu)} = 1, \quad x_{\nu}^{(n)} = 0 \quad (\text{pour } t = 0)$$

d'où l'on voit que la solution générale

$$x_1, x_2, \dots$$

définie par les conditions initiales

$$x_i = x_i^0 \quad (\text{pour } t = 0)$$

peut s'exprimer ainsi

$$x_i = x_1^0 x_1^{(i)} + x_2^0 x_2^{(i)} + \dots$$

ou bien

$$(44) \quad x_i = x_i^0 + \frac{\phi_i}{\phi} \left[\frac{1}{(1-t)^{\phi}} - 1 \right] \sum_{\nu} x_{\nu}^0.$$

Soit L une circonférence décrite du point $t = 1$ comme centre et passant par le point $t = 0$. On aura, en faisant décrire à t le chemin L dans le sens positif,

$$\bar{x}_{\nu}^{(\nu)} = 1 + \frac{\phi_{\nu}}{\phi} \left[\frac{e^{-2\pi i \phi}}{(1-t)^{\phi}} - 1 \right],$$

$$\bar{x}_{\nu}^{(n)} = \frac{\phi_n}{\phi} \left[\frac{e^{-2\pi i \phi}}{(1-t)^{\phi}} - 1 \right];$$

donc nous avons dans ce cas

$$A_{\nu\nu} = 1 + \frac{\phi_{\nu}}{\phi} (e^{-2\pi i \phi} - 1),$$

$$A_{\nu n} = \frac{\phi_n}{\phi} (e^{-2\pi i \phi} - 1)$$

et la valeur du déterminant $\Delta \left(\frac{1}{1-\omega} \right)$ est la suivante

$$\Delta \left(\frac{1}{1-\omega} \right) = 1 - \frac{1}{1-\omega}.$$

L'équation (39) n'a donc ici qu'une seule racine savoir

$$\omega = e^{-2\pi i \nu},$$

et, comme on voit facilement que les mineurs du déterminant $\Delta(\mu)$ appartenant à une ligne quelconque sont proportionnels aux quantités

$$\phi_1, \phi_2, \dots$$

la solution la plus générale du système

$$c_i + \frac{1}{1-\omega} \sum_j a_{ij} c_j = 0,$$

$$\left(a_{ij} = \frac{\phi_j}{\phi_i} (e^{-2\pi i \nu} - 1) \right)$$

telle que la série $\sum c_j$ converge absolument, peut s'écrire sous la forme

$$c_k = c \phi_k,$$

c désignant une constante arbitraire.

Donc la seule solution du système différentiel (42) qui se multiplie par une constante quand t tourne autour du point $t = 1$ est la suivante

$$x_i = \frac{c \phi_i}{(1-t)^{\beta}}, \quad (i=1, 2, \dots, +\infty)$$

Pour trouver les solutions uniformes il faut résoudre le système (41) qui dans le cas considéré se réduit à une seule équation savoir

$$\sum_k c_k = 0.$$

Les c_k étant assujettis à cette condition, si l'on forme la solution x_1, x_2, \dots qui satisfait aux conditions initiales

$$x_i = c_i \quad \text{pour } t = 0,$$

la formule (44) montre que l'on a, pour toute valeur de t ,

$$x_i = c_i.$$

Donc, en dehors de cette solution constante, il n'y pas de solution uniforme du système (42).

Nous supposons plus haut $\phi \neq 0$. Prenons maintenant le cas

$$\phi = 0.$$

Alors on trouve que la solution du système (42) qui est définie par les conditions initiales

$$x_\nu^{(0)} = 1, \quad x_\nu^{(n)} = 0 \quad (\text{pour } t = 0)$$

peut s'écrire ainsi

$$x_\nu^{(0)} = 1 - \phi_\nu \log(1 - t),$$

$$x_\nu^{(n)} = -\phi_\nu \log(1 - t).$$

On a donc

$$A_{\nu\nu} = 1 + \phi_\nu \cdot 2\pi i,$$

$$A_{\mu\nu} = \phi_\mu \cdot 2\pi i,$$

Il en résulte que le déterminant Δ se réduit dans ce cas à une constante, à savoir l'unité.

Donc il n'y a pas de solution du système (42) qui se multiplie par une constante ω ($\omega \neq 1$) quand t tourne autour du point $t = 1$.

Quant aux solutions uniformes, on voit comme dans le cas $\phi \neq 0$ que

$$x_i = c_i \quad (\Sigma c_i = 0)$$

est la solution uniforme la plus générale.

Par analogie avec les équations linéaires d'ordre fini, on prévoit que dans le cas considéré, la solution générale doit présenter une singularité logarithmique dans le voisinage de $t = 1$. C'est aussi ce qui a lieu, la solution générale pouvant s'écrire sous la forme

$$x_i = c_i - \phi_i \cdot \sum_k c_k \cdot \log(1 - t),$$

les c_k désignant des constantes arbitraires.

Par ce qui précède on voit que la théorie classique des équations différentielles linéaires fondée par M. Fuchs peut, dans certaines conditions, être généralisée au cas d'un système d'ordre infini.

Pour voir l'utilité et même la nécessité de cette généralisation, il suffit de remarquer que la recherche des intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles conduit, dans des cas étendus, à des systèmes différentiels d'ordre infini appartenant au type considéré plus haut.¹

¹ Voir, par exemple, l'équation (A) considérée dans mon travail cité plus haut (*Sur les systèmes d'ordre infini d'équations différentielles*).

NACHWEIS DES ZUSAMMENHANGES ZWISCHEN DEN VIER DREHUNGS-
 AXEN EINER LAGENÄNDERUNG EINES ORTHOGONALEN SYSTEMS
 UND EINEM MAXIMUMSTETRAEDER

VON

R. LIPSCHITZ

in BONN.

Wenn ein System von drei durch einen Punkt laufenden zu einander senkrechten halb unendlichen geraden Linien, deren Reihenfolge auf irgend eine Art festgesetzt ist, und ein zweites durch denselben Punkt laufendes, eben solches von dem ersten verschiedenes System gegeben ist, und wenn das zweite System mit dem ersten unter Correspondenz der jedesmal gewählten Reihenfolge durch eine Drehung zur Deckung gebracht werden soll, so muss bekanntlich für die Lösbarkeit der Aufgabe die Bedingung der Übereinstimmung zwischen den beiden Reihenfolgen erfüllt sein; in diesem Fall ist dann die zu der Auflösung gehörende Drehungsaxe vollständig bestimmt.

Wenn dagegen verlangt wird, dass ein System von drei durch einen Punkt gehenden zu einander senkrechten ganz unendlichen geraden Linien, deren Reihenfolge irgendwie festgesetzt ist, und ein zweites durch denselben Punkt gehendes, in gleicher Weise definirtes, von dem ersten verschiedenes System durch eine Drehung entsprechend der Reihenfolge zur Deckung gebracht werden soll, so leuchtet ein, dass diese Aufgabe immer möglich ist, dass sie vier Auflösungen zulässt, und dass zu jeder derselben eine vollständig bestimmte Drehungsaxe gehört. In der gegenwärtigen Arbeit wird die Beziehung aufgezeigt werden, in welcher die Gruppe der beschriebenen vier Drehungsaxen zu dem Quaternion steht, welches mit der Bestimmung der gegenseitigen Lage der betreffenden orthogonalen Systeme correspondirt. Es wird ferner nachgewiesen werden, dass, wenn von dem gemeinsamen

Durchschnittspunkt aus auf jeder der vier Drehungsachsen nach einer festen nur von dem bezüglichen Drehungswinkel abhängenden Regel eine Strecke abgeschnitten wird, die Endpunkte der Strecken die vier Ecken eines Tetraeders bilden, welches die Beschaffenheit eines Maximumtetraeders hat. Der gemeinsame Durchschnittspunkt der beiden orthogonalen Systeme ist der gemeinsame Durchschnittspunkt der vier Höhen des Maximumtetraeders und liegt innerhalb desselben; die vier Drehungsachsen sind die Höhen des Tetraeders. Umgekehrt wird dann ein geometrisches Verfahren aus einander gesetzt werden, um für jedes gegebene Maximumtetraeder, bei dem der gemeinsame Durchschnittspunkt der vier Höhen innerhalb desselben liegt, zwei in dem gemeinsamen Durchschnittspunkte der Höhen zusammentreffende Systeme von je drei ganz unendlichen gegen einander senkrechten geraden Linien so zu bestimmen, dass das eine System auf das andere durch eine Drehung um eine von vier Axen zurückgeführt werden kann, die beziehungsweise mit den Höhen des Tetraeders übereinstimmen.

Schliesslich werde ich eine Verallgemeinerung des Begriffs der Gruppe der vier Drehungsachsen auf eine ebene Mannigfaltigkeit von beliebig vielen Dimensionen entwickeln, und dabei erörtern, wie sich die hierfür gebrauchte Definition einer Axe zu der von SCHLÄFLI angewendeten Definition verhält.

I.

Es mögen die Coordinaten eines Punktes für ein in dem Raume festes rechtwinkliges Axensystem mit x_1, x_2, x_3 , die Coordinaten desselben Punktes für ein zweites von dem ersten verschiedenes bewegliches rechtwinkliges Axensystem mit y_1, y_2, y_3 bezeichnet werden. Dann bestehen die drei mit den constanten Coefficienten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{33}$ gebildeten Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3 \\ x_2 = \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3 \\ x_3 = \alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3, \end{cases}$$

bei welchen die Quadratsumme $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ gleich der Quadratsumme $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ ist. Hierbei wird angenommen, dass das zweite System auf

das erste durch eine Drehung zurückgeführt werden kann; deshalb muss die Determinante der Substitution gleich der positiven Einheit sein. Weil nun, wenn alle Coordinaten auf das erste System bezogen werden, der Punkt (x_1, x_2, x_3) bei der Bewegung des zweiten in die Lage des ersten Systems in den Punkt (y_1, y_2, y_3) übergeht, so gilt für jeden von dem Anfangspunkte verschiedenen Punkt (ρ_1, ρ_2, ρ_3) der Axe, um welche das zweite System gedreht werden muss, damit die angegebene Lagenänderung erfolge, die Gleichung

$$(2) \quad \rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \rho_3 x_3 = \rho_1 y_1 + \rho_2 y_2 + \rho_3 y_3,$$

welche ausdrückt, dass die Cosinus der Winkel, die von der Drehungsaxe mit den von dem Anfangspunkte nach (x_1, x_2, x_3) und nach (y_1, y_2, y_3) gezogenen Strahlen gebildet werden, einander gleich sind. Um hingegen festzustellen, auf welche Weise, wenn die Axensysteme als Systeme von ganz unendlichen Linien betrachtet werden, das zweite System mit dem ersten der Reihenfolge der Linien entsprechend in Coincidenz gebracht werden kann, erkennt man leicht, dass dies möglich ist, indem das eine System ungeändert bleibt, dagegen für eine gerade Anzahl von Axen des anderen die eine Seite mit der entgegengesetzten vertauscht wird. Es möge das erste System ungeändert bleiben, und bei dem zweiten die Vertauschung der Seiten der betreffenden Axen vorgenommen werden. Dann lässt sich offenbar nur so zu neuen Auflösungen gelangen, dass entweder die erste oder zweite oder dritte Axe des zweiten Systems unberührt bleibt, während an den jedesmaligen übrigen beiden Axen die angegebene Vertauschung bewerkstelligt wird. Wofern nun für diese erste, zweite oder dritte Voraussetzung ein von dem Anfangspunkt verschiedener Punkt der aufzusuchenden Drehungsaxe respective mit $(\rho_1^{(1)}, \rho_2^{(1)}, \rho_3^{(1)})$ oder $(\rho_1^{(2)}, \rho_2^{(2)}, \rho_3^{(2)})$, oder $(\rho_1^{(3)}, \rho_2^{(3)}, \rho_3^{(3)})$ bezeichnet wird, erhält man auf dieselbe Weise, wie (2) entstanden ist, beziehungsweise die drei Gleichungen

$$(3) \quad \rho_1^{(1)} x_1 + \rho_2^{(1)} x_2 + \rho_3^{(1)} x_3 = \rho_1^{(1)} y_1 - \rho_2^{(1)} y_2 - \rho_3^{(1)} y_3,$$

oder

$$(4) \quad \rho_1^{(2)} x_1 + \rho_2^{(2)} x_2 + \rho_3^{(2)} x_3 = -\rho_1^{(2)} y_1 + \rho_2^{(2)} y_2 - \rho_3^{(2)} y_3,$$

oder

$$(5) \quad \rho_1^{(3)} x_1 + \rho_2^{(3)} x_2 + \rho_3^{(3)} x_3 = -\rho_1^{(3)} y_1 - \rho_2^{(3)} y_2 + \rho_3^{(3)} y_3.$$

Aus (2), (3), (4), (5) folgen unmittelbar die vier Systeme von Gleichungen

$$(6) \quad \begin{cases} (\alpha_{11} - 1)\rho_1 + \alpha_{21}\rho_2 + \alpha_{31}\rho_3 = 0 \\ \alpha_{12}\rho_1 + (\alpha_{22} - 1)\rho_2 + \alpha_{32}\rho_3 = 0 \\ \alpha_{13}\rho_1 + \alpha_{23}\rho_2 + (\alpha_{33} - 1)\rho_3 = 0, \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} (\alpha_{11} - 1)\rho_1^{(1)} + \alpha_{21}\rho_2^{(1)} + \alpha_{31}\rho_3^{(1)} = 0 \\ -\alpha_{12}\rho_1^{(1)} + (-\alpha_{22} - 1)\rho_2^{(1)} - \alpha_{32}\rho_3^{(1)} = 0 \\ -\alpha_{13}\rho_1^{(1)} - \alpha_{23}\rho_2^{(1)} + (-\alpha_{33} - 1)\rho_3^{(1)} = 0, \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} (-\alpha_{11} - 1)\rho_1^{(2)} - \alpha_{21}\rho_2^{(2)} - \alpha_{31}\rho_3^{(2)} = 0 \\ \alpha_{12}\rho_1^{(2)} + (\alpha_{22} - 1)\rho_2^{(2)} + \alpha_{32}\rho_3^{(2)} = 0 \\ -\alpha_{13}\rho_1^{(2)} - \alpha_{23}\rho_2^{(2)} + (-\alpha_{33} - 1)\rho_3^{(2)} = 0, \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} (-\alpha_{11} - 1)\rho_1^{(3)} - \alpha_{21}\rho_2^{(3)} - \alpha_{31}\rho_3^{(3)} = 0 \\ -\alpha_{12}\rho_1^{(3)} + (-\alpha_{22} - 1)\rho_2^{(3)} - \alpha_{32}\rho_3^{(3)} = 0 \\ \alpha_{13}\rho_1^{(3)} + \alpha_{23}\rho_2^{(3)} + (\alpha_{33} - 1)\rho_3^{(3)} = 0. \end{cases}$$

Die Systeme (7), (8), (9) gehen aus (6) hervor, indem in der orthogonalen Substitution (1) beziehungsweise die Coefficienten der zweiten und dritten, oder der dritten und ersten, oder der ersten und zweiten Verticalreihe mit der negativen Einheit multiplicirt werden. In der Schrift *Untersuchungen über die Summe von Quadraten*, Bonn 1886, habe ich in I, Art. 3, S. 24 nachgewiesen, dass von den Determinanten, welche auf eine der angegebenen Arten aus dem Schema

$$\begin{array}{ccc} \alpha_{11} + 1, & \alpha_{12}, & \alpha_{13} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22} + 1, & \alpha_{23} \\ \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33} + 1 \end{array}$$

entstehen, die ursprüngliche Determinante mitgerechnet, wenigstens eine von Null verschieden sein muss, und dass man deshalb voraussetzen darf, dass bei der zu Anfang angenommenen orthogonalen Substitution diese Bedingung erfüllt, also der halbe Werth jener Determinante, $1 + \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$,

nicht gleich Null sei. Indem diese Annahme gemacht wird, werden für eine beliebige von Null verschiedene reelle Grösse die reellen Grössen λ_{23} , λ_{31} , λ_{12} durch die Gleichungen (7), l. c. S. 25, wie folgt, bestimmt

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{a_{23} - a_{32}}{a_{11} + a_{22} + a_{33}} = \lambda_{23}, \quad 1 + \frac{a_{31} - a_{13}}{a_{11} + a_{22} + a_{33}} = \lambda_{31}, \\ \lambda_{23} + \lambda_{22} = 0, \quad \lambda_{31} + \lambda_{13} = 0, \\ \quad \quad \quad 1 + \frac{a_{12} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} + a_{33}} = \lambda_{12}, \\ \quad \quad \quad \lambda_{12} + \lambda_{21} = 0. \end{array} \right.$$

Mit Hülfe derselben ergeben sich die Gleichungen (9) und (10), l. c. S. 25, welche so zusammengefasst werden können

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 x_1 + \lambda_{21} x_2 + \lambda_{31} x_3 = \lambda_0 y_1 + \lambda_{12} y_2 + \lambda_{13} y_3 \\ \lambda_{12} x_1 + \lambda_0 x_2 + \lambda_{32} x_3 = \lambda_{21} y_1 + \lambda_0 y_2 + \lambda_{23} y_3 \\ \lambda_{13} x_1 + \lambda_{23} x_2 + \lambda_0 x_3 = \lambda_{31} y_1 + \lambda_{32} y_2 + \lambda_0 y_3 \\ \lambda_{23} x_1 + \lambda_{31} x_2 + \lambda_{12} x_3 = \lambda_{23} y_1 + \lambda_{31} y_2 + \lambda_{12} y_3. \end{array} \right.$$

Durch die Benutzung der Symbole i_{23} , i_{31} , i_{12} , die mit den Symbolen HAMILTON'S, j, k, i der Reihe nach übereinstimmen, folgt dann l. c. S. 27 für die obige orthogonale Substitution (1) die Zusammenfassung

$$(12) \quad AX = YA_1,$$

wo

$$\begin{aligned} i_{23} + i_{32} &= 0, & i_{31} + i_{13} &= 0, & i_{12} + i_{21} &= 0, \\ A &= \lambda_0 + i_{12} \lambda_{12} + i_{13} \lambda_{13} + i_{23} \lambda_{23}, & A_1 &= \lambda_0 - i_{12} \lambda_{12} - i_{13} \lambda_{13} + i_{23} \lambda_{23}, \\ X &= x_1 + i_{12} x_2 + i_{13} x_3, & Y &= y_1 + i_{12} y_2 + i_{13} y_3 \end{aligned}$$

gesetzt ist.

In dem Aufsatze *Bemerkungen über die Differentiale von symbolischen Ausdrücken*, Sitzungsberichte der Berliner Akademie vom 16. Februar 1899 ist gezeigt, dass statt der obigen Gleichung (12) auch die Gleichung

$$(12') \quad A(i_{23} x_1 + i_{31} x_2 + i_{12} x_3) = (i_{23} y_1 + i_{31} y_2 + i_{12} y_3) A$$

gesetzt werden darf, in welcher nur das Quaternion

$$A = \lambda_0 + i_{23}\lambda_{23} + i_{31}\lambda_{31} + i_{12}\lambda_{12}$$

auftritt. In Folge der Einführung der reellen Bestandtheile $\lambda_0, \lambda_{23}, \lambda_{31}, \lambda_{12}$ des Quaternions A erhalten die Substitutionscoefficienten die folgenden, zuerst von EULER ermittelten Ausdrücke, welche in der Schrift über die Summe von Quadraten I, Art. 3, S. 28 angegeben sind,

$$(13) \left\{ \begin{array}{lll} \alpha_{11} = \frac{\lambda_0^2 - \lambda_{12}^2 - \lambda_{13}^2 + \lambda_{23}^2}{N(A)}, & \alpha_{12} = \frac{2(\lambda_0 \lambda_{12} - \lambda_{13} \lambda_{23})}{N(A)}, & \alpha_{13} = \frac{2(\lambda_0 \lambda_{13} + \lambda_{12} \lambda_{23})}{N(A)} \\ \alpha_{21} = \frac{2(-\lambda_0 \lambda_{12} - \lambda_{13} \lambda_{31})}{N(A)}, & \alpha_{22} = \frac{\lambda_0^2 - \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 - \lambda_{23}^2}{N(A)}, & \alpha_{23} = \frac{2(\lambda_0 \lambda_{23} - \lambda_{12} \lambda_{13})}{N(A)} \\ \alpha_{31} = \frac{2(-\lambda_0 \lambda_{13} + \lambda_{12} \lambda_{23})}{N(A)}, & \alpha_{32} = \frac{2(-\lambda_0 \lambda_{23} - \lambda_{12} \lambda_{13})}{N(A)}, & \alpha_{33} = \frac{\lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 - \lambda_{13}^2 - \lambda_{23}^2}{N(A)}. \end{array} \right.$$

Der gemeinsame Nenner ist die Norm des Quaternions A ,

$$(14) \quad N(A) = \lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 + \lambda_{23}^2.$$

Zu dem System der Coefficienten in den Gleichungen (6) gehört das System der adjungirten Elemente

$$(15) \left\{ \begin{array}{lll} \alpha_{11} - \alpha_{22} - \alpha_{33} + 1, & \alpha_{21} + \alpha_{12}, & \alpha_{31} + \alpha_{13} \\ \alpha_{12} + \alpha_{21}, & -\alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{33} + 1, & \alpha_{32} + \alpha_{23} \\ \alpha_{13} + \alpha_{31}, & \alpha_{23} + \alpha_{32}, & -\alpha_{11} - \alpha_{22} + \alpha_{33} + 1; \end{array} \right.$$

die entsprechende Determinante hat den Werth Null, wie es sein muss, damit die Gleichungen (6) zusammen bestehen können. Durch Anwendung von (13) geht (15) in die folgende Gestalt über

$$(16) \left\{ \begin{array}{lll} \frac{4\lambda_{23}^2}{N(A)}, & \frac{4\lambda_{23}\lambda_{31}}{N(A)}, & \frac{4\lambda_{23}\lambda_{12}}{N(A)} \\ \frac{4\lambda_{31}\lambda_{23}}{N(A)}, & \frac{4\lambda_{31}^2}{N(A)}, & \frac{4\lambda_{31}\lambda_{12}}{N(A)} \\ \frac{4\lambda_{12}\lambda_{23}}{N(A)}, & \frac{4\lambda_{12}\lambda_{31}}{N(A)}, & \frac{4\lambda_{12}^2}{N(A)}. \end{array} \right.$$

In Folge der Voraussetzung, dass das ursprünglich angenommene zweite orthogonale System von dem ersten verschieden sei, darf (1) nicht die

identische Substitution sein, folglich dürfen λ_{23} , λ_{31} , λ_{12} nicht sämtlich verschwinden. Aus diesem Grunde können auch nicht alle in (16) enthaltenen adjungirten Elemente gleich Null sein. Deshalb sind die Verhältnisse der Grössen ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 durch (6) eindeutig bestimmt, und können aus (16) entnommen werden. Durch Weglassung des gemeinsamen Factors in einer der drei Horizontalreihen erhält man für die Grössen ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 die Proportion

$$(17) \quad \rho_1 : \rho_2 : \rho_3 = \lambda_{23} : \lambda_{31} : \lambda_{12}.$$

Auf genau dieselbe Weise finden sich aus (7), (8), (9) die Proportionen

$$(18) \quad \rho_1^{(1)} : \rho_2^{(1)} : \rho_3^{(1)} = \lambda_0 : \lambda_{21} : \lambda_{31},$$

$$(19) \quad \rho_1^{(2)} : \rho_2^{(2)} : \rho_3^{(2)} = \lambda_{12} : \lambda_0 : \lambda_{32},$$

$$(20) \quad \rho_1^{(3)} : \rho_2^{(3)} : \rho_3^{(3)} = \lambda_{13} : \lambda_{23} : \lambda_0.$$

Weil λ_0 notwendig von Null verschieden ist, können in keiner der drei Proportionen alle Glieder auf der rechten Seite verschwinden, und somit ist die Gruppe der vier Drehungsaxen, welche zu der vorhandenen Lagenänderung des gegebenen rechtwinkligen Axensystems gehören, unzweifelhaft bestimmt.

An dieser Stelle möchte ich eine Bemerkung einschalten. Wenn für jedes der Systeme (6), (7), (8), (9) festgestellt ist, dass die bezügliche Determinante verschwindet, ohne dass alle adjungirten Elemente verschwinden, so ist der Beweis geliefert, dass durch die Systeme (6), (7), (8), (9) die Verhältnisse der jedesmaligen drei Unbekannten

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3; \rho_1^{(1)}, \rho_2^{(1)}, \rho_3^{(1)}; \rho_1^{(2)}, \rho_2^{(2)}, \rho_3^{(2)}; \rho_1^{(3)}, \rho_2^{(3)}, \rho_3^{(3)}$$

vollständig bestimmt sind. Nun fallen aber die Gleichungen (2), (3), (4), (5), aus denen (6), (7), (8), (9) entstanden sind, in ihrer Gestalt respective mit der vierten, ersten, zweiten, dritten Gleichung des obigen Systems (11) zusammen. Hieraus darf der Schluss gezogen werden, dass die Verhältnisse der jedesmaligen drei Unbekannten mit den Verhältnissen der Grössen

$$\lambda_{23}, \lambda_{31}, \lambda_{22}; \lambda_0, \lambda_{21}, \lambda_{31}; \lambda_{12}, \lambda_0, \lambda_{22}; \lambda_{13}, \lambda_{23}, \lambda_0$$

der Reihe nach zusammenfallen müssen. Darin besteht aber der Inhalt der vier Proportionen (17), (18), (19), (20).

2.

Man gelangt zu einer Bestimmung der Drehungswinkel, welche zu den vier definirten Drehungsachsen gehören, indem man in dem System (11) des vorigen Artikels beziehungsweise die erste, zweite, dritte Gleichung mit x_1, x_2, x_3 , oder die zweite, dritte, vierte Gleichung mit $-x_3, x_2, x_1$, oder die erste, dritte, vierte mit $x_3, -x_1, x_2$, oder die erste, zweite, vierte mit $-x_2, x_1, x_3$ multiplicirt, und die Resultate jedes Mal addirt. Die hervorgehenden Relationen sind die folgenden

$$(1) \quad \lambda_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \lambda_0(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + \lambda_{23}(x_2y_3 - x_3y_2) \\ + \lambda_{31}(x_3y_1 - x_1y_3) + \lambda_{12}(x_1y_2 - x_2y_1),$$

$$(2) \quad \lambda_{23}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = -\lambda_{23}(-x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + \lambda_0(x_2y_3 - x_3y_2) \\ + \lambda_{21}(-x_3y_1 - x_1y_3) + \lambda_{31}(x_1y_2 + x_2y_1),$$

$$(3) \quad \lambda_{31}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = -\lambda_{31}(x_1y_2 - x_2y_2 + x_3y_3) + \lambda_{12}(x_2y_3 + x_3y_2) \\ + \lambda_0(x_3y_1 - x_1y_3) + \lambda_{32}(-x_1y_2 - x_2y_1),$$

$$(4) \quad \lambda_{12}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = -\lambda_{12}(x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3) + \lambda_{13}(-x_2y_2 - x_3y_2) \\ + \lambda_{23}(x_3y_1 + x_1y_3) + \lambda_0(x_1y_2 - x_2y_1).$$

Vermöge der Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ nehmen dieselben respective die Gestalt an

$$(5) \quad \lambda_0((x_1 - y_2)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2) = 2\lambda_{23}(x_2y_3 - x_3y_2) \\ + 2\lambda_{31}(x_3y_1 - x_1y_3) + 2\lambda_{12}(x_1y_2 - x_2y_1),$$

$$(6) \quad \lambda_{23}((x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + (x_3 + y_3)^2) = -2\lambda_0(-x_2y_3 + x_3y_2) \\ - 2\lambda_{21}(x_3y_1 + x_1y_3) - 2\lambda_{31}(-x_1y_2 - x_2y_1),$$

$$(7) \quad \lambda_{31}((x_1 + y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 + y_3)^2) = -2\lambda_{12}(-x_2y_3 - x_3y_2) \\ - 2\lambda_0(-x_3y_1 + x_1y_3) - 2\lambda_{32}(x_1y_2 + x_2y_1),$$

$$(8) \quad \lambda_{12}((x_1 + y_2)^2 + (x_2 + y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2) = -2\lambda_{13}(x_2y_3 + x_3y_2) \\ - 2\lambda_{23}(-x_3y_1 - x_1y_3) + 2\lambda_0(-x_1y_2 + x_2y_1).$$

Die Gleichungen (1), (2), (3), (4) können in der Weise gleichzeitig erhalten werden, dass die beiden Seiten der Gleichung (12') des vorigen Art. rechts mit dem Factor $(i_{23}x_1 + i_{31}x_2 + i_{12}x_3)$ multiplicirt werden, und dass in der hervorgehenden Gleichung

$$(9) \quad -\lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = (i_{23}y_1 + i_{31}y_2 + i_{12}y_3)\lambda(i_{23}x_1 + i_{31}x_2 + i_{12}x_3)$$

auf beiden Seiten die reellen Factoren von λ , i_{23} , i_{31} , i_{12} respective einander gleich gesetzt werden.

In Betreff der Gleichung (5) ist zu erwägen, dass für die von dem Nullpunkt nach dem Punkte $(\lambda_{23}, \lambda_{31}, \lambda_{12})$ gezogene Axe die von dem Nullpunkt nach dem Punkte (x_1, x_2, x_3) oder (y_1, y_2, y_3) laufenden Strecken beziehungsweise die Projection

$$\frac{\lambda_{23}x_1 + \lambda_{31}x_2 + \lambda_{12}x_3}{\sqrt{\lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{12}^2}},$$

oder

$$\frac{\lambda_{23}y_1 + \lambda_{31}y_2 + \lambda_{12}y_3}{\sqrt{\lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{12}^2}}$$

hat, wo die Quadratwurzelgrösse, wie überhaupt im Folgenden, positiv zu verstehen ist. Nach der letzten Gleichung in (11) des vorigen Art. sind die beiden Projectionen stets einander gleich, so dass die Endpunkte der projecirten Strecken zusammenfallen. Der Winkel, den die projecirten Strecken mit einander bilden, ist der aufzusuchende Drehungswinkel ω .

Ich werde von hier ab voraussetzen, dass durch die Wahl des Punktes (x_1, x_2, x_3) der Werth t der zugehörigen einander gleichen Projectionen positiv sei. Nun wird der Inhalt des Tetraeders, dessen Ecken die Punkte

$$(\circ, \circ, \circ), (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3),$$

$$\left(\sqrt{\frac{\lambda_{23}t}{\lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{12}^2}}, \sqrt{\frac{\lambda_{31}t}{\lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{12}^2}}, \sqrt{\frac{\lambda_{12}t}{\lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{12}^2}} \right)$$

sind, durch ein Sechstel des absoluten Werthes des Productes der Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \lambda_{23} & \lambda_{31} & \lambda_{12} \end{vmatrix}$$

in den positiven Factor $\frac{t}{\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_1^2 + \lambda_3^2}}$ dargestellt, und ist daher nach (5) gleich einem Sechstel des absoluten Werthes des Products aus dem Ausdruck

$$\lambda_0((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2)$$

in den positiven Factor

$$\frac{1}{2} \frac{t}{\sqrt{\lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{12}^2}}.$$

Das Vorzeichen von λ_0 giebt die Entscheidung darüber, ob die drei von dem Nullpunkt verschiedenen Ecken des Tetraeders in ihrer obigen Reihenfolge mit den positiven Halbaxen x_1, x_2, x_3 übereinstimmen oder nicht.

Andrerseits ist der Inhalt des bezeichneten Tetraeders gleich einem Drittel des Products aus dem Flächeninhalt des Dreiecks, dessen Ecken $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)$, und der gemeinsame Endpunkt der projectirten Strecken sind, und der Höhe des Tetraeders t . Mithin wird der Inhalt des bezeichneten Dreiecks durch den absoluten Werth des Ausdrucks

$$\frac{\lambda_0((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2)}{4\sqrt{\lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{12}^2}}$$

gemessen. Weil aber der Inhalt dieses Dreiecks gleich der Hälfte des Products ist, das aus der Verbindungslinie zwischen den Ecken (x_1, x_2, x_3) und (y_1, y_2, y_3) und der zugehörigen Höhe erhalten wird, so ist die bezügliche Höhe gleich dem absoluten Werth des Ausdrucks

$$\lambda_0 \frac{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}}{2\sqrt{\lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{12}^2}},$$

und deshalb hat die Cotangente der Hälfte des zu bestimmenden Drehungswinkels ω die Bestimmung

$$(10) \quad \cotg \frac{\omega}{2} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{12}^2}}.$$

Aus (5) entstehen beziehungsweise die Gleichungen (6), (7), (8) dadurch, dass, während x_1, x_2, x_3 ungeändert bleiben, mit den übrigen auftretenden Bestandtheilen die folgenden Vertauschungen vorgenommen werden

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1, \quad y_2, \quad y_3, \lambda_0, \quad \lambda_{23}, \quad \lambda_{31}, \quad \lambda_{12} \\ \text{in } y_1, y_2, y_3, \lambda_{23}, -\lambda_0, -\lambda_{21}, -\lambda_{31}, \end{array} \right.$$

oder

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1, y_2, y_3, \lambda_0, \lambda_{23}, \lambda_{31}, \lambda_{12} \\ \text{in } -y_1, y_2, -y_3, \lambda_{31}, -\lambda_{12}, -\lambda_0, -\lambda_{23}, \end{array} \right.$$

oder

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1, y_2, y_3, \lambda_0, \lambda_{23}, \lambda_{31}, \lambda_{12} \\ \text{in } -y_1, -y_2, y_3, \lambda_{12}, -\lambda_{13}, -\lambda_{23}, -\lambda_0. \end{array} \right.$$

Es finden daher genau die entsprechenden Schlüsse Anwendung, und die bezüglichen Drehungswinkel $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sind folgendermassen definiert

$$(14) \quad \cotg \frac{\omega_1}{2} = \frac{\lambda_{23}}{\sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_{21}^2 + \lambda_{31}^2}},$$

$$(15) \quad \cotg \frac{\omega_2}{2} = \frac{\lambda_{11}}{\sqrt{\lambda_{12}^2 + \lambda_0^2 + \lambda_{32}^2}},$$

$$(16) \quad \cotg \frac{\omega_3}{2} = \frac{\lambda_{12}}{\sqrt{\lambda_{13}^2 + \lambda_{23}^2 + \lambda_0^2}}.$$

Für den Fall, dass eine oder die andere der Grössen $\lambda_{23}, \lambda_{31}, \lambda_{12}$ verschwindet, wird offenbar der Inhalt des zugehörigen zu betrachtenden Tetraeders gleich Null, und der entsprechende Drehungswinkel gleich zwei Rechten.

Nachdem die vier Drehungsaxen und die zugehörigen Drehungswinkel für alle Fälle bestimmt sind, werde ich von jetzt ab die Voraussetzung eintreten lassen, dass keiner der vier Drehungswinkel gleich zwei Rechten, oder keine der entsprechenden vier Grössen $\lambda_0, \lambda_{23}, \lambda_{31}, \lambda_{12}$ gleich Null sei. Es möge dann auf der zuerst bestimmten Drehungsaxe von dem Nullpunkt O aus eine Strecke abgeschnitten werden, die, wenn q eine beliebige reelle Grösse bedeutet, durch den absoluten Werth des Ausdrucks

$$\frac{\sqrt{\lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{12}^2}}{\lambda_0} q$$

dargestellt wird, so dass der Endpunkt E_0 die Coordinaten

$$(17) \quad \frac{\lambda_{23}}{\lambda_0} q, \frac{\lambda_{31}}{\lambda_0} q, \frac{\lambda_{12}}{\lambda_0} q$$

erhält. Ebenso werde mit den übrigen Drehungsaxen verfahren, wobei die Endpunkte der abzuschneidenden Strecken respective die folgenden Coordinaten bekommen

$$(18) \quad -\frac{\lambda_0}{\lambda_{23}}q, \quad -\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{23}}q, \quad -\frac{\lambda_{31}}{\lambda_{23}}q,$$

$$(19) \quad -\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}}q, \quad -\frac{\lambda_0}{\lambda_{31}}q, \quad -\frac{\lambda_{32}}{\lambda_{31}}q,$$

$$(20) \quad -\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{12}}q, \quad -\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{12}}q, \quad -\frac{\lambda_0}{\lambda_{12}}q.$$

Dann sind die Gleichungen der vier Ebenen, welche respective durch die Punkte E_1, E_2, E_3 oder E_2, E_3, E_0 , oder E_3, E_1, E_0 oder E_1, E_2, E_0 hindurchgehen, für einen beweglichen Punkt x_1, x_2, x_3 die folgenden

$$(21) \quad \lambda_{23}x_1 + \lambda_{31}x_2 + \lambda_{12}x_3 = -\lambda_0q,$$

$$(22) \quad \lambda_0x_1 + \lambda_{21}x_2 + \lambda_{31}x_3 = \lambda_{23}q,$$

$$(23) \quad \lambda_{12}x_1 + \lambda_0x_2 + \lambda_{32}x_3 = \lambda_{31}q,$$

$$(24) \quad \lambda_{13}x_1 + \lambda_{23}x_2 + \lambda_0x_3 = \lambda_{12}q.$$

Nun leuchtet ein, dass die von O nach E_0, E_1, E_2, E_3 gezogenen Linien, in der entsprechenden Reihenfolge genommen, auf den vier Ebenen, deren Gleichungen aufgestellt sind, senkrecht stehen. Für das mit den Ecken E_0, E_1, E_2, E_3 gebildete Tetraeder ist also E_0O, E_1O, E_2O, E_3O beziehungsweise immer ein Theil der von E_0, E_1, E_2, E_3 auf die gegenüber liegende Seitenfläche herabgelassene Höhe, und es schneiden sich die betreffenden vier Höhen in dem Punkte O . Nach einer Bemerkung, die KRONECKER in einer, die algebraische Theorie der quadratischen Formen betreffenden Mittheilung, Monatsbericht der Berliner Akademie vom 24 Juli 1872, S. 499, gemacht hat, ist aber ein Tetraeder, dessen Höhen in demselben Punkte zusammentreffen, gleichzeitig ein Tetraeder, das bei gegebener Grösse der Seitenflächen den grössten Inhalt hat, oder ein Maximumtetraeder, und umgekehrt. Daher ist das mit den Ecken E_0, E_1, E_2, E_3 gebildete Tetraeder in der That ein Maximumtetraeder.

Sucht man jetzt die Coordinaten der Punkte F_0, F_1, F_2, F_3 auf, in welchen die von E_0, E_1, E_2, E_3 auf die entsprechenden gegenüber ste-

henden Seitenflächen herabgelassenen Lothe diese treffen, so finden sich die Werthe

$$(25) \quad -\frac{\lambda_{23}\lambda_0}{\lambda_{21}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{12}^2} q, \quad -\frac{\lambda_{31}\lambda_0}{\lambda_{21}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{12}^2} q, \quad -\frac{\lambda_{12}\lambda_0}{\lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{12}^2} q,$$

$$(26) \quad \frac{\lambda_0\lambda_{23}}{\lambda_0^2 + \lambda_{21}^2 + \lambda_{31}^2} q, \quad \frac{\lambda_{21}\lambda_{23}}{\lambda_0^2 + \lambda_{21}^2 + \lambda_{31}^2} q, \quad \frac{\lambda_{31}\lambda_{23}}{\lambda_0^2 + \lambda_{21}^2 + \lambda_{31}^2} q,$$

$$(27) \quad \frac{\lambda_{12}\lambda_{31}}{\lambda_{12}^2 + \lambda_0^2 + \lambda_{32}^2} q, \quad \frac{\lambda_0\lambda_{31}}{\lambda_{12}^2 + \lambda_0^2 + \lambda_{32}^2} q, \quad \frac{\lambda_{32}\lambda_{31}}{\lambda_{12}^2 + \lambda_0^2 + \lambda_{32}^2} q,$$

$$(28) \quad \frac{\lambda_{13}\lambda_{12}}{\lambda_{13}^2 + \lambda_{23}^2 + \lambda_0^2} q, \quad \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{13}^2 + \lambda_{23}^2 + \lambda_0^2} q, \quad \frac{\lambda_0\lambda_{12}}{\lambda_{13}^2 + \lambda_{23}^2 + \lambda_0^2} q.$$

Aus denselben geht hervor, dass die Fusspunkte F_0, F_1, F_2, F_3 stets auf der entgegengesetzten Seite von O liegen als die correspondirenden Punkte E_0, E_1, E_2, E_3 , dass sich also der gemeinsame Durchschnittspunkt der Höhen innerhalb des Tetraeders befindet. Ferner ergibt sich, dass für die erste Drehungsaxe die Strecken E_0O oder F_0O erhalten werden, indem man respective die Tangente oder Cotangente des zugehörigen halben Drehungswinkels mit dem Werth der beliebig angenommenen Grösse q multiplicirt, und dass für jede der übrigen Drehungsaxen das gleiche gilt. Das Maximumstetraeder E_0, E_1, E_2, E_3 enthält also als die einzigen Bestimmungsstücke seiner Gestalt und Lage die vier Drehungsaxen und die zugehörigen Drehungswinkel. Der Werth q liefert bei der Construction des Maximumstetraeders den anzuwendenden Massstab der Grösse.

3.

In der angeführten Schrift, *Untersuchungen über die Summen von Quadraten*, II, zweite Abtheilung, Art. 11, S. 112, ist nachgewiesen, dass bei einem Maximumstetraeder, für welches der gemeinsame Durchschnittspunkt der Höhen innerhalb desselben liegt, und das dort ein Tetraeder der ersten Art genannt worden ist, die Quadrate der Längen der sechs Kanten stets durch vier positive Grössen v, v_1, v_2, v_3 ausgedrückt werden können, indem man die Aggregate der sechs vorhandenen Paare bildet,

$$(1) \quad v + v_1, v + v_2, v + v_3, v_2 + v_3, v_3 + v_1, v_1 + v_2.$$

Aus den Coordinaten der Eckpunkte E_0, E_1, E_2, E_3 in (17), (18), (19), (20) des vorigen Art. folgen dagegen für die Quadrate der Längen der sechs Kanten, sobald von (10) des Art. 1 Gebrauch gemacht wird, die Darstellungen

$$(2) \quad \begin{cases} N(A)q^2\left(\frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\lambda_{23}^2}\right), & N(A)q^2\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_{31}^2}\right), & N(A)q^2\left(\frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_{12}^2}\right), \\ N(A)q^2\left(\frac{1}{\lambda_{31}^2} + \frac{1}{\lambda_{12}^2}\right), & N(A)q^2\left(\frac{1}{\lambda_{12}^2} + \frac{1}{\lambda_{23}^2}\right), & N(A)q^2\left(\frac{1}{\lambda_{23}^2} + \frac{1}{\lambda_{31}^2}\right). \end{cases}$$

Es dienen also zu der Bestimmung von $\lambda_0^2, \lambda_{23}^2, \lambda_{31}^2, \lambda_{12}^2$ die vier Gleichungen

$$(3) \quad \begin{cases} N(A)q^2\frac{1}{\lambda_0^2} = r, & N(A)q^2\frac{1}{\lambda_{23}^2} = r_1, \\ N(A)q^2\frac{1}{\lambda_{31}^2} = r_2, & N(A)q^2\frac{1}{\lambda_{12}^2} = r_3. \end{cases}$$

Aus denselben folgt sogleich das System

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{q^2} &= \frac{1}{v} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}, \\ \frac{\lambda_0^2}{N(A)} &= \frac{1}{\frac{1}{v} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}}, \\ \frac{\lambda_{23}^2}{N(A)} &= \frac{1}{\frac{1}{v} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}}, \\ \frac{\lambda_{31}^2}{N(A)} &= \frac{1}{\frac{1}{v} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}}, \\ \frac{\lambda_{12}^2}{N(A)} &= \frac{1}{\frac{1}{v} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}}. \end{aligned} \right.$$

Durch diese Gleichungen sind q und die Verhältnisse der vier Grössen $\lambda_0^2, \lambda_{23}^2, \lambda_{31}^2, \lambda_{12}^2$ eindeutig bestimmt, und zwar ist die Determination mit derjenigen im Einklange, welche l. c. Art. 12, S. 122 angegeben ist.

Nachdem nun für jedes Maximumstetraeder, für welches der gemeinsame Durchschnittspunkt der Höhen innerhalb des Tetraeders liegt, das zugehörige System von reellen Grössen $\lambda_0^2, \lambda_{23}^2, \lambda_{31}^2, \lambda_{12}^2$ ermittelt ist, von denen keine verschwindet, werde ich die beiden Systeme von drei gegen einander rechtwinkligen Geraden aufsuchen, von denen das eine auf das andere durch Drehung um eine von vier Axen zurückgeführt werden kann, die respective mit den vier Höhen des Tetraeders zusammenfallen. Ein zu diesem Zweck geeignetes Hilfsmittel besteht darin, die Punkte zu bestimmen, in denen die Kanten des Tetraeders von den Coordinatenebenen des ersten Systems x_1, x_2, x_3 oder des zweiten Systems y_1, y_2, y_3 getroffen werden. Die Coordinaten der Ecken E_0, E_1, E_2, E_3 in (17), (18), (19), (20) und die Gleichungen der Seitenflächen des Tetraeders in (21), (22), (23), (24) des vorigen Art. beziehen sich auf das erste System. Wenn der indefinite Punkt (x_1, x_2, x_3) des ersten Systems in dem zweiten die Coordinaten y_1, y_2, y_3 hat, so folgen vermittelt (11) des Art. 1 aus den zuletzt genannten Gleichungen die folgenden Gleichungen der vier Seitenflächen

$$(5) \quad \lambda_{23} y_1 + \lambda_{31} y_2 + \lambda_{12} y_3 = -\lambda_0 q,$$

$$(6) \quad \lambda_0 y_1 + \lambda_{12} y_2 + \lambda_{13} y_3 = \lambda_{23} q,$$

$$(7) \quad \lambda_{21} y_1 + \lambda_0 y_2 + \lambda_{23} y_3 = \lambda_{31} q,$$

$$(8) \quad \lambda_{31} y_1 + \lambda_{32} y_2 + \lambda_0 y_3 = \lambda_{12} q.$$

Daher haben die Ecken E_0, E_1, E_2, E_3 in dem zweiten System beziehungsweise die Coordinaten

$$(9) \quad \frac{\lambda_{23}}{\lambda_0} q, \quad \frac{\lambda_{11}}{\lambda_0} q, \quad \frac{\lambda_{12}}{\lambda_0} q,$$

$$(10) \quad -\frac{\lambda_0}{\lambda_{23}} q, \quad -\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} q, \quad -\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{23}} q,$$

$$(11) \quad -\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{31}} q, \quad -\frac{\lambda_0}{\lambda_{31}} q, \quad -\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{31}} q,$$

$$(12) \quad -\frac{\lambda_{11}}{\lambda_{13}} q, \quad -\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{13}} q, \quad -\frac{\lambda_0}{\lambda_{13}} q.$$

Es wird nun die Kante E_0E_1 in dem einen oder anderen der beiden Coordinatensysteme durch die folgenden Systeme von Gleichungen dargestellt

$$(13) \quad \begin{cases} x_1 - \frac{\lambda_{23}}{\lambda_0} q = \left(-\frac{\lambda_0}{\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{23}}{\lambda_0} \right) q t_{01}, \\ x_2 - \frac{\lambda_{31}}{\lambda_0} q = \left(-\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{31}}{\lambda_0} \right) q t_{01}, \\ x_3 - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_0} q = \left(-\frac{\lambda_{11}}{\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_0} \right) q t_{01}, \end{cases}$$

oder

$$(14) \quad \begin{cases} y_1 - \frac{\lambda_{23}}{\lambda_0} q = \left(-\frac{\lambda_0}{\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{23}}{\lambda_0} \right) q u_{01}, \\ y_2 - \frac{\lambda_{31}}{\lambda_0} q = \left(-\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{31}}{\lambda_0} \right) q u_{01}, \\ y_3 - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_0} q = \left(-\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_0} \right) q u_{01}. \end{cases}$$

Der Durchschnittspunkt der Kante E_0E_1 mit der Ebene $x_1 = 0$ liefert daher den Werth

$$t_{01} = \frac{\lambda_{23}^2}{\lambda_0^2 + \lambda_{23}^2},$$

mithin

$$1 - t_{01} = \frac{\lambda_{23}^2}{\lambda_0^2}.$$

In derselben Weise giebt der Durchschnittspunkt der Kante E_0E_1 mit der Ebene $y_1 = 0$ die Bestimmung

$$u_{01} = \frac{\lambda_{23}^2}{\lambda_0^2 + \lambda_{23}^2}.$$

folglich

$$\frac{u_{01}}{1 - u_{01}} = \frac{\lambda_{23}^2}{\lambda_0^2}.$$

Nachdem die Durchschnittspunkte der Kante E_0E_1 mit den übrigen Coordinatenebenen ermittelt sind, ergibt sich die Zusammenstellung

(15)

Kante $E_0 E_1$	$\frac{t_{01}}{1 - t_{01}}$	$\frac{u_{01}}{1 - u_{01}}$
$x_1 = 0$	$\frac{\lambda_{23}^2}{\lambda_0^2}$	
$x_2 = 0$	$-\frac{\lambda_{31} \lambda_{21}}{\lambda_0 \lambda_{12}}$	
$x_3 = 0$	$\frac{\lambda_{12} \lambda_{23}}{\lambda_0 \lambda_{31}}$	
$y_1 = 0$		$\frac{\lambda_{23}^2}{\lambda_0^2}$
$y_2 = 0$		$\frac{\lambda_{31} \lambda_{23}}{\lambda_0 \lambda_{12}}$
$y_3 = 0$		$-\frac{\lambda_{12} \lambda_{23}}{\lambda_0 \lambda_{31}}$

Verfährt man ebenso mit den übrigen Kanten, und wendet die entsprechenden Bezeichnungen an, so erhält man die folgenden Schemata

(16)

Kante $E_0 E_2$	$\frac{t_{02}}{1 - t_{02}}$	$\frac{u_{02}}{1 - u_{02}}$
$x_1 = 0$	$\frac{\lambda_{23} \lambda_{31}}{\lambda_0 \lambda_{12}}$	
$x_2 = 0$	$\frac{\lambda_{31}^2}{\lambda_0^2}$	
$x_3 = 0$	$-\frac{\lambda_{12} \lambda_{31}}{\lambda_0 \lambda_{23}}$	
$y_1 = 0$		$-\frac{\lambda_{23} \lambda_{31}}{\lambda_0 \lambda_{12}}$
$y_2 = 0$		$\frac{\lambda_{31}^2}{\lambda_0^2}$
$y_3 = 0$		$\frac{\lambda_{12} \lambda_{31}}{\lambda_0 \lambda_{23}}$

(17)

Kante $E_0 E_3$	$\frac{t_{03}}{1 - t_{03}}$	$\frac{u_{03}}{1 - u_{03}}$
$x_1 = 0$	$-\frac{\lambda_{23} \lambda_{10}}{\lambda_0 \lambda_{31}}$	
$x_2 = 0$	$\frac{\lambda_{31} \lambda_{12}}{\lambda_0 \lambda_{23}}$	
$x_3 = 0$	$\frac{\lambda_{12}^2}{\lambda_0^2}$	
$y_1 = 0$		$\frac{\lambda_{23} \lambda_{12}}{\lambda_0 \lambda_{31}}$
$y_2 = 0$		$-\frac{\lambda_{31} \lambda_{12}}{\lambda_0 \lambda_{23}}$
$y_3 = 0$		$\frac{\lambda_{12}^2}{\lambda_0^2}$

(18)

Kante $E_2 E_3$	$\frac{t_{23}}{1 - t_{23}}$	$\frac{u_{23}}{1 - u_{23}}$
$x_1 = 0$	$\frac{\lambda_{12}^2}{\lambda_{31}^2}$	
$x_2 = 0$	$-\frac{\lambda_0 \lambda_{12}}{\lambda_{31} \lambda_{23}}$	
$x_3 = 0$	$\frac{\lambda_{23} \lambda_{12}}{\lambda_{31} \lambda_0}$	
$y_1 = 0$		$\frac{\lambda_{12}^2}{\lambda_{31}^2}$
$y_2 = 0$		$\frac{\lambda_0 \lambda_{12}}{\lambda_{31} \lambda_{23}}$
$y_3 = 0$		$-\frac{\lambda_{23} \lambda_{12}}{\lambda_{31} \lambda_0}$

$$(19) \quad \begin{array}{c|c|c} \text{Kante } E_3 E_1 & \frac{t_{31}}{1 - t_{31}} & \frac{u_{31}}{1 - u_{31}} \\ \hline x_1 = 0 & \frac{\lambda_{31} \lambda_{23}}{\lambda_{12} \lambda_0} & \\ x_2 = 0 & \frac{\lambda_{23}^2}{\lambda_{12}^2} & \\ x_3 = 0 & -\frac{\lambda_0 \lambda_{23}}{\lambda_{12} \lambda_{31}} & \\ \hline y_1 = 0 & & -\frac{\lambda_{31} \lambda_{23}}{\lambda_{12} \lambda_0} \\ y_2 = 0 & & \frac{\lambda_{23}^2}{\lambda_{12}^2} \\ y_3 = 0 & & \frac{\lambda_0 \lambda_{23}}{\lambda_{12} \lambda_{31}} \end{array}$$

$$(20) \quad \begin{array}{c|c|c} \text{Kante } E_1 E_2 & \frac{t_{12}}{1 - t_{12}} & \frac{u_{12}}{1 - u_{12}} \\ \hline x_1 = 0 & -\frac{\lambda_0 \lambda_{31}}{\lambda_{23} \lambda_{12}} & \\ x_2 = 0 & \frac{\lambda_{12} \lambda_{31}}{\lambda_{23} \lambda_0} & \\ x_3 = 0 & \frac{\lambda_{31}^2}{\lambda_{23}^2} & \\ \hline y_1 = 0 & & \frac{\lambda_0 \lambda_{11}}{\lambda_{23} \lambda_{12}} \\ y_2 = 0 & & -\frac{\lambda_{12} \lambda_{31}}{\lambda_{23} \lambda_0} \\ y_3 = 0 & & \frac{\lambda_{31}^2}{\lambda_{23}^2} \end{array}$$

Nach den Gleichungen (13) ist der Ausdruck $\frac{t_{01}}{1 - t_{01}}$ für einen beliebigen Punkt P der durch E_0 und E_1 laufenden geraden Linie gleich

dem Quotienten der Strecken $\frac{E_a P}{E_1 P}$, und zwar positiv oder negativ genommen, je nachdem P zwischen den Punkten E_0 und E_1 oder ausserhalb der bezüglichen Strecke liegt. Für den Ausdruck $\frac{u_{a1}}{1 - u_{a1}}$ gilt in Folge von (14) die gleiche Definition, für die Ausdrücke $\frac{t_{ab}}{1 - t_{ab}}$ oder $\frac{u_{ab}}{1 - u_{ab}}$, die aus den angegebenen durch Einsetzung anderer Paare von Zahlen entstehen, die entsprechende. Sobald deshalb $\frac{t_{ab}}{1 - t_{ab}}$ und $\frac{u_{ab}}{1 - u_{ab}}$ denselben Werth annehmen, so fallen die zugehörigen Punkte zusammen. Aus diesem Grunde werden die Kanten $E_0 E_1$ und $E_2 E_3$ von den Ebenen $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, die Kanten $E_0 E_2$ und $E_3 E_1$ von den Ebenen $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, die Kanten $E_0 E_3$ und $E_1 E_2$ von den Ebenen $x_3 = 0$, $y_3 = 0$ in denselben Punkten getroffen.

Es ist leicht zu erkennen, dass die definirten Durchschnittspunkte mit denjenigen Punkten übereinstimmen, in welchen für jede Seitenfläche des Tetraeders eine Dreiecksseite durch das von der gegenüber liegenden Ecke herabgelassene Loth getheilt wird. Daraus folgt dann weiter, dass der den Ebenen $x_1 = 0$ und $y_1 = 0$ gemeinsame, durch den Punkt O gehende Strahl auf den beiden Kanten $E_0 E_1$ und $E_2 E_3$ senkrecht steht, und dass für die beiden übrigen Paare sich nicht schneidender Kanten die gleiche Beziehung besteht.

Die übrigen 24 Werthe der Ausdrücke $\frac{t_{ab}}{1 - t_{ab}}$ und $\frac{u_{ab}}{1 - u_{ab}}$, welche in den sechs Zusammenstellungen (15), (16), (17), (18), (19), (20) vorkommen, werden erhalten, indem man die Elemente λ_0 , λ_{23} , λ_{31} , λ_{12} auf alle möglichen Arten in je zwei Paare abtheilt, immer das Product des einen Paares durch das Product des zugeordneten dividirt und jeden Quotienten mit der positiven oder negativen Einheit multiplicirt. In der obigen Darstellung haben offenbar die Werthe aller Quotienten, denen kein Zeichen vorgesetzt ist, dasselbe Vorzeichen, alle diejenigen, die mit dem Minuszeichen versehen sind, das entgegengesetzte Vorzeichen. Zwei Punkte der unbegrenzt verlängerten Kante $E_a E_b$, für welche $\frac{t_{ab}}{1 - t_{ab}}$ und $\frac{u_{ab}}{1 - u_{ab}}$ gleiche und entgegengesetzte Werthe annehmen, bilden mit dem festen Paar E_a, E_b vier harmonische Punkte. Deshalb zeigt die bezügliche Zusammenstellung

dass auf jeder unbegrenzt verlängerten Kante zwei Paare von Punkten auftreten, die mit den beiden Ecken vier harmonische Punkte liefern, so dass die zusammengehörigen drei Paare eine Involution bilden. Aus den 24 gegebenen Werthen von $\frac{t_{ab}}{1-t_{ab}}$ und $\frac{u_{ab}}{1-u_{ab}}$ werden die zugehörigen Punkte durch eine elementare geometrische Construction gefunden.

Hebt man alle diejenigen Punkte heraus, für welche die Ausdrücke $\frac{t_{ab}}{1-t_{ab}}$ und $\frac{u_{ab}}{1-u_{ab}}$ positiv sind, so liegen dieselben immer zwischen den betreffenden Ecken E_a und E_b . Indem die Punkte, welche derselben Coordinatenebene angehören, durch einen in dieser Ebene in sich zurückkehrenden Zug von geraden in den Seitenflächen des Tetraeders liegenden Linien verbunden werden, erhält man für alle sechs Coordinatenebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ die geradlinigen Begrenzungen derjenigen Theile, welche innerhalb des Maximumtetraeders eingeschlossen sind; durch diese Spuren sind die Coordinatenebenen selbst geometrisch bestimmt.

Die im Vorhergehenden abgeleiteten Resultate erlauben eine unmittelbare Anwendung auf die Bewegung eines beliebigen Systems von starr mit einander verbundenen Massenpunkten. Sobald der Schwerpunkt des Massensystems und das rechtwinklige System der zugehörigen Hauptträgheitsaxen bestimmt ist, kann bei jeder Bewegung des Systems die Drehung der Hauptträgheitsaxen um den Schwerpunkt verfolgt werden. Wenn man jetzt die im Laufe der Zeit geschehende Lagenänderung der um den Schwerpunkt rotirenden Hauptträgheitsaxen in Bezug auf irgend ein in dem Raume festes System von rechtwinkligen Axen als bekannt annimmt, so lassen sich nach der vorhin entwickelten Methode für jeden Zeitmoment die entsprechenden vier Drehungsaxen und zugehörigen Drehungswinkel ableiten. Aus diesen Daten ergibt sich, nachdem der anzuwendende Massstab der Grösse gewählt worden ist, ein der Gestalt, Grösse und Lage nach vollständig bestimmtes Maximumtetraeder. Dasselbe bildet für die beobachtete drehende Bewegung einen beständigen Begleiter.

Das Maximumtetraeder enthält aber die Merkzeichen sowohl des in dem Raume festen zur Ortsbestimmung eingeführten wie auch des beweglichen Systems der Hauptaxen. Sowohl diese Spuren als die zu den vier Drehungsaxen gehörenden Drehungswinkel lassen sich vermittelst des aus-

dinaten desselben Punktes in einem zweiten beweglichen orthogonalen System aufgefasst werden. Wenn alle Coordinaten auf das erste System bezogen werden, so geht bei der Bewegung des zweitens Systems in die Lage des ersten der Punkt $(x_1, x_2, \dots x_n)$ in den Punkt $(y_1, y_2, \dots y_n)$ über. Ferner stellt dann der Ausdruck (3) den in die feste Grösse $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ multiplicirten Cosinus des Winkels zweier Strahlen dar, die von dem gemeinsamen Nullpunkt nach den Punkten $(x_1, x_2, \dots x_n)$ und $(y_1, y_2, \dots y_n)$ gezogen werden. Die erwähnte Aufgabe de maximis et minimis bezieht sich jetzt nach dem von SCHLÄRFLE angewendeten Sprachgebrauch auf die Ermittlung des Maximums oder Minimums der angularen Verschiebung.

Um bei dem Problem de maximis et minimis die Grössen x_1, x_2, \dots, x_n als die unabhängigen Variabeln zu haben, werde das System (1) nach den Variabeln y_1, y_2, \dots, y_n aufgelöst, wodurch das System entsteht

$$(4) \quad \begin{cases} y_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ y_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_s = \alpha_{s1}x_1 + \alpha_{s2}x_2 + \dots + \alpha_{sn}x_n. \end{cases}$$

Bildet man nun mit Zuziehung eines unbestimmten Factors σ den Ausdruck

$$(5) \quad x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sigma(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2),$$

und setzt die n partiellen Derivierten desselben nach x_1, x_2, \dots, x_n gleich Null, so ergibt sich das zu dem Problem gehörende System von Gleichungen

[illegible]

Auf Grund desselben gilt die Bedingung, dass die Determinante der n homogenen Functionen verschwinden muss; mithin kommt für σ die Gleichung des n^{ten} Grades

$$(7) \quad \begin{vmatrix} 2\alpha_{11} - 2\sigma & \alpha_{12} + \alpha_{21} & \dots & \alpha_{1n} + \alpha_{n1} \\ \alpha_{21} + \alpha_{12} & 2\alpha_{22} - 2\sigma & \dots & \alpha_{2n} + \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} + \alpha_{1n} & \alpha_{n2} + \alpha_{2n} & \dots & 2\alpha_{nn} - 2\sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Gleichzeitig folgt aus (6), indem man die Gleichungen der Reihe nach mit x_1, x_2, \dots, x_n multiplicirt und addirt, die Relation

$$(8) \quad \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sigma.$$

Es wird also der Werth des Cosinus, der zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll, durch σ dargestellt, und die Gleichung $\sigma = 1$ bedeutet, dass die von dem Nullpunkt nach den Punkten (x_1, x_2, \dots, x_n) und (y_1, y_2, \dots, y_n) gezogenen Strahlen zusammenfallen. Es muss nun unterschieden werden, ob die Anzahl n der Dimensionen der Mannigfaltigkeit ungerade oder gerade ist.

Zuerst werde n ungerade vorausgesetzt. Dann zeigt SCHLÄFLI, dass die Gleichung (7) stets durch den Werth $\sigma = 1$ so erfüllt wird, dass dabei nicht alle adjungirten Elemente verschwinden. Es sind dann durch (6) die Verhältnisse der Grössen x_1, x_2, \dots, x_n vollständig bestimmt, und der von dem Nullpunkte nach (x_1, x_2, \dots, x_n) gezogene Strahl wird die aufzuziehende Drehungsaxe.

Man gelangt zu einem übereinstimmenden Resultat, wenn man die vorhin in Art. 1. zur Definition der Drehungsaxe benutzte Forderung auf die vorliegende Mannigfaltigkeit von n Dimensionen ausdehnt.

Es handelt sich hier um die Aufgabe, einen Punkt $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ so zu bestimmen, dass der von dem Nullpunkte nach demselben gezogene Strahl mit dem nach einem beliebigen Punkte (x_1, x_2, \dots, x_n) gezogenen Strahle und mit dem nach dem zugehörigen Punkte (y_1, y_2, \dots, y_n) gezogenen Strahle Winkel von gleichen Cosinus bildet, oder dass die Gleichung

$$(9) \quad \rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \dots + \rho_n x_n = \rho_1 y_1 + \rho_2 y_2 + \dots + \rho_n y_n$$

erfüllt ist. Aus derselben ergibt sich das System von Gleichungen

[illegible]

wo die Zeichen $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \dots, \varepsilon_e$ durch $+1$, die Zeichen ε_f durch -1 zu ersetzen sind. Die Anzahl von Verbindungen, die in der angegebenen Weise aus den Zeigern $1, 2, 3, \dots, n$ erhalten werden können, beträgt

$$1 + \frac{n(n-1)}{1,2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1,2,3,4} + \dots$$

oder 2^{n-1} . Die Gruppe der definierten Drehungsachsen besteht also aus 2^{n-1} Individuen. Sobald festgestellt ist, dass die Determinante des Systems (16) verschwindet, ohne dass die sämtlichen adjungirten Elemente verschwinden, sind die Verhältnisse der zu suchenden Grössen

$$\rho_1^{a,b,\dots,e}, \rho_2^{a,b,\dots,e}, \dots, \rho_n^{a,b,\dots,e}$$

bestimmt und können in der folgenden Weise gefunden werden.

Es ist l. c. II, Art. 1, S. 67 angegeben, wie aus den vorhin definierten Grössen λ_0 und λ_{ab} , nachdem 2ν beliebige Zahlen a, b, \dots, f aus der Reihe von 1 bis n ausgewählt sind, eine Grösse $\lambda_{a,b,\dots,f}$ abgeleitet wird, die gleich einem Bruche mit dem Nenner λ_0^{-1} ist, dessen Zähler erhalten wird, indem man mit den Zahlen a, b, \dots, f alle Permutationen der ersten Classe vornimmt, hierauf diese Zahlen in der gegebenen Reihenfolge, zu zweien gepaart, an den Buchstaben λ als Zeiger vertheilt, von den Producten, die unter einander gleich sind, nur ein einziges wählt und von allen verschiedenen die Summe nimmt. Alsdann lässt sich das obige System (1) zunächst durch das System von n Gleichungen ersetzen, das l. c. S. 65 aufgestellt ist

$$(17) \quad \begin{cases} \lambda_{0_1} x_1 + \lambda_{21} x_2 + \dots + \lambda_{n1} x_n = \lambda_0 y_1 + \lambda_{12} y_2 + \dots + \lambda_{1n} y_n \\ \lambda_{22} x_1 + \lambda_0 x_2 + \dots + \lambda_{n2} x_n = \lambda_{21} y_1 + \lambda_0 y_2 + \dots + \lambda_{2n} y_n \\ \vdots \\ \lambda_{1n} x_1 + \lambda_{2n} x_2 + \dots + \lambda_0 x_n = \lambda_{n1} y_1 + \lambda_{n2} y_2 + \dots + \lambda_0 y_n \end{cases}$$

und aus diesem wird mit Einrechnung von ihm selbst ein System von 2^{n-1} Gleichungen erhalten, das nach Art. 2, S. 69 die folgende Gestalt hat

$$\begin{aligned} (18) \quad & \lambda_{bc\dots e}x_a + \lambda_{c\dots ea}x_b + \dots + \lambda_{ab\dots d}x_e + \sum_f \lambda_{fab\dots e}x_f \\ &= \lambda_{bc\dots ey}y_a + \lambda_{c\dots eay}y_b + \dots + \lambda_{ab\dots dy}y_e - \sum_f \lambda_{fab\dots e}y_f; \end{aligned}$$

hier haben $a, b, \dots e, f$ die vorhin angegebene Bedeutung; bei dem Fortfallen aller Zeiger tritt die Null an ihre Stelle. Eine Vergleichung von (18) und (15) zeigt, dass die beiden Relationen in genau derselben Weise gebildet sind. Ebenso wie (16) aus (15) abgeleitet ist, folgt aus (18) ein System, das aus (16) hervorgeht, indem respective statt

$$(19) \quad \rho_a^{a,b,\dots,e}, \dots, \rho_e^{a,b,\dots,e}, \rho_f^{a,b,\dots,e}$$

die Grössen

$$(20) \quad \lambda_{b,c,\dots,e}, \dots, \lambda_{a,b,\dots,d}, \lambda_{f,a,b,\dots,e}$$

substituiert werden. Weil nun die Verhältnisse der Grössen (19) unter der angegebenen Voraussetzung eindeutig bestimmt sind, und weil die Grössen (20) denselben Gleichungen genügen, so werden die Verhältnisse der gesuchten Grössen (19) durch die Verhältnisse der Grössen (20) beziehungsweise dargestellt, und sind auf diese Weise als rationale Verbindungen der Grössen λ_0, λ_{ab} ausgedrückt. Zur Untersuchung der Determinante des Systems (16) eignet sich ein Satz, der l. c. Art. 8, S. 94 mitgeteilt ist, und folgendermassen ausgesprochen werden kann.

Wenn in der obigen Determinante (13) die in der Diagonale stehenden additiven Einheiten der Reihe nach durch n unbestimmte Grössen s_1, s_2, \dots, s_n ersetzt werden, so entsteht die Determinante

$$(21) \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} + s_1 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} + s_2 & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} + s_n \end{vmatrix} = D(s_1, s_2, \dots, s_n).$$

Ferner erhält man aus den Elementen λ_0, λ_{ab} die Determinante

$$(22) \quad \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_{21} & \dots & \lambda_{n1} \\ \lambda_{12} & \lambda_0 & \dots & \lambda_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{1n} & \lambda_{2n} & \dots & \lambda_{nn} \end{vmatrix} = \lambda_0^{n-2} N(1);$$

hier ist

$$(23) \quad N(A) = \lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 + \dots + \lambda_{1234}^2 + \dots$$

wo bei den Grössen λ zuerst alle Verbindungen der Zeiger von 1 bis n zu je zweien, dann zu je vierten, u. s. f. zu nehmen sind. Alsdann besteht der erwähnte Satz in der folgenden Darstellung der Determinante $D(s_1, s_2, \dots, s_n)$

$$(24) \quad N(A) D(s_1, s_2, \dots, s_n) = (s_1 + 1)(s_2 + 1) \dots (s_n + 1) \left(\lambda_0^2 + \frac{(s_1 - 1)(s_2 - 1)}{(s_1 + 1)(s_2 + 1)} \lambda_{12}^2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{(s_1 - 1)(s_2 - 1)(s_3 - 1)(s_4 - 1)}{(s_1 + 1)(s_2 + 1)(s_3 + 1)(s_4 + 1)} \lambda_{1234}^2 + \dots \right);$$

die auf der rechten Seite angedeuteten Aggregate werden in derselben Weise gebildet, wie für (23) angegeben ist.

Setzt man die sämtlichen Grössen s_1, s_2, \dots, s_n gleich einer einzigen s , so wird die linke Seite von (24) gleich dem Product des nothwendig von Null verschiedenen Aggregats $N(A)$ in die Determinante

$$(25) \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} + s & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} + s & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} + s \end{vmatrix};$$

gleichzeitig gehen die auf der rechten Seite von (24) vorhandenen Producte in Potenzen über. Da gegenwärtig n ungerade angenommen ist, so steigen die in den Nennern vorkommenden Potenzen von $(s + 1)$ bis zu der $(n - 1)^{\text{ten}}$ Potenz, und man kann der rechten Seite von (24) die folgende Gestalt geben

$$(26) \quad (s + 1) \left\{ (s + 1)^{n-1} \lambda_0^2 + (s + 1)^{n-3} (s - 1)^2 \lambda_{12}^2 + \dots \right. \\ \left. + (s + 1)^{n-5} (s - 1)^4 (\lambda_{1234}^2 + \dots) + \dots \right\}.$$

Die Darstellung der linken durch die rechte Seite bringt dann den Satz in Evidenz, der zuerst von BRIOSCHI in der Note *Sur un théorème relatif aux déterminants gauches*, LIOUVILLE's Journal de mathématiques, tome 19, S. 253 aufgestellt und bewiesen ist, dass nämlich (26) bei einem ungeraden n für $s = -1$ gleich Null wird, und aussordem für keinen reellen Werth von s verschwinden kann. Es folgt hieraus, dass die De-

terminante des Systems, das aus (10) hervorgeht, indem die Ausdrücke rechts, mit der negativen Einheit multiplicirt, auf die linke Seite gebracht werden, verschwinden muss. Wenn bei dem bezüglichen Schema alle adjungirten Elemente gleich Null würden, so müsste der nach s genommene Differentialquotient von (25) für $s = -1$ ebenfalls verschwinden, oder es müsste die Function (25) von s nicht nur durch $(s+1)$ sondern auch durch $(s+1)^2$ theilbar sein. Damit aber in (26) die mit $(s+1)$ multiplicirte Function durch $(s+1)$ aufgehen kann, muss sie gleichfalls für $s = -1$ gleich Null werden, und dies kann nur geschehen, wenn der letzte in $(s-1)^{n-1}$ multiplicirte Bestandtheil oder das Aggregat der Quadrate der Grössen λ , welche mit $n-1$ Indices versehen sind, verschwinden. Es wird daher der Fall, dass (25) durch $(s+1)^2$ aufgeht, durch die Voraussetzung ausgeschlossen, dass die Verbindungen λ , bei denen die Zahl der Indices gleich $n-1$ ist, nicht alle gleich Null sind. Sobald diese Voraussetzung gilt, ist es sicher, dass die Verhältnisse der Grössen $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ durch das System (10) vollständig bestimmt sind.

Hier kann die Bemerkung hinzugefügt werden, dass das System (10) aus (16) entsteht, indem die Zeiger a, b, c, \dots, e die Werthe $1, 2, 3, \dots, n$ erhalten, und der Zeiger f fortfällt. Dem entsprechend fallen auch in (18) die nach f laufenden Summen fort, und für die in (19) aufgeführten Grössen, die mit $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ coincidiren, folgt aus (20), dass ihre Verhältnisse durch die Verhältnisse der Grössen λ bestimmt sind, welche $n-1$ Zeiger haben. Die oben ermittelte Bedingung, dass nicht alle Grössen λ , die $n-1$ Zeiger haben, verschwinden dürfen, bezieht sich hiernach auf diejenigen Grössen λ , denen die gesuchten Grössen $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ proportional sein müssen.

Die Determinante des Systems (16) wird aus $D(s_1, s_2, \dots, s_n)$ erhalten, in dem man statt s_a, s_b, \dots, s_e die negative, statt s_f die positive Einheit substituirt. Ich werde jetzt die Veränderung betrachten, welche mit der rechten Seite von (24) vor sich geht, wenn die Grössen s_a, s_b, \dots, s_e ungeändert bleiben, dagegen für jede Grösse s_f respective $-s_f$ eingesetzt wird. Die rechte Seite von (24) ist ein Aggregat von Summanden, die aus zwei Factoren bestehen. Der eine Factor geht aus dem Product $(s_1+1)(s_2+1)\dots(s_n+1)$ hervor, indem auf alle möglichen Arten eine gerade Anzahl unter den Grössen s_1, s_2, \dots, s_n durch ihren negativ genommenen Werth ersetzt wird. Der andere Factor ist das Quadrat derjenigen

Größen λ , deren Indices mit den Indices der negativ genommenen Größen s_1, s_2, \dots, s_n übereinstimmen. Wofür nun für eine gerade Anzahl von Größen s_f immer $-s_f$ substituirt wird, so geht der Inbegriff der ersten Factoren in sich selbst über. Weil aber die zweiten Factoren unberührt bleiben, so ist der Erfolg kein anderer, als dass die letzteren in einer regelmässig bestimmten aber anderen Reihenfolge mit den ersten Factoren zusammentreten. Wird nun, nachdem dies geschehen ist, statt s_1, s_2, \dots, s_n dieselbe Grösse gesetzt, so ergibt sich die Determinante von (16) durch die Annahme $s = -1$. Die über die Determinante (25) angestellten Erörterungen erlauben jetzt in Bezug auf die Determinante des Systems (16) den Schluss, dass diese verschwindet, und dass gleichzeitig nicht alle adjungirten Elemente verschwinden können, vorausgesetzt, dass von einer bestimmten Gruppe von n Größen λ nicht alle Individuen verschwinden. Eine genaue Erörterung lässt erkennen, dass die bezüglichen Größen λ dieselben sind, welche in (20) erscheinen, und denen die aufzusuchenden Größen (19) proportional werden.

Will man die Größen $\rho_1^{a,b,\dots,e}, \dots, \rho_n^{a,b,\dots,e}$, deren Verhältnisse durch das System (16) bestimmt sind, mittelst eines Problems definiren, dass dem von SCHLÄFLI aufgestellten Problem entspricht, so kann man fordern, dass der Ausdruck

$$(27) \quad x_a y_a + x_b y_b + \dots + x_e y_e - \sum_f x_f y_f$$

zu einem Maximum oder Minimum gemacht werde, während die Summe $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ einen festen Werth hat, und dass der für (27) resultirende Werth, durch die Summe $x_1^2 + \dots + x_n^2$ dividirt, gleich der Einheit sei.

Ich komme jetzt zu der Untersuchung des Falles, dass n gerade ist. Für denselben betrachtet SCHLÄFLI das auf den obigen Ausdruck (5) bezügliche Problem de maximis et minimis. Er giebt an, dass die obige Gleichung des n^{ten} Grades (7) alsdann durch den Werth $\sigma = 1$ nicht erfüllt wird, dass deshalb das zugehörige System (6) keine Auflösung zulässt, und zieht hieraus den richtigen Schluss, dass für eine ebene Mannigfaltigkeit einer geraden Ordnung die von ihm aufgesuchte Verallgemeinerung einer Drehungsaxe nicht vorhanden ist. Man kann indessen für eine ebene Mannigfaltigkeit einer geraden Ordnung eine andere Forderung aufstellen,

derselben Weise gefunden werden, wie für einer ungeraden Werth von n geschehen ist. Die oben mit (17) und (18) bezeichneten Gleichungen bestehen, wie l. c. gezeigt worden ist, ohne Unterschied für ungerade oder gerade Werthe von n . Es folgt also genau, wie vorhin, dass unter der erwähnten Voraussetzung die gesuchten Grössen

$$(30) \quad \rho_a^{a,b,\dots,e}, \dots, \rho_e^{a,b,\dots,e}, \rho_f^{a,b,\dots,e}$$

den Grössen

$$(31) \quad \lambda_{bc\dots e}, \dots, \lambda_{ab\dots d}, \lambda_{fab\dots e}$$

respective proportional sind. Nachdem somit die Gruppe von 2^{n-1} Punkten $(\rho_1^{a,b,\dots,e}, \dots, \rho_n^{a,b,\dots,e})$ vollständig bestimmt ist, bleibt nur übrig, die angegebenen Eigenschaften der Determinante des Systems (29) zu beweisen.

Dies geschieht mit Hülfe der obigen Gleichung (24), welche l. c. ebensowohl für gerade als für ungerade Werthe von n begründet worden ist. Gegenwärtig kommt es darauf an, die Veränderung zu erörtern, welche bei geradem n mit der rechten Seite von (24) erfolgt, sobald die Grössen s_a, s_b, \dots, s_e ungeändert bleiben, dagegen für jede der Grössen s_f , deren Anzahl jetzt ungerade ist, — s_f substituirt wird.

In den Summanden, aus denen die rechte Seite von (24) besteht, ist, wie oben bemerkt, der eine Factor ein Product, das aus dem Ausdruck $(s_1 + 1)(s_2 + 1) \dots (s_n + 1)$ hervorgeht, in dem auf alle möglichen Arten für eine gerade Anzahl von Zeigern die betreffende Grösse s_p durch die mit der negativen Einheit multiplicirte Grösse s_p ersetzt wird. Wendet man die vorgeschriebene Vertauschung auf alle Grössen s_f mit Ausnahme einer einzigen an, so ist die Vertauschung für eine gerade Anzahl von Grössen erfolgt. Dadurch geht der Inbegriff der erwähnten ersten Factoren nach dem obigen in sich selbst über. In jedem dieser Factoren giebt es, weil n gerade ist, eine gerade Anzahl einfacher Factoren von der Gestalt $s_p + 1$ wie auch von der Gestalt $-s_q + 1$. Das Product der einen wie der anderen einfachen Factoren möge ein Theilproduct genannt werden. Nimmt man jetzt mit der unter den s_f zuletzt gelassenen Grösse die Verwandlung in ihren negativen Werth vor, so ist die Wirkung nothwendig die, dass von den beiden Theilproducten das eine einen einfachen Factor verliert, das andere einen Factor gewinnt. Es verwandelt sich also die rechte Seite von (24)

in ein Aggregat, bei dem der erste Factor aus zwei Theilproducten besteht, deren jedes eine ungerade Anzahl von einfachen Factoren enthält.

Die zu untersuchende Determinante des Systems (29) geht aus $D(s_1, s_2, \dots s_n)$ hervor, in dem statt $s_a, s_b, \dots s_e$ die negative, statt s_f die positive Einheit eingesetzt wird. Nachdem also auf der rechten Seite von (24) $s_a, s_b, \dots s_e$ nicht geändert sind, s_f aber durch $-s_f$ ersetzt ist, kann man $s_1, s_2, \dots s_n$ gleich derselben Grösse s nehmen, und hat zu zeigen, dass der bezügliche Ausdruck, der bis auf einen von Null verschiedenen Factor durch die Substitution $s = -1$ in die Determinante des Systems (29) übergeht, verschwindet. Weil aber nach der angestellten Erörterung die rechte Seite von (24) gleich einem Aggregat von Summanden wird, deren erster Factor aus zwei Theilproducten von ungerader Anzahl einfacher Factoren gebildet ist, so geht durch die Annahme $s_1 = s_2 = \dots s_n = s$ das erste oder zweite der beiden Theilproducte in einen Potenz von $(s+1)$ oder $(-s+1)$ von ungeradem Exponenten über. Weil aber die kleinste ungerade Zahl die Einheit selbst ist, so enthält jeder erste Factor den Ausdruck $(s+1)$ mindestens ein Mal. Deshalb ist der ganze Ausdruck durch $(s+1)$ theilbar, oder verschwindet für $s = -1$, wie behauptet worden war.

Die Voraussetzung, dass in dem System (29) nicht alle adjungirten Elemente verschwinden, muss aus dem oben angegebenen Grunde erfüllt sein, wenn die zuletzt betrachtete Function von s zwar durch $s+1$ aber nicht durch $(s+1)^2$ theilbar ist. Zunächst werde ich die Bedingung für das Eintreten dieses Umstandes für die Annahme ableiten, dass die Zeiger $a, b, \dots e$, welche ungeändert bleiben sollen, sich auf einen reduciren, und dass $a = 1$ sei. Das Zeichen f durchläuft alsdann die Reihe von Zahlen $2, 3, \dots, n$. Man hat daher in $D(s_1, s_2, \dots s_n)$ die Grössen $s_2 \dots s_n$ respective durch $-s_2 \dots -s_n$ zu ersetzen, und hierauf

$$s_1 = s_2 = \dots = s_n = s$$

zu nehmen. Die resultirende Function von s ist dann gleich einem Aggregat, dessen Summanden durch $(s+1), (s+1)^3, \dots$ aufgehen. Damit die Function nicht durch $(s+1)^2$ theilbar sei, darf der Factor von $(s+1)$ nicht verschwinden. Es zeigt sich aber, dass in demselben als Factor das Aggregat

$$(32) \quad \lambda_{23\dots n}^2 + \lambda_{3\dots n2}^2 + \dots + \lambda_{n23\dots(n-1)}^2 + \lambda_{123\dots n}^2$$

enthalten ist, und daraus ist zu schliessen, dass die zu untersuchende Function von s niemals durch $(s + 1)^2$ aufgehen kann, wenn nicht jede einzelne der obigen Grössen λ gleich Null wird.

Wenn, wie in dem allgemeinen Falle, ein beliebiger Complex von Zeigern $a, b, \dots e$ vorliegt, so gilt die gleiche Überlegung und man findet an der Stelle von (32) das folgende Aggregat

$$(33) \quad \lambda_{bc\dots e}^2 + \dots + \lambda_{ab\dots d}^2 + \sum_f \lambda_{fab\dots e}^2.$$

Die entsprechende Function von s kann dann niemals durch $(s + 1)^2$ aufgehen, wenn nicht alle in (33) erscheinenden Grössen λ gleich Null sind. Diese fallen aber mit den in (31) angegebenen Grössen zusammen, welchen die in (30) enthaltenen Grössen $\rho_a^{a,b,\dots e}, \dots \rho_e^{a,b,\dots e}, \rho_f^{a,b,\dots e}$ proportional sind. Somit ist für jeden geraden Werth von n eine Gruppe von 2^{n-1} Punkten $(\rho_1^{a,b,\dots e}, \dots \rho_n^{a,b,\dots e})$, die der gestellten Aufgabe genügen, unzweifelhaft bestimmt.

Eine Forderung, welche dem von SCHLÄFLI formulirten Problem analog ist, und zu dem entwickelten Ergebniss führt, besteht darin, für das jedes Mal ausgewählte System von Zeigern zu verlangen, dass der Ausdruck

$$(34) \quad x_a y_a + \dots + x_e y_e - \sum_f x_f y_f$$

zu einem Maximum oder Minimum gemacht werde, während die Summe $x_1^2 + \dots + x_n^2$ ihren Werth nicht ändert, und der Ausdruck (34), durch die Summe $x_1^2 + \dots + x_n^2$ dividirt, den Werth Eins annimmt.

Die Aufgabe welche für jeden geraden Werth von n ausgesprochen und gelöst ist, erhält für den Fall $n = 2$ eine anschauliche Bedeutung, insofern die betrachtete Mannigfaltigkeit der zweiten Ordnung durch eine Ebene repräsentirt wird. Hier sind x_1, x_2 die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes in einem festen, ferner y_1, y_2 die rechtwinkligen Coordinaten desselben Punktes in einem beweglichen Coordinatensystem, das denselben Nullpunkt hat. Wird das zweite System in die Lage des ersten gedreht und jeder Punkt auf das erste System bezogen, so geht der Punkt (x_1, x_2) in den Punkt (y_1, y_2) über. Wenn nun der Punkt (y_1, y_2) durch eine der beiden Axen des festen Systems abgespiegelt wird, so entsteht als sein Spiegelbild respective der Punkt $(y_1, -y_2)$ oder der Punkt $(-y_1, y_2)$. Die oben gestellte Aufgabe fordert einen Punkt $(\rho_1^{(1)}, \rho_2^{(1)})$, für welchen

$$\rho_1^{(1)} x_1 + \rho_2^{(1)} x_2 = \rho_1^{(1)} y_1 - \rho_2^{(1)} y_2$$

oder beziehungsweise einen Punkt $(\rho_1^{(2)}, \rho_2^{(2)})$, für den

$$\rho_1^{(2)}x_1 + \rho_2^{(2)}x_2 = -\rho_1^{(2)}y_1 + \rho_2^{(2)}y_2$$

wird. Der von dem Nullpunkt nach dem Punkte $(\rho_1^{(1)}, \rho_2^{(1)})$ gezogene Strahl soll mit den nach den Punkten (x_1, x_2) und $(y_1, -y_2)$ gezogenen Strahlen gleiche Winkel, der nach dem Punkte $(\rho_1^{(2)}, \rho_2^{(2)})$ gezogene Strahl mit den nach den Punkten (x_1, x_2) und $(-y_1, y_2)$ gezogenen Strahlen gleiche Winkel bilden. Sowohl der eine wie auch der andere gesuchte Strahl ist daher eine Symmetrieaxe für die Lage des Punktes (x_1, x_2) in Bezug auf den Punkt, der aus (y_1, y_2) durch die eine oder die andere der bezeichneten Spiegelungen entstanden ist. Es tritt deshalb an die Stelle der Gruppe von Drehungsaxen für $n = 2$ eine Gruppe von zwei Symmetrieaxen, und für jeden beliebigen geraden Werth von n eine Gruppe von 2^{n-1} Axen, die als Symmetrieaxen aufgefasst werden können.

Bonn, d. 24. October 1899.

SUR LA DISTRIBUTION DES NOMBRES PREMIERS

PAR

HELGE VON KOCH

À STOCKHOLM.

Introduction.

Une propriété bien simple de la fonction exponentielle va nous servir comme point de départ pour cette étude: si l'on désigne par x et s deux nombres positifs on a

$$(A) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-x^t}) = \begin{cases} 1 \\ 1 - e^{-1} \\ 0 \end{cases}$$

selon que

$$x \begin{matrix} \geq \\ = \\ < \end{matrix} 1.$$

Dans l'étude de la formule d'EULER (Introd. in anal. infin., t. I, Cap. 15):

$$\sum p^{-s} + \frac{1}{2} \sum p^{-2s} + \dots = \log \zeta(s)$$

et des formules qui en résultant, cette remarque nous permet d'employer l'expression (A) comme facteur de discontinuité au lieu de l'intégrale définie

$$(B) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - it}^{\sigma + it} \frac{x^z}{z} dz = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{cases}$$

dont on se sert ordinairement pour passer de la formule d'EULER à celle

de RIEMANN (Mathem. Werke, I Aufl., p. 136) ou à des formules équivalentes.¹

Nous arrivons ainsi à des expressions nouvelles pour la fonction $f(x)$ de RIEMANN et pour des fonctions numériques qui s'y rattachent. Ces expressions paraissent plus élémentaires que celles qu'on possède auparavant, et pour l'étude des questions asymptotiques elles présentent quelques avantages. Du moins, elles nous permettent de démontrer très facilement quelques résultats, prévus déjà par RIEMANN, mais qui, autant que je connais, n'ont pas encore été démontrés rigoureusement.

Parmi ces résultats, qui se trouvent exposés au § 7, je citerai le suivant:

Si $F(x)$ désigne le nombre des nombres premiers $\leq x$ et si l'on admet, avec RIEMANN, que les racines de la fonction $\xi(t)$ de RIEMANN sont toutes réelles, la différence entre $F(x)$ et le logarithme intégral $Li(x)$ sera une quantité d'un ordre inférieur à celui de $x^{\frac{1}{2}+\sigma}$, σ désignant un nombre positif si petit qu'on le veut.

Il est bien possible qu'on pourra arriver au même résultat par d'autres méthodes, mais je crois que la méthode adoptée dans le présent travail conduit plus facilement au but.

§ 1. Expression nouvelle de la fonction $f(x)$ de Riemann.

Désignons par s un nombre positif > 1 et considérons la formule d'EULER

$$(1) \quad \sum p^{-s} + \frac{1}{2} \sum p^{-2s} + \dots = \log \zeta(s)$$

¹ C'est en se servant de cette intégrale et en s'appuyant sur le théorème de M. HADAMARD (Journal de mathém., 1893) relatif à la fonction $\zeta(s)$ que M. VON MANGOLDT (Journal für Math., Bd. 114) a réussi à donner, pour la première fois, une démonstration rigoureuse de la formule de RIEMANN. — Dans les recherches importantes de M. HADAMARD (Bull. de la Soc. math. de France, 1896) et de M. DE LA VALLÉE POUSSIN (Ann. de la Soc. sc. de Bruxelles, 1896; Mém. cour. de l'Acad. de Belgique, 1899) des intégrales analogues à (B) jouent un rôle fondamental.

les sommes s'étendant à tous les nombres premiers et $\zeta(s)$ désignant la fonction définie (pour $R(s) > 1$) par la série suivante

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

Dans cette formule, mettons νs à la place de s et multiplions les deux membres par

$$(-1)^{\nu-1} \frac{e^{\nu s}}{\nu},$$

x désignant un nombre positif donné; donnons à ν successivement les valeurs

$$\nu = 1, 2, 3 \text{ etc in inf.}$$

et faisons la somme de toutes les égalités ainsi obtenues. Les seconds membres nous donnent ainsi la série suivante

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} x^{\nu s} \log \zeta(\nu s)$$

et la somme des premiers membres s'écrit comme une série triple

$$(2) \quad \sum_{\nu=1}^{+\infty} \sum_p \sum_{\lambda} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x}{p^\lambda} \right)^{\nu s}$$

où la somme \sum_{λ} s'étend à tous les nombres entiers positifs, la somme \sum_p à tous les nombres premiers successifs. Désignant cette série (2) par S , on a donc l'égalité

$$(3) \quad S = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} x^{\nu s} \log \zeta(\nu s).$$

Comme on a par hypothèse $s > 1$ la série (2) est absolument convergente; c'est ce qu'on voit en remarquant que

$$\sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x}{p^\lambda} \right)^{\nu s} < \left(\frac{x}{p} \right)^{\nu s} \frac{1}{1 - p^{-\nu s}} = \left(\frac{x}{p} \right)^{\nu s} \frac{2^{\nu s}}{2^{\nu s} - 1}$$

d'où

$$\sum_p \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x}{p^\lambda} \right)^{\nu s} < \left(\frac{x}{2} \right)^{\nu s} \left(1 + \left(\frac{x}{3} \right)^{\nu s} + \left(\frac{x}{4} \right)^{\nu s} + \dots \right)$$

d'où

$$\sum_{\nu} \sum_p \sum_{\lambda} \left| \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x}{p^\lambda} \right)^{\nu s} \right| < \binom{x}{2} e^{\binom{x}{2}} K,$$

K désignant un nombre dépendant de s .

Il en résulte qu'on a le droit d'écrire

$$(4) \quad S = \sum_p \sum_{\lambda} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x}{p^\lambda} \right)^{\nu s} = \sum_p \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-x^s p^{-s\lambda}}).$$

Cette nouvelle série converge uniformément par rapport à s pour toutes les valeurs réelles de s remplissant la condition

$$(5) \quad s \geq 1 + h,$$

h étant un nombre fixe > 0 . En effet, il n'y a qu'un nombre fini de termes de cette série où l'on a

$$p^\lambda \leq x;$$

pour les autres termes, on a

$$\frac{1}{\lambda} (1 - e^{-x^s p^{-s\lambda}}) < \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x}{p^\lambda} \right)^s.$$

Comme la série

$$\sum_p \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x}{p^\lambda} \right)^s,$$

étendue aux nombres premiers p et aux nombres entiers positifs λ tels que $x < p^\lambda$, est évidemment uniformément convergente dans le domaine (5), il en est donc de même de la série (4).

Donc on a, en toute rigueur,

$$(6) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} S = \sum_p \sum_{\lambda} \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\lambda} (1 - e^{-x^s p^{-s\lambda}}) \right].$$

Or, d'après la remarque faite au début, on a

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-x^s p^{-s\lambda}}) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-1}) \end{cases} \quad \text{ou}$$

selon que

$$p^\lambda \leq x.$$

Donc, désignant par $F(x)$ le nombre des nombres premiers $\leq x$ et posant

$$f(x) = F(x) + \frac{1}{2} F\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \dots$$

on a

$$\lim_{s \rightarrow \infty} S = f(x) - \frac{1}{\lambda} e^{-1}$$

si x est de la forme p^λ (p désignant un nombre premier et λ un entier positif) et, dans le cas contraire

$$\lim_{s \rightarrow \infty} S = f(x).$$

L'identité

$$(8) \quad S = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\lfloor \nu \rfloor} x^{\nu s} \log \zeta(\nu s)$$

nous donne donc l'expression suivante pour $f(x)$:

$$(9) \quad f(x) = \varepsilon + \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\lfloor \nu \rfloor} x^{\nu s} \log \zeta(\nu s)$$

où l'on a $\varepsilon = 0$ si x n'est pas la puissance d'un nombre premier, mais $\varepsilon = \frac{1}{\lambda} e^{-1}$ si $x = p^\lambda$.

§ 2. Expressions des fonctions $\phi(x)$ et $A(x, r)$.

Désignons par $\theta(x)$ la somme des logarithmes naturels de tous les nombres premiers $\leq x$ et posons

$$(10) \quad \phi(x) = \theta(x) + \theta\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \theta\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \dots$$

ou, ce qui revient au même

$$\phi(x) = \sum_{p \leq x} \log p + \sum_{p^2 \leq x} \log p + \sum_{p^3 \leq x} \log p + \dots$$

Quand x n'est pas la puissance d'un nombre premier, cette fonction coïncide avec la fonction $f(x)$ de RIEMANN.

La fonction $\phi(x)$ représente donc le logarithme du plus petit commun multiple de tous les nombres entiers $\leq x$. On connaît le rôle considérable que joue cette fonction déjà dans les travaux de TCHEBYCHEFF.¹ Pour le but que nous nous proposons ici, il est nécessaire d'exprimer $\phi(x)$ par une formule analogue à (9).

À cet effet, différencions la formule (1) par rapport à s . Il vient

$$(10) \quad \sum p^{-s} \log p + \sum p^{-2s} \log p + \dots = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

Dans cette formule, mettons νs à la place de s , multiplions par $(-1)^{\nu-1} \frac{1}{\nu} x^{\nu s}$ et faisons la somme de $\nu = 1$ jusqu'à $\nu = +\infty$. On trouve ainsi

$$(12) \quad \sum_{\nu=1}^{+\infty} \sum_p \sum_{\lambda} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} \left(\frac{x}{p^\lambda}\right)^{\nu s} \log p = -\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} x^{\nu s} Z(\nu s),$$

où nous avons introduit, pour abrégier, la notation

$$Z(s) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^s}.$$

Ici, comme plus haut, on voit que la série triple converge absolument (s étant supposé > 1). Elle pourra donc s'écrire sous la forme

$$(13) \quad \sum_p \sum_{\lambda} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} \left(\frac{x}{p^\lambda}\right)^{\nu s} \log p = \sum_p \sum_{\lambda} (1 - e^{-x^s p^{-s\lambda}}) \log p.$$

Et l'on démontre, comme précédemment, que la série double du second membre converge uniformément pour toutes les valeurs réelles de s supérieures à un nombre fixe > 1 .

On trouve donc, en passant à la limite ($s = \infty$), que la série (13) prend la valeur

$$\phi(x) - e^{-1} \log p$$

si x est de la forme p^λ et, dans les autres cas, la valeur

$$\phi(x).$$

¹ Mémoire de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Petersbourg, 1850.

Ceci nous permet donc d'écrire

$$(14) \quad \phi(x) = \omega - \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} x^{\nu s} Z(\nu s)$$

où l'on a $\omega = e^{-1} \log p$ si x est de la forme p^λ , mais $= 0$ dans le cas contraire.

Avant de tirer quelques conclusions de cette formule, nous allons écrire la formule correspondante pour une fonction qui embrasse $\phi(x)$ comme cas particulier et qui, d'après les travaux de M. VON MANGOLDT et de M. DE LA VALLÉE POUSSIN, joue, comme $\phi(x)$, un rôle important pour la théorie de la fonction $f(x)$ de RIEMANN.

Désignons par $A(x, r)$ la fonction suivante:¹

$$(15) \quad A(x, r) = \sum_{n=1}^{[x]} \frac{L(n)}{n^r}$$

où $[x]$ désigne le plus grand entier qui ne dépasse pas x et où la fonction $L(n)$ est définie par les conditions suivantes

$\alpha)$ $L(1) = 0$,

$\beta)$ $L(n) = 0$, quand n est composé par des facteurs premiers distincts,

$\gamma)$ $L(n) = \log p$, quand $n = p^\lambda$, p désignant un nombre premier et

λ un nombre entier positif.

On voit que cette définition est identique à la suivante:

$$A(x, r) = \sum_{p \leq x} p^{-r} \log p + \sum_{p^2 \leq x} p^{-r} \log p + \dots$$

les sommes étant étendues à toutes les puissances de nombres premiers $\leq x$.

Pour avoir une expression de cette fonction, nous partons encore une fois de la formule (11). Mais cette fois nous mettons $r + \nu s$ à la place de s et procédons ensuite comme tout à l'heure. Il vient ainsi

$$(16) \quad A(x, r) = \frac{\omega}{x^r} - \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} x^{\nu s} Z(r + \nu s)$$

où ω a la même signification que plus haut. Cette formule, qui est valable pour toute valeur de r , se confond, pour $r = 0$, avec la formule (14).

¹ Quand x n'est pas la puissance d'un nombre premier, cette fonction coïncide avec la fonction désignée par $A(x, r)$ par M. VON MANGOLDT (Journal für Math., Bd. 114, p. 279).

§ 3. *Rappel de quelques propriétés connues de la fonction $\zeta(s)$.*

Nous allons appliquer maintenant les formules obtenues à l'étude des fonctions numériques dont il s'agit.

Commençons par résumer les propriétés de la fonction $\zeta(s)$ de RIEMANN dont nous aurons besoin dans la suite.

Pour les valeurs de s dont la partie réelle est supérieure à l'unité cette fonction est définie par la série suivante

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

C'est une fonction analytique régulière dans tout le plan sauf au point $s = 1$ qui est un pôle simple au résidu 1.

Pour toutes les valeurs de s on a

$$(17) \quad (1-s)\zeta(s) = H(s)\zeta(0)e^{\frac{s}{2}}\pi^{\frac{s}{2}}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{s}{2n}\right)e^{-\frac{s}{2n}},$$

C désignant la constante d'EULER et $H(s)$ étant une fonction entière dont toutes les racines sont situées entre l'axe imaginaire et une droite passant par le point $s = 1$, parallèle à cet axe.¹ Ces racines sont conjuguées deux à deux et à toute racine ρ correspond une racine $1 - \rho$.

Ces résultats sont tous établis par RIEMANN (loc. cit.). C'est à M. HADAMARD (Journal de mathématiques, 1893) qu'on doit le théorème fondamental relatif à la fonction $H(s)$ et qui peut s'énoncer ainsi qu'il suit.

Convenons de désigner par ρ_0 la quantité imaginaire conjuguée à ρ . Alors le produit

$$(18) \quad \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \left(1 - \frac{s}{\rho_0}\right)$$

étendu à toutes les racines ρ de $H(s)$ dont la partie imaginaire est positive, converge absolument et représente la fonction $H(s)$:

$$(19) \quad H(s) = \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \left(1 - \frac{s}{\rho_0}\right).$$

¹ $H(s)$ ne diffère que par un facteur constant de la fonction $\hat{\zeta}(t)$ de RIEMANN ($s = \frac{1}{2} + ti$).

Des formules (17) et (19) résulte que la dérivée logarithmique $Z(s)$ de $\zeta(s)$ peut s'écrire sous la forme suivante:

$$(20) \quad Z(s) = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}l\pi - \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \right) + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{s-\rho_0} \right).$$

Dans cette formule, ainsi que dans les formules que nous écrirons plus tard, le symbole \sum_{ρ} désigne une sommation étendue à celles des racines $\rho = \alpha + \beta i$ où la partie imaginaire β est positive.

§ 4. Etude de la fonction $\Psi(x, s)$.

Appliquons la formule (20) à l'étude de la fonction

$$(21) \quad \Psi(x, s) = - \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} x^{\nu s} Z(\nu s)$$

que nous avons rencontrée plus haut.

Nous aurons

$$(22) \quad Z(\nu s) = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}l\pi - \frac{1}{\nu s-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\nu s+2n} - \frac{1}{2n} \right) + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{\nu s-\rho} + \frac{1}{\nu s-\rho_0} \right)$$

d'où

$$(23) \quad \begin{aligned} \Psi(x, s) = & - \left(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}l\pi \right) (1 - e^{-x}) \\ & + \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{1}{\nu s-1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} x^{\nu s} \\ & - \sum_{\nu=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\nu s+2n} - \frac{1}{2n} \right) \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} x^{\nu s} \\ & - \sum_{\nu=1}^{+\infty} \sum_{\rho} \left(\frac{1}{\nu s-\rho} + \frac{1}{\nu s-\rho_0} \right) \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} x^{\nu s}. \end{aligned}$$

Or les séries doubles qui figurent dans cette formule convergent absolument (s étant toujours supposé > 1). C'est ce qu'on voit immédiatement en remarquant que les séries

$$\sum_n \left| \frac{1}{\nu s + 2n} - \frac{1}{2n} \right| \frac{1}{\nu}$$

et

$$\sum_\rho \left| \frac{1}{\nu s - \rho} + \frac{1}{\nu s - \rho_0} \right| \frac{1}{\nu}$$

convergent quel que soit ν et tendent vers zéro quand ν croît indéfiniment.

Donc, dans les séries doubles dont il s'agit, nous avons le droit d'invertir l'ordre de sommation. Il en résulte que, si l'on introduit la notation

$$(24) \quad P(x, s, \alpha) = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{1}{\nu s + \alpha} \frac{(-1)^{\nu-1}}{|\nu|} x^{\nu s}$$

l'expression précédente de $\Psi(x, s)$ prendra la forme

$$(25) \quad \begin{aligned} \Psi(x, s) = & - \left(\frac{1}{2} C + \frac{1}{2} l\pi \right) (1 - e^{-x}) \\ & + P(x, s, -1) \\ & - \sum_{n=1}^{+\infty} \left[P(x, s, 2n) - \frac{1}{2n} (1 - e^{-x}) \right] \\ & - \sum_{\rho} P(x, s, -\rho) + P(x, s, -\rho_0). \end{aligned}$$

On voit par là que l'étude de la fonction $\Psi(x, s)$ (et par suite de la fonction $\phi(x)$) dépend essentiellement de la fonction P définie par la formule (24).

Portons donc d'abord notre attention sur cette nouvelle fonction.

Comme fonction de x , $P(x, s, \alpha)$ est évidemment une fonction *entière*; comme fonction de α , elle est méromorphe dans tout le plan. Enfin, par rapport à s , nous n'avons besoin de considérer la fonction P que pour les valeurs réelles et positives de cette variable.

Cette fonction peut facilement être exprimée à l'aide d'une intégrale définie. On a, en effet

$$\sum_{\nu} \frac{1}{\nu s + \alpha} \frac{(-1)^{\nu-1}}{|\underline{\nu}|} x^{\nu s + \alpha} = \int dx \sum_{\nu} \frac{(-1)^{\nu-1}}{|\underline{\nu}|} x^{\nu s + \alpha - 1} \\ = \int dx \cdot x^{\alpha-1} (1 - e^{-x})$$

d'où s'obtient la formule

$$(26) \quad P(x, s, \alpha) = x^{-\alpha} \int_0^x y^{\alpha-1} (1 - e^{-y^s}) dy,$$

valable tant que la partie réelle de $s + \alpha$ est plus grande que zéro.

En intégrant par parties deux fois successives, on trouve

$$(27) \quad P(x, s, \alpha) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-x^s}) - \frac{s x^s e^{-x^s}}{\alpha(s + \alpha)} \\ - \frac{s^2}{\alpha(s + \alpha)} x^{-\alpha} \int_0^x y^{s+2s-1} e^{-y^s} dy.$$

À côté de cette formule, nous citerons la suivante:

$$(28) \quad P(x, s, \alpha) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-x^s}) - e^{-x^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{s^k x^{ks}}{\alpha(s + \alpha) \dots (ks + \alpha)}.$$

Cette nouvelle formule peut s'obtenir soit à l'aide de la précédente, soit en partant de l'identité:

$$(29) \quad \frac{s^k}{\alpha(s + \alpha) \dots (ks + \alpha)} = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{|k|} - \frac{1}{\alpha + s} \frac{1}{|k-1|} + \dots + (-1)^k \frac{1}{\alpha + ks} \frac{1}{|k|}.$$

Cette identité montre, en effet, que l'on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{s^k x^{ks}}{\alpha(s + \alpha) \dots (ks + \alpha)} = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{ks}}{|k|} - \frac{1}{\alpha + s} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{ks}}{|k-1|} + \dots \\ = \frac{1}{\alpha} (e^{x^s} - 1) - \frac{x^s}{\alpha + s} e^{x^s} + \frac{1}{2} \frac{x^{2s}}{\alpha + 2s} e^{x^s} \dots$$

d'où résulte immédiatement le développement (28).

Appliquons ces formules pour transformer l'expression (25).

En vertu de (27) on a

$$(30) \quad P(x, s, 2n) - \frac{1}{2n} (1 - e^{-x^s}) = -\frac{s x^s e^{-x^s}}{2n(s+2n)} \\ - \frac{s^2}{2n(s+2n)} x^{-2n} \int_0^x y^{2n+2s-1} e^{-y^s} dy$$

et en s'appuyant sur la formule

$$(31) \quad \int_0^x s y^{2s-1} e^{-y^s} dy = 1 - e^{-x^s} - x^s e^{-x^s}$$

on voit que

$$(32) \quad s x^{-2n} \int_0^x y^{2n+2s-1} e^{-y^s} dy < 1 - e^{-x^s} - x^s e^{-x^s}.$$

Désignant, pour abrégér, le premier membre de l'inégalité (32) par η_n , on obtient donc

$$(33) \quad - \sum_{n=1}^{+\infty} \left[P(x, s, 2n) - \frac{1}{2n} (1 - e^{-x^s}) \right] \\ = + s x^s e^{-x^s} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n(s+2n)}{1} \\ + s \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\eta_n}{2n(s+2n)} < s \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n(s+2n)}.$$

De même, on a

$$(34) \quad P(x, s, -\rho) + P(x, s, -\rho_0) = - (1 - e^{-x^s}) \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0} \right) \\ + s x^s e^{-x^s} 2 \Re \frac{1}{\rho(s-\rho)} \\ + s^2 2 \Re \left[\frac{1}{\rho(s-\rho)} x^\rho \int_0^x y^{-\rho+2s-1} e^{-y^s} dy \right],$$

Re désignant partout la partie réelle d'une quantité complexe u .

Or, ρ désignant une racine imaginaire de la fonction $\zeta(s)$, sa partie réelle est comprise entre 0 et 1. Donc la valeur absolue de l'expression

$$x^\rho \int_0^x y^{-\rho+2s-1} e^{-y^s} dy$$

est inférieure à la suivante

$$x \int_0^x y^{2s-2} e^{-y^s} dy = x \int_0^1 y^{2s-2} e^{-y^s} dy + x \int_1^x y^{2s-2} e^{-y^s} dy$$

qui, comme on voit, est inférieure à

$$\frac{x}{2s-1} + \frac{x}{s} (1 - e^{-x^s} - x^s e^{-x^s}).$$

s étant plus grand que 1, la dernière expression est évidemment moindre que $\frac{2x}{s}$. Nous pouvons donc écrire

$$(35) \quad s^2 2\Re \left[\frac{1}{\rho(s-\rho)} x^\rho \int_0^x y^{-\rho+2s-1} e^{-y^s} dy \right] < s\tau \left| \frac{1}{\rho(s-\rho)} \right|,$$

τ désignant une quantité inférieure à $4x$ en valeur absolue. (Plus tard, nous trouverons une limite plus petite pour cette quantité.)

Donc la somme de toutes les quantités (34) converge absolument. D'autre part, comme la série

$$\sum_{\rho} \frac{x^\rho y^{-\rho+2s-1}}{\rho(s-\rho)}$$

converge uniformément par rapport à x (s ayant une valeur déterminée quelconque > 1), les signes Σ et \int sont permutable et l'on aura

$$(36) \quad \begin{aligned} \sum_{\rho} \Re \left[\frac{1}{\rho(s-\rho)} x^\rho \int_0^x y^{-\rho+2s-1} e^{-y^s} dx \right] \\ = \Re \int_0^x \left(\sum_{\rho} \frac{x^\rho y^{-\rho}}{\rho(s-\rho)} \right) y^{2s-1} e^{-y^s} dy \end{aligned}$$

d'où enfin

$$(37) \quad \sum_{\rho} [P(x, s, -\rho) + P(x, s, -\rho_0)] \\ = -(1 - e^{-x}) \sum_{\rho} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0} \right) + \eta + 2s^2 \Re \int_0^1 \left(\sum_{\rho} \frac{x^{\rho} y^{-\rho}}{\rho(s-\rho)} \right) y^{2s-1} e^{-y^s} dy,$$

η désignant un nombre tendant vers zéro comme $sx^s e^{-x^s}$ quand s croît.

Il nous reste encore à étudier le terme $P(x, s, -1)$ qui figure dans l'expression (25) de $\mathcal{P}(x, s)$.

La formule (26) nous donne

$$(38) \quad P(x, s, -1) = x \int_0^1 y^{-2} (1 - e^{-y^s}) dy \\ = x \int_0^1 y^{-2} (1 - e^{-y^s}) dy + x \int_1^x y^{-2} (1 - e^{-y^s}) dx \\ = x P(1, s, -1) + x - 1 - x \int_1^x y^{-2} e^{-y^s} dy.$$

Or

$$P(1, s, -1) = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{1}{\nu s - 1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\lfloor \frac{\nu}{s} \rfloor}$$

tend évidemment vers zéro quand s croît et cela d'une telle manière que le produit $sP(1, s, -1)$ tend vers une limite finie (à savoir $\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu \lfloor \frac{\nu}{s} \rfloor}$).

De plus, on a

$$\int_1^x y^{-2} e^{-y^s} dy \leq \int_1^x \frac{dy}{y^{s+2}} = \frac{1}{s+1} \left(1 - \frac{1}{x^{s+1}} \right).$$

De la forme (38) résulte donc que nous pouvons écrire

$$(39) \quad P(x, s, -1) = x - 1 + \frac{Kx}{s},$$

K désignant un nombre qui reste au-dessous d'une limite fixe quels que soient x et s .

Enfin, on sait¹ que

$$-1 - \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}l\pi + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0} \right) = -l(2\pi).$$

Combinant toutes ces formules, on voit que la formule (25) prend la forme suivante

$$(40) \quad \begin{aligned} W(x, s) &= x - l(2\pi) + \frac{Kx}{s} + \varepsilon - \eta \\ &\quad - 2s^2 \Re \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-ny}}{n^s} \right) y^{2s-1} e^{-y} dy \end{aligned}$$

où l'on a

$$(41) \quad \varepsilon < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s}{2n(s+2n)}$$

$$(42) \quad |\eta| < Asx^s e^{-x^s},$$

A désignant un nombre fixe (indépendant de s et de x).

La fonction

$$(43) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-x^{-n}}{n} P^{(s)}(Z(r^s + 2n))$$

dont dépend, d'après (16), la fonction $A(x, r)$ peut, comme on voit facilement, s'exprimer à l'aide des fonctions $P(x, s, r-1)$, $P(x, s, r+2n)$, $P(x, s, r-\rho)$ de la même manière que nous avons exprimé plus haut (25) $W(x, s)$ à l'aide des fonctions $P(x, s, -1)$, $P(x, s, 2n)$, $P(x, s, -\rho)$. D'après cela, il serait facile d'obtenir pour (43) une formule analogue à (40).

¹ Voir, p. ex., J. PETERSEN, loc. cit. p. 269.

§ 5. *Remarques sur les séries*

$$\sum_n \frac{s}{2n(s+2n)}, \quad \sum_{\rho} \frac{s}{\rho(s-\rho)}, \quad \sum_{\rho} \frac{sx^{\rho}}{\rho(s-\rho)}.$$

Quand s augmente indéfiniment, la valeur de la série

$$(44) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s}{2n(s+2n)}$$

grandit au delà de toute limite; mais son ordre de grandeur est inférieur à celui de la puissance s^{σ} , σ étant un nombre positif si petit qu'on le veut. En effet on a

$$\frac{s^{1-\sigma}}{2n(s+2n)} < \frac{1}{2n(s+2n)^{\sigma}} < \frac{1}{(2n)^{1+\sigma}}$$

d'où

$$(44') \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s}{2n(s+2n)} < s^{\sigma} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^{1+\sigma}}.$$

Il en est de même de la série

$$(45) \quad \sum_{\rho} \frac{s}{\rho(s-\rho)}$$

étendue aux racines imaginaires ρ de la fonction $\zeta(s)$. En effet, puisque la somme $\sum \frac{1}{\rho^{1+\sigma}}$ converge absolument, on peut écrire

$$(45') \quad \sum_{\rho} \left| \frac{s}{\rho(s-\rho)} \right| < s^{\sigma} \sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|^{1+\sigma}}.$$

Pour évaluer l'ordre de grandeur de la série

$$(46) \quad \sum_{\rho} \frac{sx^{\rho}}{\rho(s-\rho)}$$

¹ En s'appuyant sur l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s}{2n(2n+s)} < \frac{s}{2(s+2)} + \int_1^{\infty} \frac{sdx}{2x(2x+s)} = \frac{s}{2(s+2)} + \log \frac{s+2}{2}$$

on trouve une limite encore plus petite, à savoir $\log(s+2)$, pour la série (44).

nous admettons, avec RIEMANN, que la partie réelle de chacune des racines ρ est égale à $\frac{1}{2}$.¹ Alors il résulte de la formule précédente que l'on a

$$(46') \quad \sum_{\rho} \left| \frac{s x^{\rho}}{\rho(s-\rho)} \right| < x^{\frac{1}{2}} s^{\sigma} \sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|^{1+\sigma}}$$

σ étant, comme plus haut, un nombre positif arbitraire.

§ 6. Transformation de la formule trouvée au § 2.

Comme nous avons vu, la formule (12) peut s'écrire sous la forme

$$(47) \quad \sum_p \sum_{\lambda} (1 - e^{-x^{\lambda} p^{-s\lambda}}) \log p = \Psi(x, s),$$

$\Psi(x, s)$ étant défini par la formule (21). Supposons que le nombre donné x soit de la forme

$$x = n + \frac{1}{2},$$

n désignant un entier positif quelconque.

Partageons la somme figurant au premier membre de (47) en deux parties S_1 et S_2

$$S_1 = \sum_{p^{\lambda} < x} (1 - e^{-x^{\lambda} p^{-s\lambda}}) \log p,$$

$$S_2 = \sum_{p^{\lambda} > x} (1 - e^{-x^{\lambda} p^{-s\lambda}}) \log p,$$

la première somme s'étendant à toutes les puissances de nombres premiers inférieures à x , la seconde à toutes les puissances $p^{\lambda} > x$.

Dans l'hypothèse $p^{\lambda} < x$ on a $p^{\lambda} \leq x - \frac{1}{2}$ d'où

$$e^{-x^{\lambda} p^{-s\lambda}} < \left(\frac{x}{p^{\lambda}} \right)^{-s} \leq \left(\frac{x - \frac{1}{2}}{x} \right)^s.$$

¹ On sait que ce théorème n'est pas encore démontré rigoureusement. Mais, d'après un article récent de M. JENSEN (Acta mathematica, t. 22, p. 359), il y a lieu d'espérer que cette lacune sera prochainement comblée.

Posant:

$$S_1 = \phi(x) - \phi_1(x, s),$$

$$\phi_1(x, s) = \sum_{p^k > x} e^{-x^s p^{-sk}} \log p,$$

on a donc

$$\phi_1(x, s) < \phi(x) \left(\frac{x - \frac{1}{2}}{x} \right)^s,$$

$\phi(x)$ conservant la même signification que plus haut (10).

Dans l'hypothèse $p^k > x$ on a $p^k \geq x + \frac{1}{2}$, d'où

$$1 - e^{-x^s p^{-sk}} < x^s p^{-sk} \leq \left(\frac{x}{x + \frac{1}{2}} \right)^s$$

$$S_2 = \sum_{p^k > x} (1 - e^{-x^s p^{-sk}}) \log p < \sum_{p^k > x} x^s p^{-sk} \log p < x^s \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^s}.$$

De l'inégalité

$$\begin{aligned} \sum_{n=x+\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\log n}{n^s} &< \frac{\log \left(x + \frac{1}{2} \right)}{\left(x + \frac{1}{2} \right)^s} + \int_{x+\frac{1}{2}}^{+\infty} x^{-s} \log x dx \\ &= \frac{\log \left(x + \frac{1}{2} \right)}{\left(x + \frac{1}{2} \right)^s} + \frac{x + \frac{1}{2}}{\left(x + \frac{1}{2} \right)^s (s-1)^2} + \frac{\left(x + \frac{1}{2} \right) \log \left(x + \frac{1}{2} \right)}{\left(x + \frac{1}{2} \right)^s (s-1)} \end{aligned}$$

résulte donc, si l'on prend

$$s - 1 > x + \frac{1}{2}$$

que l'on a

$$S_2 < 3 \left(\frac{x}{x + \frac{1}{2}} \right)^s \log \left(x + \frac{1}{2} \right).$$

Donc $\Psi(x, s)$ peut s'écrire ainsi:

$$(48) \quad \Psi(x, s) = \phi(x) + \Delta$$

où

$$(49) \quad |\Delta| < \phi(x) \left(\frac{x - \frac{1}{2}}{x} \right)^s + 3 \left(\frac{x}{x + \frac{1}{2}} \right)^s \log \left(x + \frac{1}{2} \right).$$

Or on a, d'après une remarque de M. MERTENS¹

$$\phi(x) < 2x$$

et l'on sait que

$$\begin{aligned} \left(\frac{x - \frac{1}{2}}{x} \right)^s &= \left(1 - \frac{1}{2x} \right)^s < e^{-\frac{s}{2x}}, \\ \left(\frac{x}{x + \frac{1}{2}} \right)^s &= \left(1 - \frac{1}{2(x + \frac{1}{2})} \right)^s < e^{-\frac{s}{2x+1}} \end{aligned}$$

d'où

$$(50) \quad |\Delta| < 2xe^{-\frac{s}{2x}} + e^{-\frac{s}{2x+1}} \log \left(x + \frac{1}{2} \right).$$

On voit donc qu'il suffit de prendre

$$s \geq 2x \log x$$

pour que la différence Δ entre $\psi(x, s)$ et $\phi(x)$ reste au-dessous d'un nombre fixe, quelque grand que soit x . Si l'on prend

$$s > x^2$$

on voit que Δ tend avec une grande rapidité vers zéro quand x va en croissant. Autrement dit, si l'on prend $\psi(x, s)$ ($s = x^2$) comme valeur de $\phi(x)$ on commet une erreur qui tend avec une grande rapidité vers zéro quand x augmente..

¹ Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 78.

Acta mathematica. 21. Imprimé le 1 août 1900.

§ 7. *Applications des formules précédentes. Expressions asymptotiques des fonctions $\psi(x)$, $\theta(x)$, $f(x)$, $F(x)$.*

Combinons maintenant les formules (40) et (48). Il vient

$$(51) \quad \begin{aligned} \phi(x) = x - l(2\pi) + \frac{Kx}{s} + \varepsilon - \eta - \Delta \\ - 2s^2 \Re \int_0^x \left(\sum_{\rho} \frac{x^{\rho} y^{-\rho}}{\rho(s-\rho)} \right) y^{2s-1} e^{-y^s} dy, \end{aligned}$$

ε , η et Δ satisfaisant aux inégalités (41), (42), et (49) respectivement.

Or on a

$$(52) \quad \begin{aligned} & \Re \int_0^x \left(\sum_{\rho} \frac{x^{\rho} y^{-\rho}}{\rho(s-\rho)} \right) y^{2s-1} e^{-y^s} dy \\ & < \int_0^1 \left(\sum_{\rho} \left| \frac{x^{\rho} y^{2s-\rho-1}}{\rho(s-\rho)} \right| \right) dy + \sum_{\rho} \left| \frac{x^{\rho}}{\rho(s-\rho)} \right| \int_1^x y^{2s-1} e^{-y^s} dy \\ & = \sum_{\rho} \left| \frac{x^{\rho}}{\rho(s-\rho)(2s-\rho)} \right| + \sum_{\rho} \left| \frac{x^{\rho}}{\rho(s-\rho)} \right| \frac{1}{s} (2e^{-1} - e^{-x^s} - x^s e^{-x^s}) \end{aligned}$$

(voir la formule (31)). La partie réelle de ρ étant comprise entre 0 et 1, on a (pour $s > 1$)

$$|2s - \rho| > s$$

ce qui montre que l'expression du second membre de (52) est inférieure à

$$2 \sum_{\rho} \left| \frac{x^{\rho}}{\rho(s-\rho)} \right|$$

ce qui nous permet d'écrire

$$(53) \quad \phi(x) = x - l(2\pi) + \frac{Kx}{s} + \varepsilon - \eta - \Delta - \Delta_1$$

où

$$(54) \quad |\Delta_1| < 4 \sum_p \left| \frac{sx^p}{\rho(s-\rho)} \right|.$$

Dans cette formule, prenons $s = x^2$; alors les termes $\frac{Kx}{s} - \eta - \Delta$ restent au-dessous d'une limite finie, quel que soit x , et la formule (44') montre que

$$\varepsilon < x^{2\sigma} K$$

σ étant si petit qu'on le veut et K désignant une constante.

Quant à Δ_1 , nous pouvons, dans l'hypothèse $R(\rho) = \frac{1}{2}$, appliquer la formule (46') et nous trouvons ainsi

$$|\Delta_1| < x^{\frac{1}{2} + 2\sigma} K.$$

Par là se trouve donc démontré le théorème suivant:

Dans l'hypothèse $R(\rho) = \frac{1}{2}$ la différence

$$\frac{\phi(x)}{x} - 1$$

tend vers zéro pour $x = \infty$ et cette différence est un infiniment petit d'un ordre de petitesse au moins égal à celui de l'expression

$$(55) \quad \frac{x^\sigma}{\sqrt{x}} = x^{\sigma - \frac{1}{2}}$$

σ désignant un nombre positif si petit qu'on le veut.¹

Si $\theta(x)$ désigne la somme des logarithmes de tous les nombres premiers $< x$ on sait que la différence entre $\phi(x)$ et $\theta(x)$ est de l'ordre de \sqrt{x} (car on a

$$\phi(x) - 2\phi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \theta(x) - \theta\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \theta\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \dots < \theta(x),$$

¹ J'ai donné une autre démonstration de ce théorème dans une note présentée à l'Académie de Stockholm le 9 mai 1900.

d'où résulte, dans la même hypothèse que précédemment relative aux racines ρ , le théorème qui suit:

La différence

$$\frac{\theta(x)}{x} - 1$$

tend vers zéro quand x tend vers l'infini et cette quantité est un infiniment petit d'un ordre de petitesse au moins égal à celui de l'expression (55)

Pour trouver un résultat correspondant pour la fonction $f(x)$ de RIEMANN, on pourrait commencer par trouver une expression asymptotique de la fonction $A(x, r)$, analogue à celle trouvée plus haut (formule (53)) pour la fonction $\phi(x)$. Par là et remarquant que

$$f(x) = - \int_0^{+\infty} A(x, r) dr$$

on trouverait, après quelques réductions, une formule asymptotique pour $f(x)$.

Mais on arrive plus vite au but en combinant les résultats qui précèdent avec une formule établie par M. de la VALLÉE POUSSIN.¹

Désignant, selon l'usage, par $Li(x)$ le *logarithme intégral* défini par formule

$$(56) \quad Li(x) = \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\log x} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dx}{\log x} \right\}$$

la formule dont il s'agit peut s'écrire sous la forme suivante

$$(57) \quad f(x) = Li(x) - l_2 + \frac{1}{l_x} (\phi(x) - x - l(2\pi)) \\ - \frac{1}{l^2} \left[\sum_{m=1}^{+\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^{-2m-u} du}{(2m+u)^2} + \sum_{\rho} \int_0^{\infty} \frac{x^{\rho-u} du}{(\rho-u)^2} \right]$$

la somme \sum_{ρ} s'étendant à toutes les racines imaginaires de $\zeta(s)$.

¹ Sur la fonction $\zeta(s)$ de RIEMANN et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, p. 60 (Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique, t. 49, 1899).

D'après ce qu'a montré M. de la VALLÉE POUSSIN (loc. cit. p. 61) l'expression entre crochets est inférieure à la quantité

$$\frac{1}{2x^2 l x} + \left[\frac{1}{l x} + \frac{2}{(l x)^2} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{(12)^3} \right) \right] \sum_p \left| \frac{x^p}{\rho^3} \right|;$$

dans l'hypothèse $R(\rho) = \frac{1}{2}$, cette dernière expression est de l'ordre de $\frac{V_x}{l x}$.

D'autre part, d'après ce que nous venons de démontrer, l'expression

$$\phi(x) - x - l(2\pi)$$

ne peut pas être d'un ordre d'infinitude supérieur à celui de $x^{\sigma + \frac{1}{2}}$.

La formule (57) montre donc que la différence entre $f(x)$ et $Li(x)$ est inférieure à

$$Kx^{\frac{1}{2} + \sigma}$$

σ étant un nombre positif si petit qu'on le veut et K désignant un nombre ne dépendant que de σ .

$f(x)$ étant lié à la fonction $F(x)$, qui exprime combien il y a de nombres premiers $< x$, par la relation

$$f(x) = F(x) + \frac{1}{2} F\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \dots$$

on sait que la valeur de $F(x)$ se trouve comprise entre les limites $f(x)$ et $f(x) - f\left(x^{\frac{1}{2}}\right) > f(x) - \sqrt{x}$, c'est-à-dire que la différence entre $f(x)$ et $F(x)$ est de l'ordre de \sqrt{x} .

De là résulte le théorème suivant:

Si l'on admet avec Riemann que chacune des racines imaginaires de la fonction $\zeta(s)$ a la partie réelle égale à $\frac{1}{2}$, on peut écrire

$$F(x) = Li(x) + \eta$$

où η désigne une fonction de x qui ne peut pas être d'un ordre de grandeur supérieur à celui de l'expression

$$x^{\frac{1}{2} + \sigma}$$

σ désignant un nombre positif si petit qu'on le veut.

NOTE ADDITIONNELLE.

Quand le mémoire précédent était déjà, sous presse, j'ai remarqué qu'on peut, en tirant partie d'un théorème de M. VON MANGOLDT (loc. cit.) sur les zéros ρ , pousser un peu plus loin les résultats obtenus au § 7. En effet, de ce théorème résulte, ainsi qu'a montré M. DE LA VALLÉE POUSSIN (loc. cit. p. 42), que l'on a, quel que soit le nombre positif σ ,

$$\sum_{\rho} \frac{1}{\rho^{1+\sigma}} < \frac{A}{\sigma^2},$$

A désignant une constante. Dès lors les formules (46') et (53) montrent que l'on a

$$|\phi(x) - x| < B \frac{x^{2\sigma}}{\sigma^2} \sqrt{x},$$

σ étant un nombre positif arbitraire et B une constante (indépendante de x et de σ). Si x a une valeur donnée, $\frac{x^{2\sigma}}{\sigma^2}$ atteint pour $\sigma = \frac{1}{\log x}$ son minimum et ce minimum a pour valeur $e^2(\log x)^2$. On a donc, quel que soit x :

$$|\phi(x) - x| < B e^2 (\log x)^2 \sqrt{x}.$$

La formule correspondante pour $f(x)$ se déduit de l'expression (57) et l'on trouve ainsi

$$|f(x) - Li(x)| < K \log x \cdot \sqrt{x},$$

K désignant une constante. La différence $f(x) - F(x)$ étant de l'ordre de \sqrt{x} , la même formule s'applique à $F(x)$, d'où ce résultat:

Dans l'hypothèse $\Re(\rho) = \frac{1}{2}$ il est certain que l'erreur commise en posant

$$F(x) = Li(x)$$

est inférieure à $\log x \cdot \sqrt{x}$, multiplié par une constante.¹

Comme $\log x$ est d'ordre inférieur à toute puissance x^σ ($\sigma > 0$), on voit qu'on obtient ainsi une limite supérieure de l'erreur commise qui est, pour les grandes valeurs de x , infiniment petite par rapport à celle obtenue plus haut.

¹ D'après les formules précédentes, combinées avec la formule de M. DE LA VALLÉE POUSSIN citée plus haut, il serait facile d'assigner une valeur numérique à cette constante.

SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE D'UNE BRANCHE UNIFORME
D'UNE FONCTION MONOGÈNE
(Seconde note)

PAR

G. MITTAG-LEFFLER.

Nous avons introduit dans notre première note une nouvelle conception géométrique: *l'étoile*.

Dans le plan de la variable x , soit une aire engendrée de la manière suivante: autour d'un point fixe a on fera tourner une fois un vecteur (= demi-droite) l ; sur chaque vecteur on déterminera d'une manière unique un point, soit a_i , dont la distance au point fixe a sera plus grande qu'une quantité positive donnée, la même pour tous les vecteurs. Le point a_i pourra être situé à une distance finie ou infinie du point a . Dans le cas où la distance de a à a_i est finie, on exclura du plan des x la partie du vecteur qui s'étend de a_i à l'infini. L'*étoile* est le domaine qui reste après que l'on aura pratiqué toutes ces coupures dans le plan des x . Le point fixe a est désigné comme le *centre* de l'étoile. Il convient encore de nommer les points a_i les *sommets* de l'étoile ainsi que d'introduire la définition suivante.

Une étoile est *inscrite* dans une autre qui lui est *circonscrite*, si tous les points de la première étoile appartiennent à la seconde, et si les deux étoiles ont des sommets communs.

Pour résumer les résultats qui ont été obtenus dans la première note nous emploierons la notion d'expression limite.¹

Soit $f_a(xyz \dots)$ pour un nombre infini de valeurs de a une fonction déterminée des variables $xyz \dots$. Soit α_0 un point limite des a . Supposons que, $xyz \dots$ étant un point donné dans le domaine des variables, il corresponde à chaque nombre positif σ un autre nombre positif δ tel que

$$|f_a - f_{a'}| < \sigma$$

tant que

$$|\alpha' - \alpha_0| < \delta, \quad |\alpha'' - \alpha_0| < \delta.$$

Cette supposition faite, le symbole

$$\lim_{a=\alpha_0} f_a(xyz \dots)$$

a un sens parfaitement déterminé.

On dit que $\lim_{a=\alpha_0} f_a(xyz \dots)$ est convergente au point $xyz \dots$.

En ayant $\alpha_0 = \infty$, on n'a qu'à remplacer $|\alpha' - \alpha_0| < \delta$, $|\alpha'' - \alpha_0| < \delta$ par

$$\left| \frac{1}{\alpha'} \right| < \delta, \quad \left| \frac{1}{\alpha''} \right| < \delta.$$

L'inégalité $|f_a - f_{a'}| < \delta$ ayant lieu pour un domaine X des variables $xyz \dots$, on dit que l'expression limite $\lim_{a=\alpha_0} f_a(xyz \dots)$ est uniformément convergente pour ce domaine.

¹ M. PHRAGMÉN a fait en 1890 tout un cours à l'Université de Stockholm où il a pris pour base la notion de l'expression limite. Son point de départ était la définition suivante:

Soit u_1, u_2, u_3, \dots une suite infinie de nombres rationnels ayant la propriété suivante: Le nombre positif δ étant fixé, on pourra séparer de la suite un nombre fini de termes de telle sorte que la valeur absolue de la différence entre deux termes restants soit toujours plus petite que δ .

La suite définit alors d'une manière unique une grandeur qui est désignée par

$$\lim_{n=\infty} u_n.$$

Il nous paraît évident qu'on gagne en simplicité en basant la théorie des fonctions sur la conception d'expression limite. On embrasse par exemple ainsi sous un même point de vue les séries infinies, les produits infinis, les intégrales etc.

Nous pouvons maintenant donner la forme suivante à notre théorème I.

Théorème I. a. Soit $F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(n)}(a), \dots$ une suite de constantes assujetties à la condition de Cauchy,¹ et désignons par $G_n(x|a)$ le polynôme en x

$$\sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{|\lambda_1| |\lambda_2| \dots |\lambda_n|} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)}(a) \cdot \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n}$$

qui est formé à l'aide de ces constantes.

Considérons l'expression limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x|a).$$

Il existe une étoile A de centre a qui est donnée d'une manière univoque les constantes $F(a) F^{(1)}(a) \dots F^{(n)}(a) \dots$ une fois fixées et qui possède par rapport à l'expression limite $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x|a)$ les propriétés suivantes:

Cette expression est uniformément convergente pour chaque domaine à l'intérieur de A , mais n'est jamais uniformément convergente pour aucun continuum qui embrasse un sommet de A . Elle définit pour l'intérieur de A la branche $FA(x)$ d'une fonction monogène. Cette branche est régulière dans l'intérieur de A , mais devient singulière pour les sommets de A . Elle possède encore la propriété

$$\left(\frac{d^\mu FA(x)}{dx^\mu}\right)_{x=a} = F^{(\mu)}(a); \quad \mu = 0, 1, 2, \dots$$

La branche fonctionnelle $FA(x)$, en même temps que par $G_n(x|a)$, peut être définie par une infinité d'autres polynômes

$$g_n(x|a) = \sum_{(\nu)} c_\nu^{(n)} F^{(\nu)}(a) \cdot (x-a)^\nu$$

dans lesquels chacun des coefficients $c_\nu^{(n)}$, les indices ν et n une fois fixés, est une quantité numérique donnée indépendante de a , de $F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(n)}(a), \dots$ et de x , et qui possèdent par rapport à A les mêmes propriétés que $G_n(x|a)$.

¹ voir «Première note» page 43, 44.

Il faut observer que les propriétés qui ont été attribuées à l'expression limite $\lim_{n=\infty} G_n(x|a)$ n'empêchent aucunement que cette expression pour un choix convenable des constantes $F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(n)}(a), \dots$ soit convergente en dehors de l'étoile A . De plus le cas n'est pas exclu où elle pourrait être uniformément convergente pour tout un continuum en dehors de A . Dans ce dernier cas, il serait possible qu'elle représentât pour ce continuum une fonction analytique qui ne serait pas un prolongement de la branche $FA(x)$. Il arrivera pour des formes spéciales de l'étoile A qu'un continuum simplement connexe pourra être situé en partie en dedans, en partie en dehors de A sans embrasser en même temps un sommet de A . Et le cas n'est pas exclu où l'expression limite $\lim_{n=\infty} G_n(x|a)$ est uniformément convergente pour un tel domaine. Elle représente alors pour ce domaine un prolongement de la branche $FA(x)$. Il peut encore arriver que $\lim_{n=\infty} G_n(x|a)$ soit uniformément convergente pour un domaine linéaire composé par la partie d'un vecteur compris entre le centre a et un point situé en dehors de A . Si l'on arrivait à déterminer les constantes $F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(n)}(a), \dots$ de telle manière que cette propriété subsistât on aurait incontestablement en même temps une espèce de généralisation de la conception de fonction analytique, la fonction analytique pouvant être définie comme nous l'avons vue aussi bien par l'expression limite $\lim_{n=\infty} G_n(x|a)$ que par la série de TAYLOR. La première définition serait plus générale; elle admettrait une espèce de prolongement linéaire de la fonction analytique qui conserverait des propriétés essentielles de la fonction.¹

On se tromperait pourtant d'une manière singulière en croyant avoir trouvé dans cette observation la base d'une nouvelle théorie analytique, embrassant les fonctions analytiques comme cas spécial et ayant en même temps la limitation naturelle et fixe de l'ancienne théorie. Pour entrevoir la justesse de cette affirmation, il suffit d'observer qu'on peut remplacer, comme nous venons de le voir, d'une infinité de manières le polynome

¹ Voir à ce sujet l'article récent de M. BOREL: *Sur la généralisation du prolongement analytique* (Comptes rendus etc. 23 avril 1900, page 1115) qui a paru, ce mémoire étant déjà sous presse.

$G_n(x|a)$ par un autre polynôme $g_n(x|a)$ qui est absolument équivalent à $G_n(x|a)$ quand il s'agit seulement de définir les fonctions analytiques proprement dites, mais qui en diffère essentiellement quand il s'agit de donner une extension à cette théorie telle que celle dont nous venons de parler.

Si nous avons préféré dans notre première note représenter la branche $FA(x)$ par l'intermédiaire du polynôme $G_n(x|a)$ ou d'un polynôme semblable, malgré l'inconvénient qu'il y a dans cette mode de représentation, les raisons ont été les suivantes:

La généralisation pour un nombre quelconque de variables indépendantes est immédiate. Les coefficients du polynôme se présentent sous une forme extrêmement simple au point de vue formel. La démonstration de nos théorèmes est indépendante du choix des vecteurs. Ces vecteurs peuvent en réalité être des lignes courbes quelconques (voir page 48, première note) définies de telle manière que leur ensemble recouvre tout le plan en dehors du cercle appartenant aux constantes $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, \dots , $F^{(v)}(a)$, \dots sans que deux courbes spéciales se rencontrent jamais en dehors de ce cercle.

Il faut ajouter encore une raison, c'est que cette mode de représentation se rattache d'une manière intime à une généralisation extrêmement simple de la série de TAYLOR que nous voulons exposer dans cette seconde note.

En effet, parmi les étoiles qu'on peut inscrire dans l'étoile A il faut remarquer d'une manière spéciale le cercle C de centre a , dont la circonférence, en vertu de notre définition, passera toujours par le sommet de A le plus rapproché du centre. A ce cercle correspond l'expression limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^n \frac{1}{v} F^{(v)}(a)(x-a)^v,$$

qui est connue sous le nom de *la série de Taylor*. La série de TAYLOR possède par rapport au cercle les mêmes propriétés que nous venons d'énoncer pour

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{|\lambda_1| |\lambda_2| \dots |\lambda_n|} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)}(a) \cdot \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n}$$

par rapport à A , avec une seule exception très-importante. Chaque sommet de A était un point singulier de la branche fonctionnelle $FA(x)$. Ce

Il est pourtant utile d'introduire pour l'étude de cette série un autre point de vue qui malgré sa grande simplicité et malgré le profit qu'on peut en tirer ne paraît pas avoir attiré autant qu'il le mérite l'attention des géomètres.¹

Nous introduirons la définition suivante: Nous supposons que les séries

$$\begin{aligned} f_{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}} &= \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} f_{\lambda_1 \dots \lambda_n} \\ f_{\lambda_1 \dots \lambda_{n-2}} &= \sum_{\lambda_{n-1}=0}^{\infty} f_{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}} \\ &\dots \dots \dots \\ f_{\lambda_1} &= \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} f_{\lambda_1 \lambda_2} \\ f &= \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} f_{\lambda_1} \end{aligned}$$

sont toutes convergentes pour une certaine valeur des variables. Nous dirons alors que *la série*

$$f = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} f_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$$

est une série n fois infinie qui est convergente pour cette valeur.

Nous supposons encore que les séries

$$f_{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}, f_{\lambda_1 \dots \lambda_{n-2}}, \dots, f_{\lambda_1 \lambda_2}, f_{\lambda_1}, f$$

sont toutes uniformément convergentes pour un domaine commun K à l'intérieur du domaine d'existence des fonctions $f_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$. Nous dirons alors que la série f est *une série n fois infinie qui est uniformément convergente pour le domaine K*.

Cette définition posée, nous pouvons énoncer le théorème suivant:²

¹ Voir: *Om den analytiska framställningen etc.* Första meddelandet. 11 Maj 1898. Vet. Ak. Öfversigt.

² Ce théorème est une conséquence immédiate d'un théorème démontré par WEIERSTRASS dans son mémoire: *Zur Functionenlehre*, § 2, Werke, Bd. 2, page 205—208.

et cette série sera donc convergente seulement pour $0 \leq \zeta < -\frac{1}{2}$. Si au contraire la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\left\lfloor \frac{\nu}{\mu} \right\rfloor} f^{(\nu+\mu)}(0) \zeta^{\nu+\mu}$ est regardée comme une série deux fois infinie la convergence a lieu pour $0 \leq \zeta < -1$. C'est par une application de notre conception de série n fois infinie dans le cas où il n'entre dans les fonctions $f_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ qu'une seule variable x , que nous obtiendrons une classe d'expressions limite jouissant des propriétés que nous avons énoncées précédemment.

Nous avons appris dans notre première note¹ à construire une étoile finie E située à l'intérieur de \mathfrak{E} et ayant X à son intérieur, \mathfrak{E} désignant une étoile quelconque et X un domaine fini situé à l'intérieur de \mathfrak{E} . Nous avons appris également à construire de la manière suivante une nouvelle étoile $E^{(n)}$ faisant partie de \mathfrak{E} et ayant encore X à son intérieur, le nombre entier positif n étant pris suffisamment grand.²

On fixe un vecteur l issu du centre a . En désignant par r une quantité positive suffisamment petite et en limitant le vecteur à la longueur $(n-1)r$, il arrivera que tout cercle de rayon r décrit d'un point quelconque du vecteur limité comme centre fera partie de E . C'est en portant sur l la longueur $n\rho$, où ρ est la limite supérieure de r et en faisant tourner l une fois autour de a qu'on obtient $E^{(n)}$.

En désignant par α une quantité réelle positive et inférieure à l'unité et en remplaçant ρ par $\rho_1 = \alpha\rho$ nous avons obtenu une nouvelle étoile $E_1^{(n)}$ qui est située à l'intérieur de $E^{(n)}$ et qui embrasse X , α étant pris suffisamment rapproché de l'unité.³

Choisissons maintenant pour \mathfrak{E} l'étoile A appartenant aux constantes $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, \dots , $F^{(n)}(a)$, \dots et faisons

$$(1) \quad \begin{cases} \xi = \frac{x-a}{n} \\ \xi_\mu = a + \mu \frac{x-a}{n}; \quad 0 < \mu \leq n-1 \end{cases}$$

¹ Page 50-51.

² Page 49.

³ Page 50.

où x est un point de X . Nous obtenons ¹

$$(2) \quad \begin{cases} FA(\xi_\mu + \xi) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|} F^{(\lambda)}(\xi_\mu) \xi^\lambda + \varepsilon, \\ \varepsilon = \sum_{\lambda=m+1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|} F^{(\lambda)}(\xi_\mu) \xi^\lambda. \end{cases}$$

En désignant par g la limite supérieure de $FA(x)$ quand x appartient à E et en nous appuyant sur les formules

$$\left| \frac{1}{|\lambda|} F^{(\lambda)}(\xi_\mu) \right| \leq g \rho^{-\lambda},$$

$$\left| \frac{1}{|\lambda|} F^{(\lambda)}(\xi_\mu) \xi^\lambda \right| < g \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^\lambda = g \alpha^\lambda$$

nous obtenons encore ²

$$(3) \quad |\varepsilon| \leq g \frac{\alpha^{m+1}}{1 - \alpha}.$$

La série

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|} F^{(\lambda)}(\xi_\mu) \xi^\lambda$$

est donc uniformément convergente pour le domaine X .

En se rappelant que la dérivée de la branche fonctionnelle $FA(x)$ a la même étoile de convergence que la fonction elle-même, on conclut que chaque série

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|} F^{(\lambda+\nu)}(\xi_\mu) \xi^\lambda; \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

est encore uniformément convergente pour le domaine X .

¹ c. f. formules (20) et (21) de la première note. Dans ces formules au lieu de μ on a $n-1$, mais on voit qu'elles sont encore valables sous la forme donnée ici.

² c. f. formule (22) de la première note.

On aura donc :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} FA(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_1|} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1}) \xi^{\lambda_1}, \\ F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1}) = \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_2|} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2}) \xi^{\lambda_2}, \\ F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2}) = \sum_{\lambda_3=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_3|} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}(\xi_{n-3}) \xi^{\lambda_3}, \\ \dots \\ F^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_{n-1})}(\xi_1) = \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)}(a) \cdot \xi^{\lambda_n} \end{array} \right.$$

où les séries $\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_1|} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1}) \xi^{\lambda_1} \dots, \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|} F^{(\lambda_1+\dots+\lambda_n)}(a) \xi^{\lambda_n}$ sont toutes uniformément convergentes pour le domaine X .

Le résultat que nous venons d'obtenir pourra se résumer ainsi :

Soit X un domaine fini quelconque à l'intérieur de l'étoile A appartenant aux constantes $F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(n)}(a), \dots$. On pourra toujours fixer un nombre entier positif minimum \bar{n} tel que, n étant un autre nombre entier positif qui ne sera pas plus petit que \bar{n} , la série n fois infinie

$$(5) \quad \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_1| |\lambda_2| \dots |\lambda_n|} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)}(a) \cdot \left(\frac{x-a}{n} \right)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n}$$

en étant uniformément convergente pour le domaine X représente en même temps $FA(x)$ pour ce domaine.

Le domaine X étant situé à l'intérieur du cercle ¹ appartenant aux constantes $F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(n)}(a), \dots$ on aura $\bar{n} = 1$, et la série (5) devient pour $n = \bar{n}$ une série une fois infinie qui n'est pas autre chose que la série de TAYLOR.

¹ Voir page 48 première note. Nous dirons alternativement *le cercle de convergence des constantes* $F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(n)}(a), \dots$ ou encore *le cercle des constantes* $F^{(1)}(a), \dots, F^{(n)}(a), \dots$.

On voit que la série de TAYLOR

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} F^{(k)}(a) \cdot (x-a)^k$$

a une étoile de convergence C (le cercle de convergence) tel que la série, en étant uniformément convergente pour chaque domaine en dedans de C ne converge jamais en dehors de C .

Existe-t-il pour la série générale

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_1| |\lambda_2| \cdots |\lambda_n|} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)} \left(\frac{x-a}{n} \right)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n}$$

un domaine de convergence de ce même caractère?

Nous verrons, les constantes $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ..., $F^{(n)}(a)$, ... étant prises d'une manière quelconque que ce n'est pas le cas, sauf pour $n=1, 2, 3$, mais que d'un autre côté on pourra former une nouvelle série n fois infinie qui pour n suffisamment grand représente $FA(x)$ dans un domaine quelconque à l'intérieur de A et qui, tout en embrassant comme cas special la série de TAYLOR, possède encore la propriété d'avoir un domaine de convergence de la nature que nous avons indiquée.

En effet, supposons que la série (5) soit convergente pour $x = x'$.

Mettons $\xi' = \frac{x' - a}{n}$; $\xi'_n = a + \mu \xi'$. Chacune des séries

$$\sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|} F^{(\lambda_1+\dots+\lambda_n)}(a) \xi'^{\lambda_n}, \quad \sum_{\lambda_{n-1}=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{n-1}|} F^{(\lambda_1+\dots+\lambda_{n-1})}(\xi'_1) \xi'^{\lambda_{n-1}}, \quad \dots, \quad \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_1|} F^{(\lambda_1)}(\xi'_{n-1}) \xi'^{\lambda_1}$$

étant convergente, il y a évidemment une branche fonctionnelle qui coïncide dans les environs de $x = a$ avec $FA(x)$ et qui reste uniforme et régulière à l'intérieur d'un domaine C' formé par l'ensemble des différents points qui appartiennent aux cercles ayant pour centre ξ'_n ; $\mu = 0, 1, 2, \dots, n-1$, et pour rayon $|\xi'|$. Soit maintenant x'' un point situé entre a et x' sur le vecteur partant de a et passant par x' . Faisons

$$\xi'' = \frac{x'' - a}{n}, \quad \xi''_n = a + \mu \xi''$$

et désignons par C'' l'ensemble des différents points appartenant aux cercles ayant pour centre ξ''_n et pour rayon $|\xi''|$. On voit que C'' est toujours

situé à l'intérieur de C' si la distance minimum entre ξ''_{n-1} et la frontière de C' reste plus grande que $|\xi''|$, mais que C'' sort en partie de C' sitôt que cela n'a pas lieu. Le premier cas arrive toujours pour $n=1, 2, 3$, le second peut toujours arriver pour $n > 3$ par l'effet d'un choix convenable de x'' .

Donc on aura évidemment le théorème suivant:

La série n fois infinie

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_1| |\lambda_2| \cdots |\lambda_n|} F^{(\lambda_1+\dots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\dots+\lambda_n}$$

dans le cas général où les $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ..., $F^{(n)}(a)$ sont des constantes quelconques remplissant la condition de Cauchy, se comporte quant à la convergence d'une manière différente pour $n=1, 2, 3$ et pour $n > 3$.

Dans le premier cas il existe un domaine de convergence K tel que la série est uniformément convergente pour chaque domaine à l'intérieur de K , mais cesse de converger pour chaque point situé en dehors de K . On obtient ce domaine de convergence K en construisant l'étoile $E^{(n)}$ par rapport à A (voir page 191). Dans le second cas au contraire la série (5) ne possède pas un pareil domaine de convergence K . Par l'effet d'un choix convenable des éléments $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ..., $F^{(n)}(a)$, ... il pourra arriver que la série converge en un point x' sans être convergente en un autre point x'' situé sur le vecteur entre a et x' .

Avant d'aborder la question de former, au lieu de (5), une autre série qui, pour toutes les valeurs de n , les $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ..., $F^{(n)}(a)$... étant quelconques, garde la propriété de posséder un domaine de convergence K comme celui que nous avons obtenu jusqu'ici seulement pour les cas $n=1, 2, 3$, nous ferons l'observation suivante.

Il est vrai que l'étoile $E^{(n)}$ ($n > 3$) prise par rapport à A n'est pas un domaine de convergence K dans le cas général où les $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ..., $F^{(n)}(a)$, ... sont des constantes quelconques assujetties à la condition de CAUCHY. Mais ces constantes étant choisies d'une manière spéciale, il arrive, même dans des cas très généraux, que l'étoile $E^{(n)}$ garde, pour toutes les valeurs de n , sa propriété d'être un domaine de convergence K .

Supposons par exemple le choix de ces éléments tel que l'étoile A n'ait qu'un seul sommet fini, soit $x=b$. Supposons de plus, pour sim-

plifier, que b soit un nombre réel positif et que le centre de l'étoile \mathcal{A} soit zéro. On aura évidemment pour résultat que l'étoile $E^{(n)}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) prise par rapport à \mathcal{A} est dans ce cas un domaine de convergence tel que celui que nous avons désigné par K . Vu le rôle central qu'on pourra dans la théorie générale de la représentation analytique d'une fonction monogène faire jouer à la fonction

$$\frac{1}{1-x}$$

qui n'est qu'une fonction appartenant à une telle étoile \mathcal{A} à un seul sommet fini, il ne sera pas sans intérêt d'exécuter pour le cas d'une étoile \mathcal{A} à un seul sommet b la construction des étoiles $E^{(n)}$.

On le fait aisément de la manière suivante. Soit l un vecteur quelconque, et désignons par ξ, η les coordonnées d'un point sur l qui appartient à $E^{(n)}$. Posons

$$\xi = nu; \quad \eta = nv.$$

La définition géométrique que nous avons donnée de $E^{(n)}$ pourra se transformer en la définition arithmétique que voici:

$$(nu - b)^2 + m^2v^2 > b^2 > u^2 + v^2; \quad m = 1, 2, \dots, n-1.$$

On aura donc

$$\xi \leq n \frac{b}{2},$$

$$\left(\xi - \frac{mb}{m^2-1} \right)^2 + \eta^2 > \left(\frac{nb}{m^2-1} \right)^2.$$

L'étoile $E^{(n)}$ devient la partie de l'intérieur d'un cercle ayant zéro pour centre et nb pour rayon qui se trouve, en même temps, à gauche et de la ligne droite menée perpendiculairement à l'axe réel par le point $x = n \frac{b}{2}$ et des circonférences ayant pour centres $\frac{mb}{m^2-1}$ et pour rayons $\frac{nb}{m^2-1}$; $m = 2, 3, \dots, n-1$. Les cas $n = 1, 2, 3, 4, 5$ se trouvent dessinés sur la planche jointe à cette note.

Revenons au problème qui consiste à former, au lieu de (5), une autre série n fois infinie qui possède toujours, les $F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(n)}(a), \dots$ étant des constantes quelconques remplissant la condition de CAUCHY,

un domaine de convergence K tel que la série en ne convergeant jamais en dehors de K soit uniformément convergente pour chaque domaine à l'intérieur de K .

Soit E une étoile de centre a . Nous construirons par rapport à E une nouvelle étoile $E^{(1)}_{(n)}$ de la manière suivante. Fixons un vecteur l issu du centre a . Construisons un système de n circonférences ayant leurs centres $a, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$ sur l et dont chacune passera toujours par le centre de la précédente. Nous désignerons les rayons par $r, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$. Les centres $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ seront choisis d'une manière telle que chaque circonférence coupera la précédente aux points où elle sera rencontrée par les droites issues du point a qui lui sont tangentes, et que l'on ait $|\eta_1 - a| = r_1 = r$. Il est évident que le rayon r étant pris suffisamment petit notre système de cercles fera toujours partie de E . C'est en portant sur l la longueur $|\eta_{n-1} - a| + r_{n-1}$; en substituant à r sa limite supérieure ρ , et en faisant tourner l une fois autour de a que nous obtenons $E^{(1)}_{(n)}$.

Le domaine formé par les différents points du système de cercles que nous avons construit autour de l possède la propriété importante que le domaine correspondant à r' , r' étant une valeur de r plus petite que r'' , est toujours situé à l'intérieur du domaine construit par rapport à r'' . L'inconvénient qui existait dans l'étoile qui était désignée auparavant par $E^{(n)}$ a donc disparu et $E^{(1)}_{(n)}$ étant construit par rapport à l'étoile A , on voit, par les mêmes considérations que celles employées précédemment, que la série n fois infinie

$$(6) \quad \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \sum_{\lambda_3=0}^{\infty} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_1| |\lambda_2| |\lambda_3| \dots |\lambda_n|} \\ \times F^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n)}(a | \eta_{n-1} \dots \eta_{n-2} | \eta_{n-2} - \eta_{n-3} | \dots | \eta_1 - a)^n$$

où

$$(7) \quad x = \eta_{n-1} + (\eta_{n-1} - \eta_{n-2}) = 2\eta_{n-1} - \eta_{n-2}$$

est uniformément convergente pour chaque domaine à l'intérieur de $A^{(1)}_{(n)}$,

et que si la série converge pour un point x ce point ne pourra jamais être situé en dehors de $A^{(\frac{1}{n})}$.

La définition géométrique que nous avons donnée de $A^{(\frac{1}{n})}$ nous montre encore d'une manière immédiate que $A^{(\frac{1}{n})}$ est inscrite dans l'étoile principale A , et que pour $n' > n$ l'étoile $A^{(\frac{1}{n})}$ est inscrite dans l'étoile $A^{(\frac{1}{n'})}$.¹

Nous voulons maintenant exprimer les quantités $\gamma_1 \dots \gamma_{n-1}$ d'une manière arithmétique en fonction de la variable x . Désignons par α_μ l'angle comprise entre le vecteur l et la tangente menée de a à la circonférence ayant γ_μ pour centre. Nous aurons

$$(8) \quad \begin{cases} r_{\mu+1} = (r_1 + r_2 + \dots + r_{\mu+1}) \sin \alpha_{\mu+1}, \\ r_\mu = (r_1 + r_2 + \dots + r_\mu) \sin \alpha_\mu, \\ 2r_{\mu+1} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \alpha_{\mu+1} \right) = r_\mu. \end{cases}$$

D'où

$$\frac{r_{\mu+1}}{r_\mu} = \frac{\sin \alpha_{\mu+1}}{1 - \sin \alpha_{\mu+1}} \cdot \frac{1}{\sin \alpha_\mu} = \frac{1}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \alpha_{\mu+1} \right)}.$$

Par conséquent, en vertu de

$$(9) \quad \begin{cases} 1 - \sin \alpha_{\mu+1} = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \alpha_{\mu+1} \right), \\ \sin \alpha_{\mu+1} = -\frac{1}{4} \sin^2 \alpha_\mu + \frac{1}{4} \sin \alpha_\mu \sqrt{8 + \sin^2 \alpha_\mu} \\ \sin \alpha_1 = 1 \end{cases}$$

¹ Remarquons encore qu'il existe évidemment une infinité de solutions au problème géométrique que nous avons résolu par la construction de l'étoile $A^{(\frac{1}{n})}$. On pourra employer d'autres systèmes de n cercles, et on pourra aussi employer des systèmes d'autres figures que le cercle.

L'essentiel pour nous est de montrer qu'il existe des séries n fois infinies qui sont la généralisation directe de la série de TAYLOR et qui possèdent une vraie étoile de convergence plutôt que d'étudier une forme spéciale de parcellles séries.

Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. 199
c'est à dire

$$\sin \alpha_1 = 1,$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{1}{2},$$

$$\sin \alpha_3 = \frac{\sqrt{33}-1}{16}$$

et ainsi de suite.

Faisons encore l'observation qu'ayant une fois obtenu $\sin \alpha_{\mu+1}$ par la formule (9), le rayon $r_{\mu+1}$ s'obtient par la formule:

$$\frac{r_{\mu+1}}{r_{\mu}} = \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha_{\mu}}{\sin \alpha_{\mu+1}}$$

ou

$$r_{\mu+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu} \frac{r}{\sin \alpha_{\mu+1}}.$$

Le calcul de $\eta_{\mu+1} - \eta_{\mu}$ se fait immédiatement. On a

$$\begin{aligned} \frac{\eta_{\mu+1} - \eta_{\mu}}{x - a} &= \frac{r_{\mu+1}}{r_1 + r_2 + \dots + r_{n-1} + r_{n-1}} = \frac{r_{\mu+1}}{r_{n-1}} \cdot \frac{r_{n-1}}{r_1 + r_2 + \dots + r_{n-1} + r_{n-1}} \\ &= \frac{2^{n-\mu-2} \sin^2 \alpha_{n-1}}{(1 + \sin \alpha_{n-1}) \sin \alpha_{\mu+1}}. \end{aligned}$$

La série (6) devient par conséquent

$$(10) \quad \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} c_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} I^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)}(a) \cdot (x - a)^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}$$

où

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} c_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} &= \\ &\left(\frac{\sin^2 \alpha_{n-1}}{1 + \sin \alpha_{n-1}} \right)^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} \cdot \frac{\left(\frac{1}{\sin \alpha_{n-1}} \right)^{\lambda_1 + \lambda_2}}{|\lambda_1| |\lambda_2|} \cdot \frac{\left(\frac{2}{\sin \alpha_{n-2}} \right)^{\lambda_3}}{|\lambda_3|} \cdot \frac{\left(\frac{2^2}{\sin \alpha_{n-3}} \right)^{\lambda_4}}{|\lambda_4|} \dots \\ &\dots \frac{\left(\frac{2^{n-2}}{\sin \alpha_{n-1-n}} \right)^{\lambda_n}}{\lambda_n} \dots \frac{(2^{n-2})^{\lambda_{n-1} + \lambda_n}}{|\lambda_{n-1}| |\lambda_n|}, \\ c_{\lambda_1} &= \frac{1}{|\lambda_1|}. \end{aligned} \right.$$

Elle aura une étoile de convergence $A^{(\frac{1}{n})}$ telle que la série converge uniformément pour chaque domaine à l'intérieur de $A^{(\frac{1}{n})}$ mais ne converge jamais en dehors de $A^{(\frac{1}{n})}$. Cette étoile $A^{(\frac{1}{n})}$ est inscrite dans l'étoile principale des constantes $F(a), F^{(1)}(a), F^{(2)}(a), \dots$, et, pour $n \geq \bar{n}$, le nombre entier positif \bar{n} étant pris suffisamment grand, elle renferme elle-même à son intérieur un domaine quelconque fini appartenant à l'intérieur de A .

L'étoile $A^{(\frac{1}{n})}$ est encore inscrite dans l'étoile $A^{(\frac{1}{n'})}$ tant que $n < n'$.
L'égalité

$$(12) \quad FA^{(\frac{1}{n})}(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} c_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} F^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)}(a) \cdot (x - a)^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}$$

a lieu partout à l'intérieur de $A^{(\frac{1}{n})}$. Pour $n = 1$ la série devient la série de Taylor.

On pourra facilement transformer les séries n fois infinies qui ont été employées dans cet article en des séries simples qui conservent en partie les mêmes propriétés. En effet en employant les mêmes considérations que dans notre première note on obtient facilement la proposition suivante:

Soient $F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(n)}(a), \dots$, une suite de constantes assujetties à la condition de Cauchy, et soit l'étoile A de centre a l'étoile principale de ces constantes. Désignons par $G_m^{(n)}(x|a)$ le polynôme en x

$$\sum_{\lambda_1=0}^{m_1} \sum_{\lambda_2=0}^{m_2} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{m_n} \frac{1}{|\lambda_1| |\lambda_2| \dots |\lambda_n|} F^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)}(a) \cdot \left(\frac{x - a}{n}\right)^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}.$$

Il existe une étoile A_n inscrite dans A qu'on obtient en employant la construction qui a été indiquée page 191 (pour former $E^{(n)}$ par rapport à E) et qui possède par rapport à l'expression limite $\lim_{m \rightarrow \infty} G_m^{(n)}(x|a)$ la propriété suivante:

Cette expression converge uniformément pour chaque domaine à l'intérieur de A_n et représente en même temps $FA_n(x)$.

On obtient le même énoncé en substituant à A_n l'étoile qu'on obtient par la construction de la page 197, si l'on substitue en même temps aux coeffi-

cients $\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} \cdot \binom{1}{n}^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}$ les coefficients $c_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$ donnés par les formules (11) et (9).

Il y a une différence importante entre l'expression limite $\lim_{m \rightarrow \infty} G_m^{(n)}(x|a)$ et l'expression limite $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x|a)$ dont nous avons parlé au commencement de cette note. Cette dernière expression ne pouvait jamais être uniformément convergente pour un continuum embrassant un sommet de l'étoile A . Pour l'expression limite $\lim_{m \rightarrow \infty} G_m^{(n)}(x|a)$ au contraire nous pouvons seulement affirmer ceci: c'est qu'elle ne sera jamais uniformément convergente pour un continuum embrassant un sommet de A_n qui serait en même temps un sommet de A .

Quant aux imperfections que nous avons signalées pour l'expression limite $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x|a)$, elles existent évidemment *a fortiori* pour les expressions $\lim_{n \rightarrow \infty} G_m^{(n)}(x|a)$.

L'inconvénient essentiel de $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x|a)$ comme expression de la branche fonctionnelle $FA(x)$ était que cette expression pouvait avoir un sens en dehors de l'étoile A sans toutefois représenter un prolongement de cette branche.

C'est une imperfection qui n'existe plus pour les expressions

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} c_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} F^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)}(a) \cdot (x - a)^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}$$

par rapport aux étoiles $A^{(\frac{1}{n})}$.

En étendant un peu la définition d'expression limite donnée au commencement de cette note, on aura pour la branche $FA(x)$ une représentation analytique ayant les mêmes propriétés que celles trouvées pour les expressions qui représentent $FA^{(\frac{1}{n})}(x)$.

En effet:

Pour un nombre infini de valeurs de α soit $f_\alpha(x, y, z, \dots)$ une fonction des variables x, y, z, \dots , définie d'une manière univoque à l'intérieur d'un

Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. 203

domaine K_α faisant lui-même partie d'un domaine K dont il se rapproche indéfiniment quand α se rapproche d'un point limite α_0 .

Supposons, x, y, z, \dots , étant un point donné à l'intérieur de K , qu'à chaque nombre positif σ corresponde un autre nombre positif δ tel que les fonctions $f_\alpha(x, y, z, \dots)$, $f_{\alpha'}(x, y, z, \dots)$ aient un sens et qu'on ait $|f_{\alpha'} - f_\alpha| < \sigma$ tant que $|\alpha' - \alpha_0| < \delta$, $|\alpha'' - \alpha_0| < \delta$. Le symbole

$$\lim_{\alpha = \alpha_0} f_\alpha(x, y, z, \dots)$$

possède alors pour chaque point à l'intérieur de K un sens parfaitement déterminé.

On dit que $\lim_{\alpha = \alpha_0} f_\alpha(x, y, z, \dots)$ converge au point x, y, z, \dots .

Quand on a $\alpha_0 = \infty$ on remplacera $|\alpha' - \alpha_0| < \delta$, $|\alpha'' - \alpha_0| < \delta$ par les inégalités $\left| \frac{1}{\alpha'} \right| < \delta$, $\left| \frac{1}{\alpha''} \right| < \delta$.

Quand on a l'inégalité $|f_{\alpha'} - f_{\alpha''}| < \sigma$ pour un domaine X à l'intérieur de K , on dit que l'expression limite $\lim_{\alpha = \alpha_0} f_\alpha(x, y, z, \dots)$ converge uniformément pour ce domaine.

La définition s'étend immédiatement à des expressions limites multiples. Il faut alors avoir égard aux observations que nous avons faites au sujet des séries multiples.

Rappelons encore la notion de l'étoile de convergence qui a été introduite dans cette note.

C'est lorsqu'entre une expression limite et une étoile K il y a un rapport tel que l'expression limite converge uniformément pour chaque domaine à l'intérieur de K , mais ne converge jamais pour un point en dehors de K , que nous avons désigné l'étoile K comme l'étoile de convergence de l'expression limite.

On peut maintenant énoncer le théorème suivant:

Théorème I. b. Soient $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, \dots , $F^{(n)}(a)$, \dots une suite de constantes assujetties à la condition de Cauchy, et soit A l'étoile principale de ces constantes. Soit encore

$$S_n(x, a) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} c_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} F^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)}(a) \cdot (x - a)^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}$$

une série n fois infinie où $c_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$ désigne certains coefficients numériques indépendants des constantes $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, \dots , $F^{(j)}(a)$, \dots ainsi que de a et de x .

On pourra toujours déterminer ces coefficients en sorte que l'expression limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x|a)$$

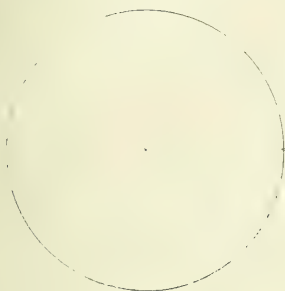
possède l'étoile A pour étoile de convergence et en même temps représente à l'intérieur de A la branche fonctionnelle $FA(x)$.

On s'est beaucoup occupé dans ces derniers temps de donner un sens aux séries divergentes. Il s'agit surtout alors de la série de TAYLOR qu'on veut définir en dehors de son cercle de convergence. C'est un problème qui est déjà résolu dans un certain sens par la conception du prolongement analytique. Ce problème est résolu dans une autre direction par nos différents théorèmes.

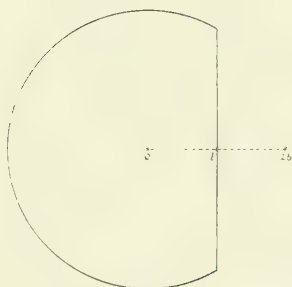
Nous désirons ici attirer tout particulièrement l'attention sur les deux théorèmes de cette deuxième note. En effet, il s'agit pour nous non seulement de trouver une expression analytique représentant la fonction dans un domaine qui varie depuis C jusqu'à A mais encore de trouver une expression qui, tout en étant valable à l'intérieur de ce domaine cesse de converger en dehors du domaine.

Nous donnerons dans des notes suivantes des méthodes pour résoudre ce problème au moyen d'expressions d'une nouvelle nature.

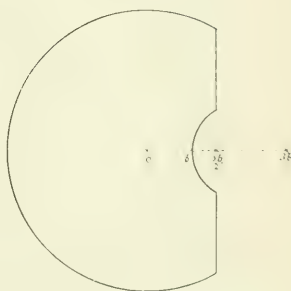
$n = 1$



$n = 2$



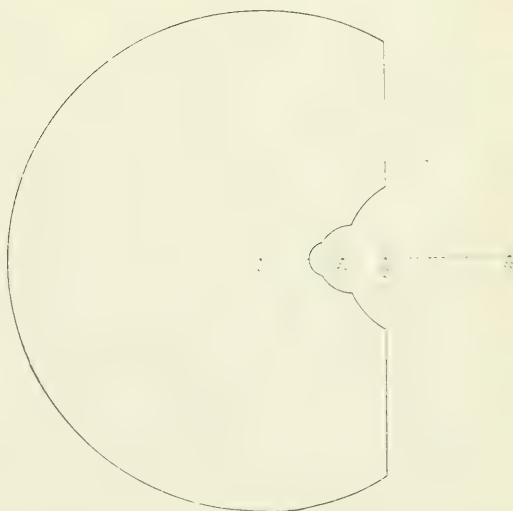
$n = 3$



$n = 4$



$n = 5$



ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

JOURNAL

HERAUSGEGEBEN

RÉDIGÉ

VON

PAR

250
701

G. MITTAG-LEFFLER

M.

24: 3 & 4

STOCKHOLM

BEIJERS BOKFÖRLAGSAKTIEBOLAG.

1901.

BERLIN

MAYER & MÜLLER.

PRINZ LUDWIG FERDINANDSTRASSE 2.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

PARIS

A. HERMANN.

6 RUE DE LA SORBONNE.

REDACTION

SVERIGE:

A. V. BÄCKLUND, Lund.
A. LINDSTEDT, Stockholm.
G. MITTAG-LEFFLER, »
E. PHRAGMÉN, »

NORGE:

C. A. BJERKNES, Christiania.
ELLING HOLST, »
S. LIE, Leipzig.
L. SYLOW, Frederikshald.

DANMARK:

J. PETERSEN, Kjöbenhavn.
H. G. ZEUTHEN, »

FINLAND:

L. LINDELÖF, Helsingfors.

SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE D'UNE BRANCHE UNIFORME
D'UNE FONCTION MONOGENE
(Troisième note)

PAR

G. MITTAG-LEFFLER.

Après la première note imprimée dans ce journal (15 mars 1899), nous avons publié sur le même sujet dans les Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris (15 mai 1899) une communication¹ où à nos théorèmes 1 et 2 nous en avons ajouté un nouveau.

¹ A notre première note ainsi qu'à cet article se rattachent les travaux suivants:

EMILE BOREL. *Addition au mémoire sur les séries divergentes.* (Annales de l'école normale. Série 3. Tome 16. Page 132.)

PAUL PAINLEVÉ. *Sur le développement d'une branche uniforme de fonction analytique.* (Comptes rendus etc. 23 mai 1899.)

EMILE BOREL. *Sur le calcul des séries de Taylor à rayon de convergence nul.* (Comptes rendus etc. 23 mai 1899.)

EMILE PICARD. *Sur les développements en série des intégrales des équations différentielles par la méthode de Cauchy-Lipschitz.* (Comptes rendus etc. 5 juin 1899.)

E. PHRAGMÉN. *Sur une extension d'un théorème de M. Mittag-Leffler.* (Comptes rendus etc. 12 juin 1899.)

PAUL PAINLEVÉ. *Sur le calcul des intégrales des équations différentielles par la méthode de Cauchy-Lipschitz.* (Comptes rendus etc. 19 juin 1899.)

PAUL PAINLEVÉ. *Sur le développement d'une branche uniforme de fonction analytique en série de polynômes.* (Comptes rendus etc. 3 juillet 1899.)

L. LEAU. *Représentation des fonctions par des séries de polynômes.* (Bulletin de la société mathématique de France, t. 27. Page 194—200.)

PAUL PAINLEVÉ. *Sur le développement des fonctions analytiques de plusieurs variables.* (Comptes rendus etc. 10 juillet 1899.)

EMILE PICARD. *Lectures on Mathematics.* (Clark University Decennial Celebration, 1899) page 246.

² *Acta mathematica*. 24. Imprimé le 1 août 1900.

Nous avons en outre, dans la seconde note de ce journal, appris à former toute une classe d'expressions limite qui embrasse la série de TAYLOR et dont chaque cas possède une étoile de convergence. Cette étoile est inscrite dans l'étoile principale des constantes $F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(n)}(a), \dots$ et elle est circonscrite au cercle de ces constantes. En augmentant suffisamment un certain nombre entier positif n qui est intimement lié à l'étoile, on fait tendre celle-ci indéfiniment vers l'étoile principale. Pour $n=1$ elle coïncide avec le cercle. En faisant croître n au delà de toute limite, on obtient une expression limite ayant l'étoile principale même pour étoile de convergence.

Dans le nouveau théorème des Comptes rendus nous avons affirmé l'existence d'une autre classe d'expression limites ayant cette même propriété. Au lieu du nombre entier n il y entre un paramètre réel et continu α de sorte qu'on peut faire varier l'étoile de convergence d'une manière continue entre le cercle et l'étoile principale.

Nous voulons dans cette troisième note montrer comment on peut former ces nouvelles expressions limite. Nous établirons en même temps deux nouveaux théorèmes et nous formerons une nouvelle expression limite pour laquelle l'étoile principale A des constantes $F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(n)}(a), \dots$ est une étoile de convergence.

Comme dans la première note, soit \mathfrak{E} une étoile quelconque de centre a . Nous définirons par rapport à \mathfrak{E} une nouvelle étoile $\mathfrak{E}^{(\alpha)}$ de la manière suivante.

Considérons la représentation conforme définie par la relation

$$(1) \quad v = e^{\int_1^u \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\beta} \frac{du}{u}}$$

EMILE BOREL. *Sur la généralisation du prolongement analytique.* (Comptes rendus etc. 23 avril 1900.)

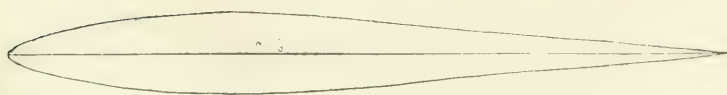
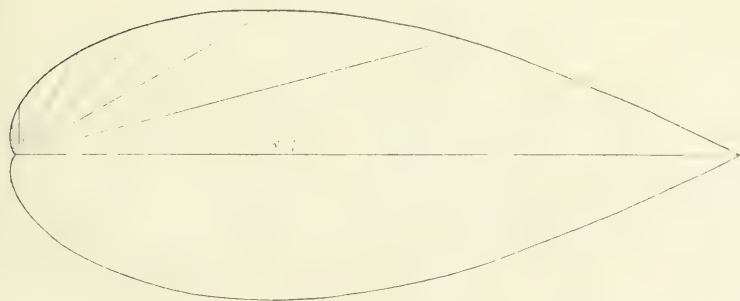
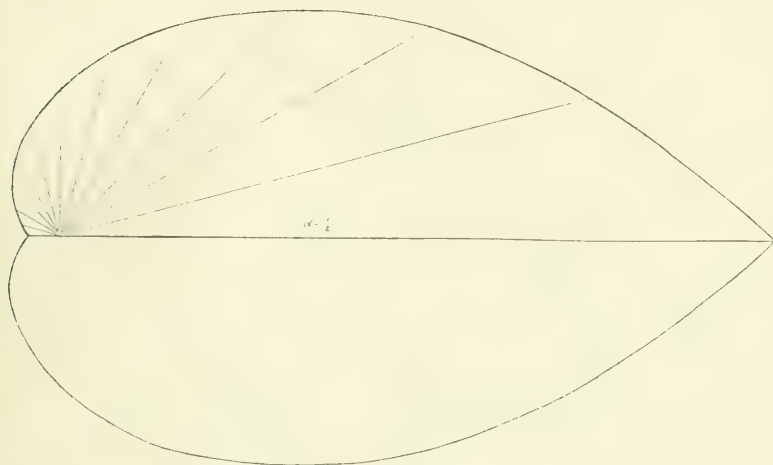
LE ROY. *Sur les séries divergentes.* (Comptes rendus etc. 14 mai 1900.)

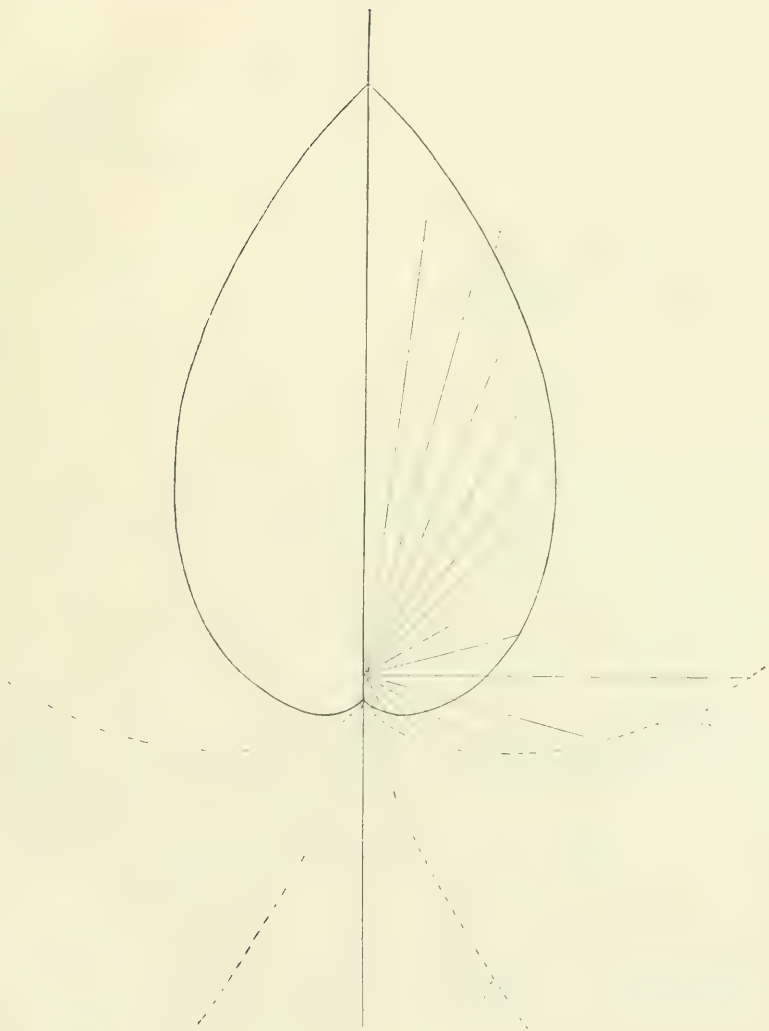
Voir encore mes articles:

Sulla rappresentazione analitica di un ramo uniforme di una funzione monogena. Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. Vol. 34. 23 Aprile 1899.

On the analytical representation of a uniform branch of a monogenic function. Cambridge Philosophical Transactions. Vol. 18.

Un mémoire développé sur le même sujet par M. E. BOREL paraîtra prochainement dans ce journal sous le titre: *Sur les séries de polynômes et de fonctions rationnelles.*





où β désigne une quantité réelle remplissant la condition

$$(2) \quad 0 \leq \beta < 1.$$

Faisons décrire à u une circonférence ayant pour centre l'origine et pour rayon l'unité.

Posons, pour $0 \leq \varphi \leq \pi$

$$u = e^{i\varphi}.$$

On aura

$$\int_1^u \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta \frac{du}{u} = -\sin \beta \frac{\pi}{2} \int_0^\varphi \left(\cotg \frac{\varphi}{2} \right)^\beta d\varphi + i \cos \beta \frac{\pi}{2} \int_0^\varphi \left(\cotg \frac{\varphi}{2} \right)^\beta d\varphi.$$

Posons encore, pour $0 \leq \varphi \leq \pi$

$$u = e^{-i\varphi}.$$

On aura

$$\int_1^u \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta \frac{du}{u} = -\sin \beta \frac{\pi}{2} \int_0^\varphi \left(\cotg \frac{\varphi}{2} \right)^\beta d\varphi - i \cos \beta \frac{\pi}{2} \int_0^\varphi \left(\cotg \frac{\varphi}{2} \right)^\beta d\varphi.$$

On a encore¹

$$\int_0^\pi \left(\cotg \frac{\varphi}{2} \right)^\beta d\varphi = \int_0^\pi \left(\tg \frac{\varphi}{2} \right)^\beta d\varphi = -\frac{\pi}{\cos \beta \frac{\pi}{2}},$$

Par suite, quand u parcourt à partir de $u = 1$ jusqu'à $u = -1$ la partie supérieure de la circonférence ayant pour centre l'origine et pour rayon l'unité, la quantité

$$v = Re^{i\varphi}$$

décrit un arc de spirale logarithmique défini par l'équation

$$R = e^{-i\beta \frac{\pi}{2} \cdot \varphi}; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

¹ Voir p. ex. BERTRAND, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*. Calcul intégral, page 125.

Cette spirale logarithmique a pour centre le point $v = 0$, et coupe l'axe des v réels aux deux points:

$$v = 1 \quad \text{et} \quad v = -e^{-\pi \lg \beta \frac{\pi}{2}}.$$

D'autre part, quand u parcourt à partir de $u = 1$ jusqu'à $u = -1$, la partie inférieure de la même circonférence,

$$v = Re^{i\varphi}$$

décrit un nouvel arc de spirale

$$R = e^{\frac{1+\beta}{2} \frac{\pi}{\beta} \varphi}; \quad 0 \leq \varphi \leq -\pi;$$

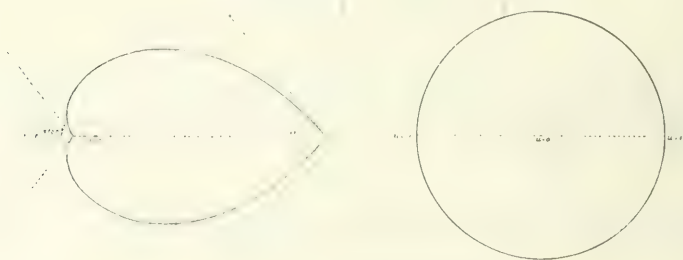
symétrique au premier par rapport à l'axe réel.

La relation (1) peut s'écrire:

$$(3) \quad v = ue^i \int_1^u \left[\left(\frac{1+n}{1-n} \right)^{\beta} - 1 \right] \frac{du}{u}.$$

On voit donc immédiatement que l'intérieur du cercle correspond à l'intérieur de la figure cordiforme limitée par les deux arcs de spirale, de manière que le centre du cercle $u = 0$ correspond au centre de la figure cordiforme $v = 0$. Mettons

$$(4) \quad \beta = 1 - \alpha.$$



Les deux arcs limitant la figure cordiforme se coupent au point $v = 1$ sous l'angle intérieur $\alpha\pi$ et au point $v = -e^{-\pi \lg \beta \frac{\pi}{2}}$ sous l'angle intérieur $(2 - \alpha)\pi$.

Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. 209

Nous ferons encore la remarque suivante. La figure cordiforme est située à l'intérieur d'un rectangle dont les deux côtés passant par les points

$$v = -e^{-\frac{(1+\alpha)\pi}{2\lg\alpha\frac{\pi}{2}} \cdot \sin\alpha\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad v = +1$$

sont perpendiculaires à l'axe réel et dont les deux autres côtés passant par

$$v = ie^{-\frac{2\pi}{2\lg\alpha\frac{\pi}{2}} \cdot \sin\alpha\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad v = -ie^{-\frac{2\pi}{2\lg\alpha\frac{\pi}{2}} \cdot \sin\alpha\frac{\pi}{2}}$$

sont parallèles à ce même axe.



Remarquons d'ailleurs qu'au point où la tangente verticale touche la figure en question le rayon vecteur, lorsque α tend vers zéro, se rapproche indéfiniment de la verticale menée par le centre.

On voit qu'on peut, en faisant décroître suffisamment la constante α , faire tendre indéfiniment le contour de la figure précitée vers la ligne droite menant de $v=0$ à $v=1$. Nous avons reproduit (planche I) trois cas différents de la figure cordiforme.

Il est important pour ce qui suit de connaître le développement de v^m suivant les puissances positives de u , m étant un entier positif.

Posons

$$(5) \quad v = ue^{-\int_0^1 \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u}} \cdot e^{\int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u}},$$

$$(6) \quad e^{m \int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u}} = \left[1 + \frac{h_1^{(m)}(\beta)}{1} u + \frac{h_2^{(m)}(\beta)}{2} u^2 + \dots + \frac{h_\lambda^{(m)}(\beta)}{\lambda} u^\lambda + \dots \right].$$

Nous verrons que $h_\lambda^{(m)}(\beta)$ est une fonction entière rationnelle de β de degré λ qui s'annule pour $\beta = 0$. C'est une fonction impaire, quand λ est un nombre impair, et c'est une fonction paire quand λ est un nombre pair. Le coefficient de β^μ ($\mu = 1, 2, \dots, \lambda$) est un polynôme en m de degré μ à coefficients rationnels positifs qui s'annule pour $m = 0$.

Différentiations en effet (6) par rapport à u ; on obtient:

$$m \left(1 + \frac{h_1^{(m)}(\beta)}{1} u + \frac{h_2^{(m)}(\beta)}{2} u^2 + \dots + \frac{h_\lambda^{(m)}(\beta)}{\lambda} u^\lambda + \dots \right) \cdot \left(\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right) \\ = h_1^{(m)}(\beta) \cdot u + \frac{h_2^{(m)}(\beta)}{1} u^2 + \frac{h_3^{(m)}(\beta)}{2} u^3 + \dots + \frac{h_\lambda^{(m)}(\beta)}{\lambda} u^\lambda + \dots$$

Par suite en faisant

$$(7) \quad \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] = g_1(\beta)u + g_2(\beta)u^2 + g_3(\beta)u^3 + g_4(\beta)u^4 + \dots$$

on aura

$$(8) \quad \frac{1}{\lambda-1} h_\lambda^{(m)}(\beta) \\ = m \left(\frac{1}{\lambda-1} h_{\lambda-1}^{(m)}(\beta) g_1(\beta) + \frac{1}{\lambda-2} h_{\lambda-2}^{(m)}(\beta) g_2(\beta) + \dots + \frac{1}{1} h_1^{(m)}(\beta) + g_\lambda(\beta) \right).$$

En différenciant (7) ν fois par rapport à β on aura:

$$\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta \left(\log \frac{1+u}{1-u} \right)^\nu = \sum_{(\lambda)} \frac{d^\nu g_\lambda(\beta)}{d\beta^\nu} u^\lambda$$

et par conséquent:

$$(9) \quad \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta \left(\frac{1}{2u} \log \frac{1+u}{1-u} \right)^\nu = \sum_{(\lambda)} \frac{d^{(\nu)} g_\lambda(\beta)}{d(2\beta)^\nu} u^{\lambda-\nu}.$$

On a:

$$\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta \left(\frac{1}{2u} \log \frac{1+u}{1-u} \right)^\nu = 1 + u\mathfrak{P}(u); \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Donc

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{d^\nu g_\lambda(\beta)}{d(2\beta)^\nu} = 0; & \nu > \lambda \\ \frac{d^\lambda g_\lambda(\beta)}{d(2\beta)^\lambda} = 1. \end{cases}$$

On a encore en vertu de (7)

$$(11) \quad g_\lambda(0) = 0.$$

Par conséquent $g_\lambda(\beta)$ ($\lambda = 1, 2, \dots, \infty$) est une fonction entière rationnelle de β du degré λ qui s'annule pour $\beta = 0$.

Faisons maintenant

$$(12) \quad \left(\frac{1}{2u} \log \frac{1+u}{1-u} \right)^\nu = \sum_{\mu=0}^{\infty} (2\mu, \nu) u^{2\mu};$$

nous aurons en vertu de (9)

$$(13) \quad \begin{cases} \left(\frac{d^\nu g_\lambda(\beta)}{d(2\beta)^\nu} \right)_{\beta=0} = (\lambda - \nu, \nu); & \lambda - \nu = \text{nombre pair} \\ \left(\frac{d^\nu g_\lambda(\beta)}{d(2\beta)^\nu} \right)_{\beta=0} = 0; & \lambda - \nu = \text{nombre impair.} \end{cases}$$

Par conséquent

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} g_{2l+1}(\beta) &= \frac{(2\beta)^{2l+1}}{2l+1} + (2, 2l-1) \frac{(2\beta)^{2l-1}}{2l-1} + (4, 2l-3) \frac{(2\beta)^{2l-3}}{2l-3} + \dots \\ &\quad + (2l-2, 3) \frac{(2\beta)^3}{3} + (2l, 1) \frac{2\beta}{1}, \\ g_{2l+2}(\beta) &= \frac{(2\beta)^{2l+2}}{2l+2} + (2, 2l) \frac{(2\beta)^{2l}}{2l} + (4, 2l-2) \frac{(2\beta)^{2l-2}}{2l-2} + \dots \\ &\quad + (2l-2, 4) \frac{(2\beta)^4}{4} + (2l, 2) \frac{(2\beta)^2}{2} \end{aligned} \right. \\ (l = 0, 1, 2, \dots, \infty).$$

En invoquant alors la formule (8) nous voyons l'exactitude du théorème que nous venons d'énoncer au sujet de $h_l^m(\beta)$ comme fonction de β et de m .

On obtient les nombres rationnels

$$(2\mu, \nu + 1); \quad \left(\begin{matrix} \mu = 0, 1, 2, \dots, \infty \\ \nu = 1, 2, 3, \dots, \infty \end{matrix} \right)$$

par une formule de récurrence très simple. En différentiant (12) par rapport à u , on a

$$(\nu + 1) \left(\frac{1}{2u} \log \frac{1+u}{1-u} \right)^\nu \cdot \frac{1}{1-u^2} = \sum_{\mu=0}^{\nu} (\nu + 1 + 2\mu)(2\mu, \nu + 1) \cdot u^{2\mu}.$$

D'où

$$\begin{aligned} & (\nu + 1) \left(\frac{1}{2u} \log \frac{1+u}{1-u} \right)^\nu \\ &= \sum [(\nu + 1 + 2\mu)(2\mu, \nu + 1) - (\nu - 1 + 2\mu)(2\mu - 2, \nu + 1)] u^{2\mu}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\nu + 1 + 2\mu)(2\mu, \nu + 1) = (\nu + 1)(2\mu, \nu) + (\nu - 1 + 2\mu)(2\mu - 2, \nu + 1) \\ (0, \nu + 1) = 1, \quad (2\mu, 1) = \frac{1}{2\mu + 1} \\ \mu = 1, 2, \dots, \infty; \quad \nu = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right.$$

En faisant le calcul des sept premières fonctions $g_k(\beta)$ et $h_k^{(m)}(\beta)$ on trouve:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_1(\beta) = 2\beta, \\ g_2(\beta) = \frac{1}{2}(2\beta)^2, \\ g_3(\beta) = \frac{1}{3}(2\beta)^3 + \frac{1}{3}(2\beta), \\ g_4(\beta) = \frac{1}{4}(2\beta)^4 + \frac{1}{3}(2\beta)^2, \\ g_5(\beta) = \frac{1}{5}(2\beta)^5 + \frac{1}{6}(2\beta)^3 + \frac{1}{5}(2\beta), \\ g_6(\beta) = \frac{1}{6}(2\beta)^6 + \frac{1}{18}(2\beta)^4 + \frac{23}{90}(2\beta)^2, \\ g_7(\beta) = \frac{1}{7}(2\beta)^7 + \frac{1}{72}(2\beta)^5 + \frac{7}{45}(2\beta)^3 + \frac{1}{7}(2\beta), \\ \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & h_1^{(m)}(\beta) = m \cdot (2\beta), \\
 & h_2^{(m)}(\beta) = \left(m^2 + \frac{1}{2}m\right) \cdot (2\beta)^2, \\
 & h_3^{(m)}(\beta) = \left(m^3 + \frac{3}{2}m^2 + \frac{1}{3}m\right) \cdot (2\beta)^3 + \frac{2}{3} \cdot m \cdot (2\beta), \\
 & h_4^{(m)}(\beta) = \left(m^4 + 3m^3 + \frac{25}{12}m^2 + \frac{1}{4}m\right) \cdot (2\beta)^4 + 8\left(\frac{1}{3}m^2 + \frac{1}{4}m\right) \cdot (2\beta)^2, \\
 & h_5^{(m)}(\beta) = \left(m^5 + 5m^4 + \frac{85}{12}m^3 + \frac{35}{12}m^2 + \frac{1}{5}m\right) \cdot (2\beta)^5 \\
 & \quad + 20\left(\frac{1}{3}m^3 + \frac{2}{3}m^2 + \frac{1}{5}m\right) \cdot (2\beta)^3 + \frac{24}{5}m \cdot (2\beta), \\
 (17) \quad & h_6^{(m)}(\beta) = \left(m^6 + \frac{15}{2}m^5 + \frac{215}{12}m^4 + \frac{125}{8}m^3 + \frac{1507}{360}m^2 + \frac{1}{6}m\right) \cdot (2\beta)^6 \\
 & \quad + 40\left(\frac{1}{3}m^4 + \frac{5}{4}m^3 + \frac{391}{360}m^2 + \frac{1}{6}m\right) \cdot (2\beta)^4 \\
 & \quad + 184\left(\frac{187}{1035}m^2 + \frac{1}{6}m\right) \cdot (2\beta)^2, \\
 & h_7^{(m)}(\beta) = \left(m^7 + \frac{21}{2}m^6 + \frac{455}{12}m^5 + \frac{455}{8}m^4 + \frac{12187}{360}m^3 + \frac{371}{60}m^2 + \frac{1}{7}m\right) \\
 & \quad \times (2\beta)^7 + 70\left(\frac{1}{3}m^5 + 2m^4 + \frac{611}{180}m^3 + \frac{101}{60}m^2 + \frac{1}{7}m\right) \cdot (2\beta)^5 \\
 & \quad + 784\left(\frac{53}{315}m^3 + \frac{167}{420}m^2 + \frac{1}{7}m\right) \cdot (2\beta)^3 + \frac{720}{7}m \cdot (2\beta), \\
 & \dots \\
 & \dots
 \end{aligned}$$

On pourra employer comme moyen de contrôle la formule

$$(18) \quad \frac{h_\lambda^{(m)}(1)}{|\lambda|} = [(1-u)^{-2m}]_{u\lambda} = \frac{2m(2m+1) \dots (2m+\lambda-1)}{|\lambda|}.$$

Nous avons obtenu les coefficients des polynômes $g_k(\beta)$ par une formule de récurrence. Mais on peut aussi donner facilement une expression explicite de ces polynômes. En s'appuyant sur les formules

$$(4) \quad \beta = 1 - \alpha,$$

$$(2) \quad 0 \leq \beta < 1,$$

on aura

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\beta} \int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u} = \frac{1}{2\beta} \int_0^u \frac{(1+u)^\beta - (1-u)^\beta}{(1-u)^\beta} \frac{du}{u} \\ &= \int_0^u \frac{du}{(1-u)^\beta} \left[1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{3} u^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{5} u^4 + \dots \right] \\ &= u + \frac{\beta}{1} \cdot \frac{u^2}{2} + \left[\frac{\beta(\beta+1)}{2} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{3} \right] \frac{u^3}{3} + \left[\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3} + \frac{\beta}{1} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)}{3} \right] \frac{u^4}{4} \\ &+ \dots \\ &+ \left[\frac{\beta(\beta+1) \dots (\beta+2l-1)}{2l} + \frac{\beta(\beta+1) \dots (\beta+2l-3)}{2l-2} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)}{3} \right. \\ &+ \frac{\beta}{1} \cdot \frac{\beta+1}{2} \cdot \frac{\beta+2l-5}{2} \cdot \frac{\alpha+1}{3} \cdot \frac{\alpha+2}{3} \cdot \frac{\alpha+3}{3} + \dots + \frac{\beta}{2} \cdot \frac{\alpha+1}{3} \cdot \frac{\alpha+2}{3} \cdot \frac{\alpha+2l-3}{2l-1} \\ &\quad \left. + \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+2l-1)}{2l+1} \right] \frac{u^{2l+1}}{2l+1} \\ &+ \left[\frac{\beta(\beta+1) \dots (\beta+2l)}{2l+1} + \frac{\beta(\beta+1) \dots (\beta+2l-2)}{2l-1} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)}{3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta(\beta+1) \dots (\beta+2l-4)}{2l-3} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{5} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+2l-3)}{2l-1} + \frac{\beta}{1} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+2l-1)}{2l+1} \right] \frac{u^{2l+2}}{2l+2}. \end{aligned}$$

En comparant avec (7) on aura donc

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} g_{2l+1}(\beta) &= 2\beta \left[\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l-1)}{|2l|} + \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l-3)}{|2l-2|} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)}{|3|} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l-5)}{|2l-4|} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{|5|} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta(\beta+1)}{|2|} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+2l-3)}{|2l-1|} + \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2l-1)}{|2l+1|} \right], \\ g_{2l+2}(\beta) &= 2\beta \left[\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l)}{|2l+1|} + \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l-2)}{|2l-1|} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)}{|3|} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l-4)}{|2l-3|} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{|5|} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{|3|} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2l-3)}{|2l-1|} + \frac{\beta}{|1|} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2l-1)}{|2l+1|} \right]. \end{aligned} \right.$$

Revenons à la formule :

$$(5) \quad v = ue^{-\int_0^1 \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u}} \cdot e^{\int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u}}.$$

Nous voyons que la constante

$$(20) \quad \int_0^1 \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u},$$

qui dépend du choix de β , joue un rôle important dans la représentation conforme définie par l'égalité

$$(1) \quad v = e^{\int_1^u \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta \frac{du}{u}}.$$

Il y aurait donc intérêt à trouver une nouvelle expression en β pour cette constante. Une telle expression s'obtient facilement de la manière suivante :

On a :

$$\frac{1}{2\beta} \int_0^1 \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u} \\ - \int_0^1 \frac{du}{(1-u)^\beta} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 3} \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1-u)^\beta} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{1 \cdot 5} \int_0^1 \frac{u^4}{(1-u)^\beta} + \dots$$

En désignant par $B(a, b)$ l'intégrale Eulerienne de première espèce, on a

$$\int_0^1 \frac{du}{(1-u)^\beta} = B(1, \alpha),$$

$$\int_0^1 \frac{u^2 du}{(1-u)^\beta} = B(3, \alpha),$$

$$\int_0^1 \frac{u^4 du}{(1-u)^\beta} = B(5, \alpha),$$

.....
.....

A cause des formules :¹

$$B(1, \alpha) = \frac{1}{\alpha},$$

$$B(3, \alpha) = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1 \cdot 2},$$

$$B(5, \alpha) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)},$$

.....
.....

¹ Voir par ex. chap. 14 du Cours de M. HERMITE rédigé en 1882 par ANDRÉ NOYER. Quatrième édition 1891.

Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. 217
on aura l'expression demandée:

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^1 \left[\left(\frac{1+n}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u} = 2\beta \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{3(a+2)} + \frac{1}{5(a+4)} + \dots \right] \\ & = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} + n} - \frac{1}{\frac{1}{2}a + n} \right) = 2 \left(\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \frac{\Gamma'(\frac{1}{2}a)}{\Gamma(\frac{1}{2}a)} \right). \end{aligned} \right.$$

Ces préliminaires posés, nous donnerons la définition de l'étoile $\mathfrak{E}^{(\alpha)}$ se rapportant à l'étoile \mathfrak{E} qui est elle-même une étoile quelconque de centre a .

Posons

$$(22) \quad f(u|\alpha) = Kue^{\int_0^u \left[\left(\frac{1+n}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u}}$$

où

$$(4) \quad \alpha = 1 - \beta$$

doit vérifier les inégalités

$$(2) \quad 0 < \alpha \leq 1$$

et où K désigne une constante indépendante de u que nous allons déterminer d'une manière convenable. Fixons le vecteur, soit l , entre a et x et posons

$$(23) \quad \frac{z-a}{x-a} = f(u|\alpha).$$

Quand u décrit une circonférence ayant pour centre l'origine et pour rayon l'unité, z décrira autour de l'axe de symétrie l une figure cordiforme comme celle que nous venons d'étudier. L'axe de symétrie est coupé par la figure cordiforme aux deux points

$$\begin{aligned} z &= a + Ke^{\int_0^1 \left[\left(\frac{1+n}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u}} \cdot (x-a), \\ z &= a - Ke^{\int_0^1 \left[\left(\frac{1-n}{1+u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u}} \cdot (x-a) \end{aligned}$$

qui correspondent aux points $u = 1$ et $u = -1$ de la circonférence. L'angle intérieur de la figure cordiforme est égal à $\alpha\pi$ au premier point et à $(2 - \alpha)\pi$ au second point.

Soit maintenant r une quantité positive plus petite que l'unité. Mettons

$$(24) \quad K = \frac{1}{r} e^{\int_0^r \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\frac{\alpha}{2}} - 1 \right] \frac{du}{u}}.$$

En faisant décrire à u un cercle de rayon r concentrique au premier, z décrira une figure que nous désignerons par Z symétrique par rapport à l , située à l'intérieur de la figure cordiforme, et qui se rapproche indéfiniment de celle-ci en même temps que r se rapproche indéfiniment de l'unité. Le vecteur l est rencontré par le contour de Z aux deux points

$$(25) \quad \begin{cases} z = x, \\ z = a - e^{-\int_0^r \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\frac{\alpha}{2}} - 1 \right] \frac{du}{u}} \cdot (x - a) \end{cases}$$

correspondants aux points $u = r$ et $u = -r$ sur la circonférence du cercle de rayon r .

Soit maintenant \mathfrak{E} une étoile quelconque ayant pour centre a . La figure cordiforme ayant pour axe l étant située à l'intérieur d'un rectangle dont les deux côtés perpendiculaires à l coupent l aux points ¹

$$\begin{aligned} z &= a + K e^{\int_0^1 \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\frac{\alpha}{2}} - 1 \right] \frac{du}{u}} \cdot (x - a), \\ z &= a + K e^{\int_0^1 \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\frac{\alpha}{2}} - 1 \right] \frac{du}{u}} \cdot e^{-\frac{1+\alpha}{2} \pi i} \cdot \sin \alpha \frac{\pi}{2} \cdot (x - a) \end{aligned}$$

¹ Voir page 209.

Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. 219
et dont les deux autres côtés parallèles à l passent par les points

$$z = a + iKe^{\int_0^1 \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\frac{\beta}{2}} - 1 \right] \frac{du}{u}} \cdot e^{-\frac{a\pi}{2\lg a \frac{\pi}{2}}} \cdot \sin \alpha \frac{\pi}{2} \cdot (x - a),$$

$$z = a - iKe^{\int_0^1 \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\frac{\beta}{2}} - 1 \right] \frac{du}{u}} \cdot e^{-\frac{a\pi}{2\lg a \frac{\pi}{2}}} \cdot \sin \alpha \frac{\pi}{2} \cdot (x - a),$$

on voit qu'en prenant x suffisamment rapproché de a la figure Z fera toujours partie de \mathfrak{E} .

Soit maintenant $|\bar{x} - a|$ la limite supérieure des valeurs $|x - a|$ pour lesquelles la figure correspondante Z fait partie de \mathfrak{E} . Nous désignerons par $\mathfrak{E}^{(\alpha)}$ l'étoile qu'on obtient en faisant tourner l une fois autour de a et qui a pour contour l'ensemble des points \bar{x} .

Comme nous avons négligé de faire une étude approfondie de la forme de Z reste la question de savoir si, x étant un point sur l plus rapproché du centre a que ne l'est le point \bar{x} , il ne serait pas possible que la figure Z correspondante ne fasse partie de \mathfrak{E} . On voit facilement que ce n'est pas le cas. Prenons pour $\frac{x-a}{\bar{x}-a} = \gamma$ une quantité réelle positive plus petite que l'unité, et diminuons \mathfrak{E} dans la proportion de γ de manière à obtenir \mathfrak{E}_γ . La figure Z fait partie de \mathfrak{E}_γ . L'étoile \mathfrak{E}_γ d'un autre côté fait partie de \mathfrak{E} . La figure Z fait donc elle même partie de \mathfrak{E} .

Il conviendra d'introduire encore la définition suivante. La figure Z sera appelée la figure génératrice et la fonction $f(u|\alpha)$ la fonction génératrice de l'étoile $\mathfrak{E}^{(\alpha)}$.

La figure cordiforme étant inscrite dans le rectangle dont nous venons de parler on voit par des considérations tout analogues à celles qui ont été employées à la page 51 de la première note que X étant un domaine quelconque à l'intérieur de \mathfrak{E} , il est toujours possible de choisir α suffisamment petit pour que l'étoile $\mathfrak{E}^{(\alpha)}$ embrasse entièrement le domaine X . Il suffit d'établir entre les constantes r et α une dépendance telle que r tende indéfiniment vers l'unité en même temps que α tend indéfiniment vers zéro. Le rectangle se rapproche alors autant qu'on veut de

la ligne droite allant de a à x et la figure génératrice Z si on diminue suffisamment la constante α se rapproche indéfiniment du rectangle.

Remarquons encore que pour $\alpha = 1$ la figure génératrice devient un cercle ayant le point a pour centre et passant par le point x , et que par conséquent l'étoile $\mathfrak{E}^{(1)}$ est le cercle concentrique à l'étoile \mathfrak{E} passant par le sommet de \mathfrak{E} le plus rapproché du centre a . Remarquons aussi que l'étoile $\mathfrak{E}^{(\alpha)}$ pour toutes les valeurs de α reste *inscrite* dans l'étoile \mathfrak{E} . C'est une conséquence immédiate de ce que la figure génératrice, comme on le démontre aisément, est inscrite dans le cercle ayant le point a pour centre et $|x - a|$ pour rayon et de ce que le contour de l'étoile $\mathfrak{E}^{(\alpha)}$ passe par conséquent au moins par le sommet de \mathfrak{E} le plus rapproché de l'origine.

Prenons maintenant pour \mathfrak{E} l'étoile principale ¹ A des constantes

$$F(a), F^{(1)}(a), F^{(2)}(a), \dots, F^{(n)}(a), \dots$$

qui sont assujetties à la condition de CAUCHY ² exigeant que la limite supérieure des valeurs limites des modules $\left| \sqrt[n]{\frac{1}{\mu}} F^{(n)}(a) \right|$ soit un nombre fini.

Nous nous proposons de trouver pour $FA^{(n)}(x)$ une expression analytique valable pour l'étoile $A^{(n)}$ et telle que $A^{(n)}$ soit une étoile de convergence de cette expression.

Nous verrons en effet qu'une telle expression existe.

Pour faciliter la recherche nous introduirons des étoiles auxiliaires définies par rapport à $A^{(n)}$.

Soit r' une nouvelle quantité positive telle que

$$(26) \quad r < r' < 1.$$

En faisant décrire à u une nouvelle circonférence ayant pour centre l'origine et pour rayon r' , z décrira le contour d'une figure Z' symétrique par rapport à l , située en dedans de notre figure cordiforme et en dehors de la figure génératrice Z , se rapprochant indéfiniment du contour de la figure cordi-

¹ Seconde note page 200.

Voir page 43 note 2 de ma première note.

Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. 221

forme quand r' se rapproche indéfiniment de l'unité et se rapprochant indéfiniment du contour de Z si r' se rapproche indéfiniment de r . Les points

$$u = -r'; \quad z = a - \frac{r'}{r} e^{\int_0^{r'} \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\beta} - 1 \right] \frac{du}{u}} - \int_0^r \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\beta} - \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{-\beta} \frac{du}{u} \quad (r' = a),$$

$$u = r'; \quad z = a + \frac{r'}{r} e^{\int_0^{r'} \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\beta} - 1 \right] \frac{du}{u}} \quad (x = a)$$

se correspondent. On sait que X étant un domaine quelconque à l'intérieur de $A^{(a)}$, il est toujours possible de former une étoile E qui embrasse entièrement X et qui soit située elle-même à l'intérieur de $A^{(a)}$ (c. f. pages 50 et 51 de la première note).

Nous désignerons par E' l'étoile formée par tous les points

$$(27) \quad x' = a + \frac{r'}{r} e^{\int_0^{r'} \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\beta} - 1 \right] \frac{du}{u}} \quad (x = a)$$

où x appartient à E . On voit qu'en choisissant r' assez rapproché de r l'étoile E' est située entièrement à l'intérieur de $A^{(a)}$. On voit encore que r' étant suffisamment rapproché de r le domaine \bar{E}' constitué par l'ensemble de toutes les points différents qui appartiennent aux domaines Z' est situé entièrement à l'intérieur de l'étoile A . Nous appellerons g la limite supérieure de $FA(z)$ quand Z reste compris dans \bar{E}' .

Opérons maintenant sur $FA(z)$ la substitution ¹

$$(28) \quad z - a = (x - a)f(u|\alpha) = \frac{x - a}{H} \cdot \frac{u}{r} \cdot e^{\int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\beta} - 1 \right] \frac{du}{u}}$$

$$(29) \quad H = e^{\int_0^r \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\beta} - 1 \right] \frac{du}{u}}$$

x étant un point quelconque d'un domaine X à l'intérieur de $A^{(a)}$. Il est

¹ Voir (22), (23), (24).

clair que $FA(z)$ donnera ainsi une fonction de u qui est régulière pour $|u| \leq r$ et encore régulière pour $|r| \leq r'$, r' étant assujéti à la condition (26) et étant en même temps suffisamment rapproché de r . En effet lorsque u reste compris dans le domaine $|u| \leq r'$, z est une fonction régulière de u qui est représentée par une figure Z' comprise dans le domaine \bar{E}' , lequel d'après l'hypothèse faite sur r' est situé à l'intérieur de A .

Ayant donc

$$FA(z) = F(a) + \frac{1}{1} F^{(1)}(a)(z-a) + \frac{1}{2} F^{(2)}(a)(z-a)^2 + \dots,$$

si on transforme cette formule à l'aide de¹

$$(30) \quad \begin{aligned} (z-a)^m &= \left(\frac{x-a}{H}\right)^m \left(\frac{n}{r}\right)^m \cdot e^{-\frac{m}{n} \int_0^1 \left| \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right)^2 - 1 \right| \frac{t}{t} dt} \\ &= \left(\frac{x-a}{rH}\right)^m \cdot u^m \left[1 + \frac{h_1^{(m)}(\beta)}{|1|} u + \frac{h_2^{(m)}(\beta)}{|2|} u^2 + \dots + \frac{h_\lambda^{(m)}(\beta)}{| \lambda |} u^\lambda + \dots \right] \end{aligned}$$

on aura

$$(31) \quad FA(z) = F(a) + \sum_{\nu=1}^{\nu} G_{\nu}(x-a) \left(\frac{n}{r}\right)^{\nu}$$

où

$$(32) \quad \begin{aligned} G_{\nu}(x-a) &= \frac{r^{\nu-1} h_{\nu-1}^{(1)}(\beta)}{|1| \nu - 1} F^{(1)}(a) \frac{x-a}{H} + \frac{r^{\nu-2} h_{\nu-2}^{(2)}(\beta)}{|2| \nu - 2} F^{(2)}(a) \left(\frac{x-a}{H}\right)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{r h_1^{(1-\nu)}(\beta)}{\nu - 1 - 1} F^{(\nu-1)}(a) \left(\frac{x-a}{H}\right)^{\nu-1} + \frac{1}{2} F^{(\nu)}(a) \left(\frac{x-a}{H}\right)^{\nu}. \end{aligned}$$

La série $\sum_{\nu=1}^{\nu} G_{\nu}(x-a) \left(\frac{n}{r}\right)^{\nu}$ où x appartient au domaine X situé à l'intérieur de $A^{(n)}$ convergera pour $|u| \leq r'$. Par conséquent²

$$\left| G_{\nu}(x-a) \frac{1}{r^{\nu}} \right| \leq g(r')^{-\nu}$$

¹ Voir (6).

² WEIERSTRASS, Werke, Bd. 1, page 67.

et

$$(33) \quad |G_\nu(x-a)| \leq g\left(\frac{r}{r'}\right)^\nu.$$

La série

$$(34) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a)$$

est donc convergente pour chaque point à l'intérieur de $A^{(a)}$. Elle est encore uniformément convergente pour chaque domaine X à l'intérieur de $A^{(a)}$.

Nous avons vu qu'en faisant $u=r$ on obtient $z=x$. Par suite:

$$(35) \quad FA^{(a)}(x) = F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a)$$

égalité qui a lieu pour chaque point situé à l'intérieur de $A^{(a)}$.

Supposons maintenant inversement que $x=x_0$ soit une valeur pour laquelle la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a)$ est convergente. Alors d'après le théorème d'ABEL,¹ la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a)\left(\frac{u}{r}\right)^\nu$ sera convergente pour $|u|<r$. Elle définira à l'aide des relations (22), (23), (24) une fonction de z , régulière à l'intérieur du domaine Z construit sur le vecteur allant de a à x_0 . Cette fonction est identique à $FA(z)$ à cause de la formation des polynômes $G_\nu(x-a)$. Le point x_0 est donc ou un point à l'intérieur de $A^{(a)}$ ou du moins un sommet de $A^{(a)}$.

Désignons maintenant par $S_\alpha(x|a)$ la série $F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a)$. On voit immédiatement que l'expression limite $\lim_{\alpha \rightarrow 0} S_\alpha(x|a)$ a une étoile de convergence qui n'est pas autre chose que l'étoile principale A , et que l'égalité

$$(36) \quad FA(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} S_\alpha(x|a)$$

a lieu partout à l'intérieur de A .

Nous pouvons résumer dans le théorème suivant les résultats que nous avons obtenus jusqu'ici:

¹ Oeuvres. Nouvelle édition. Page 223. Théorème V.

Théorème 4. Désignons par A une étoile de centre a , par α une quantité positive qui ne sera pas plus grande que l'unité et par $A^{(\alpha)}$ une étoile concentrique à A et inscrite dans A qui sera engendrée par la fonction génératrice $f(u|\alpha)$. On pourra toujours choisir cette fonction telle que α étant suffisamment petit l'étoile $A^{(\alpha)}$ renferme dans son intérieur un domaine donné quelconque situé à l'intérieur de A et telle que pour $\alpha = 1$ l'étoile $A^{(1)}$ devienne le cercle concentrique à A et inscrit dans A .

On pourra encore choisir $f(u|\alpha)$ telle que, A étant l'étoile principale d'une suite de constantes

$$F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(\nu)}(a), \dots$$

assujetties à la condition de Cauchy, la série

$$S_a(x|a) = F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_{\nu}(x-a)$$

où

$$\begin{aligned} G_{\nu}(x-a) &= \frac{h_{\nu-1}^{(1)}}{1|\underline{\nu}-1} F^{(1)}(a) \cdot (x-a) + \frac{h_{\nu-2}^{(2)}}{1|\underline{\nu}-2} F^{(2)}(a) \cdot (x-a)^2 + \dots \\ &+ \frac{h_1^{(\nu-1)}}{1|\underline{\nu}-1} F^{(\nu-1)}(a) \cdot (x-a)^{\nu-1} + \frac{h_0^{(\nu)}}{1|\underline{\nu}} F^{(\nu)}(a) \cdot (x-a)^{\nu} \end{aligned}$$

et où

$$h_{\nu-1}^{(1)}, h_{\nu-2}^{(2)}, \dots, h_1^{(\nu-1)}, h_0^{(\nu)}$$

sont des constantes positives déterminées qui ne dépendent que de la fonction génératrice, possède une étoile de convergence qui soit identique à $A^{(\alpha)}$, que l'égalité

$$FA(x) = S_a(x|a)$$

ait lieu partout à l'intérieur de $A^{(\alpha)}$, et que la série $S_a(x|a)$ pour $\alpha = 1$ devienne la série de Taylor.

L'expression limite $\lim_{\alpha \rightarrow 0} S_a(x|a)$ a une étoile de convergence qui est identique à l'étoile A , et l'égalité

$$FA(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} S_a(x|a)$$

a lieu partout à l'intérieur de A .

Nous avons vu (page 219—220) que X étant un domaine fini quelconque à l'intérieur de A on pourra toujours choisir α suffisamment petit pour que $A^{(\alpha)}$ renferme X dans son intérieur. Nous avons obtenu encore, la quantité positive $r' (1 > r' > r > 0)$ étant prise suffisamment rapprochée de r , l'inégalité:

$$(33) \quad |G_\nu(x-a)| < g\left(\frac{r}{r'}\right)^\nu$$

qui a lieu pour tout le domaine X . On a donc pour tout ce domaine

$$(37) \quad \begin{cases} FA(x) = F(a) + \sum_{\nu=1}^m G_\nu(x-a) + \varepsilon, \\ \varepsilon = \sum_{\nu=m+1}^{\infty} G_\nu(x-a), \end{cases}$$

$$(38) \quad |\varepsilon| \leq g \frac{\left(\frac{r}{r'}\right)^{m+1}}{1 - \frac{r}{r'}}.$$

Fixons maintenant entre r' et α une dépendance telle que $\frac{r}{r'}$ tende indéfiniment vers l'unité quand α tend indéfiniment vers de zéro. Faisons par exemple:

$$(39) \quad r' = re^{\frac{1}{\omega(\alpha)}}.$$

où $\omega(\alpha)$ est une quantité positive qui dépend de α de telle sorte que

$$(40) \quad \lim_{\alpha=0} \omega(\alpha) = \infty.$$

On aura:

$$\frac{\frac{r}{r'}}{1 - \frac{r}{r'}} < \omega(\alpha),$$

$$(41) \quad |\varepsilon| \leq g \cdot \omega(\alpha) \cdot e^{-\frac{m}{\omega(\alpha)}}.$$

En prenant alors pour m un nombre entier positif tel que

$$(42) \quad m \geq 2\omega(\alpha) \log \omega(\alpha)$$

on obtient

$$(43) \quad |z| < \frac{\beta}{\omega(\alpha)}.$$

Donc, si on fait dépendre l'entier m de α d'une manière choisie de telle sorte que l'inégalité (42) soit vérifiée, au moins pour des valeurs petites de α , l'expression

$$\sum_{\nu=1}^m G_{\nu}(x-a)$$

aura la propriété que voici:

σ étant une quantité positive déterminée, on pourra toujours trouver une autre quantité positive $\bar{\alpha}$ telle que l'inégalité

$$\left| FA(x) - \sum_{\nu=1}^m G_{\nu}(x-a) \right| < \sigma$$

soit satisfaite pour toutes les quantités x appartenant à X , pourvu que α soit inférieur à $\bar{\alpha}$.

Mais c'est là notre théorème I de la première note qui ainsi se trouve démontré d'une manière sensiblement différente de celle que nous avons employée auparavant.

Le théorème I une fois démontré, le théorème II s'ensuit immédiatement par les mêmes considérations que dans la première note.

Arrêtons nous un instant pour fixer la forme de l'expression $\sum_{\nu=0}^{\infty} G_{\nu}(x-a)$. On a, la fonction génératrice étant

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} f(u|\alpha) &= \frac{n}{rH} e^{\int_0^r \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\beta} - 1 \right] \frac{du}{u}}, \\ H &= e^{\int_0^r \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\beta} - 1 \right] \frac{du}{u}}, \\ 0 &< r < 1, \end{aligned} \right.$$

la formule:

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{\nu=0}^m G_{\nu}(x-a) &= F(a) + \frac{1}{1} \left(\sum_{\nu=1}^m \frac{h_{\nu-1}^{(1)}(\beta)}{|\underline{\nu-1}|} \cdot r^{\nu-1} \right) \cdot F^{(1)}(a) \frac{x-a}{H} \\ &+ \frac{1}{2} \left(\sum_{\nu=2}^m \frac{h_{\nu-2}^{(2)}(\beta)}{|\underline{\nu-2}|} \cdot r^{\nu-2} \right) \cdot F^{(2)}(a) \left(\frac{x-a}{H} \right)^2 + \dots \\ &+ \frac{1}{m-1} \left(\sum_{\nu=m-1}^m \frac{h_{\nu-(m-1)}^{(m-1)}(\beta)}{|\underline{\nu-(m-1)}|} \cdot r^{\nu-(m-1)} \right) \cdot F^{(m-1)}(a) \left(\frac{x-a}{H} \right)^{m-1} \\ &+ \frac{1}{m} F^{(m)}(a) \left(\frac{x-a}{H} \right)^m \end{aligned} \right.$$

où $h_{\nu-\mu}^{(\mu)}(\beta)$; ($\mu=1, 2, \dots, \infty$); $h_0^{(0)}(\beta)=1$ sont les polynômes en β dont les propriétés essentielles ont été énoncées à la page 210.

L'inégalité (42) est remplie si on y fait $\alpha = \frac{1}{n}$, $m = n^2$, n étant un nombre entier positif. Posons alors

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} G_n(x|a) &= F(a) \\ &+ \frac{1}{1} \left(\frac{1}{H} \sum_{\nu=1}^{n^2} \frac{h_{\nu-1}^{(1)}\left(\frac{n-1}{n}\right)}{|\underline{\nu-1}|} \cdot r^{\nu-1} \right) F^{(1)}(a) \cdot (x-a) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H^2} \sum_{\nu=2}^{n^2} \frac{h_{\nu-2}^{(2)}\left(\frac{n-1}{n}\right)}{|\underline{\nu-2}|} \cdot r^{\nu-2} \right) F^{(2)}(a) \cdot (x-a)^2 \\ &\dots \dots \dots \\ &+ \frac{1}{n^2-1} \left(\frac{1}{H^{n^2-1}} \sum_{\nu=n^2-1}^{n^2} \frac{h_{\nu-(n^2-1)}^{(n^2-1)}\left(\frac{n-1}{n}\right)}{|\underline{\nu-(n^2-1)}|} \cdot r^{\nu-(n^2-1)} \right) \cdot F^{(n^2-1)}(a) (x-a)^{n^2-1} \\ &+ \frac{1}{n^2} \frac{1}{H^n} F^{(n^2)}(a) \cdot (x-a)^{n^2} \\ &h_0^{(n^2)}\left(\frac{n-1}{n}\right) = 1. \end{aligned} \right.$$

Nous pouvons dans notre théorème I (seconde note), substituer le nouveau polynôme $\overline{G}_n(x|a)$ au polynôme $G_n(x|a)$. L'énoncé du théorème reste le même.

Pour démontrer le théorème 4 nous avons employé comme fonction génératrice la forme spéciale (44).

Il est évident qu'on aurait encore pu prendre pour $f(u|\alpha)$ d'autres fonctions. Dans le choix de $f(u|\alpha)$ nous avons introduit une restriction considérable par la condition que les constantes $h_{j-\mu}^{(g)}$ doivent être toutes positives et par cette autre condition que la série obtenue doit pour $\alpha = 1$ devenir la série de TAYLOR. En laissant de côté ces restrictions, on obtient évidemment une latitude beaucoup plus grande dans le choix de la fonction génératrice.

Une fonction très élémentaire remplissant ces deux conditions est

$$(47) \quad \begin{cases} f(u|\alpha) = \frac{\alpha + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \cdot \frac{(1+u)^\alpha - (1-u)^\alpha}{\alpha(1+u)^\alpha + (1-u)^\alpha}, \\ \varepsilon = \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^\alpha. \end{cases}$$

Cette fonction a la propriété suivante. Quand u décrit un cercle ayant pour centre l'origine et l'unité pour rayon, f décrira une figure cunéiforme, symétrique par rapport à l'axe réel et limitée par deux arcs de cercle qui se coupent sous un angle $\alpha\pi$ aux deux points

$$\begin{aligned} f(-1, \alpha) &= -\frac{\alpha + \varepsilon}{1 - \varepsilon}, \\ f(1, \alpha) &= \frac{\alpha + \varepsilon}{\alpha(1 - \varepsilon)}. \end{aligned}$$

L'intérieur de la figure cunéiforme correspond à l'intérieur du cercle et les deux points $u = 0$, $f = 0$ se correspondent. En faisant

$$\frac{z-u}{c-u} = f(u|\alpha)$$

et en faisant décrire à u une circonférence ayant l'origine pour centre et r pour rayon on obtient la figure génératrice Z . Les points

$$u = -r; \quad z = a - \frac{\alpha + \varepsilon}{1 + \alpha\varepsilon} \cdot (x - a),$$

$$u = r; \quad z = x$$

se correspondent.¹

Revenons à la formule (43). Il y entre outre la constante α encore une constante r . On peut se demander à la série (35) gardera les propriétés énoncées dans notre théorème si on y fait $r = 1$, c'est à dire si au lieu de la figure Z enfermée dans l'intérieur de notre figure cordiforme on prend pour figure génératrice la figure cordiforme elle-même. C'est en effet ce qui a lieu mais pour la démonstration il faut alors avoir recours à des considérations d'une autre nature que celles que nous avons employées jusqu'ici.

M. PHRAGMÉN nous fait à ce sujet la communication suivante que nous ne pouvons faire mieux que de reproduire textuellement:

« Si on veut employer la figure cordiforme elle-même comme figure génératrice, on est amené à étudier la question de la convergence d'une série entière sur la circonférence de son cercle de convergence.

En effet, définissons l'étoile $A^{(\alpha)}$ par la condition que, x désignant un point de cette étoile, toute la figure cordiforme, semblable à la figure génératrice et ayant pour axe la droite entre a et x , doit appartenir à l'étoile A ; soit alors x un point situé à l'intérieur de cette étoile $A^{(\alpha)}$. Cela posé, si on substitue à l'argument z de la fonction $F A(z)$ la fonction de u définie par la formule

$$\frac{z - a}{x - a} = uv^{\alpha} \int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-v} \right)^{\alpha} - 1 \right] \frac{du}{u},$$

on aura une fonction de u régulière à l'intérieur du cercle dont le centre est l'origine et dont le rayon est l'unité. D'ailleurs, dès que l'on a

¹ J'ai employé cette figure cunéiforme au début de mes recherches sur la représentation des fonctions monogènes générales. En réponse à une lettre de M. VITO VOLTERRA datée de *Pise* le 9 avril 1899 où il me communiquait les principes d'une démonstration appuyée sur l'emploi de la figure cunéiforme, je lui indiquais le jour suivant ma propre démonstration dans une lettre écrite de *Perouse*.

On verra amplement dans la suite l'avantage qu'il y a à employer la figure cordiforme au lieu de la figure cunéiforme.

$\alpha < 1$ cette fonction a nécessairement deux points singuliers situés sur la circonférence de ce cercle, à savoir les points $u = 1$ et $u = -1$. Par conséquent, le développement de cette fonction suivant les puissances de u , développement que nous écrirons

$$(1) \quad \sum_{\nu} G_{\nu}(x-a)u^{\nu}$$

a pour cercle de convergence le cercle de rayon 1.

Or on démontre, comme nous allons le faire, que cette série converge encore sur la circonférence de son cercle de convergence, et cela *uniformément* sur toute la circonférence, et de même uniformément pour toutes les valeurs de x situées dans un domaine X , donné arbitrairement à l'intérieur de l'étoile $A^{(a)}$.

On peut donc en ce développement faire $u = 1$, et on obtient de la sorte le développement

$$(2) \quad P A(x) = \sum_{\nu} G_{\nu}(x-a)$$

qui converge uniformément dans X .

Pour démontrer le théorème que nous venons d'énoncer sur la convergence uniforme de la série (1), il suffit de rappeler le théorème classique de M. LIPSCHITZ *Sur le développement des fonctions réelles en séries trigonométriques*.¹

Ce théorème peut être énoncé de la manière suivante:²

Soit $\varphi(\theta)$ une fonction réelle et univoque de l'argument réel θ et continue pour $\theta = \theta_0$. Supposons qu'on sache pour $\delta \leq \frac{2m+1}{2n+1}\pi$, où m et n désignant deux entiers dont le premier est plus petit que le second, déterminer une fonction $\psi(\delta)$ de l'argument réel δ , telle que, pour deux valeurs θ' et θ'' de l'angle θ situées toutes deux ou bien entre θ_0 et $\theta_0 + \pi$ ou bien entre θ_0 et $\theta_0 - \pi$ et satisfaisant à l'inégalité

$$|\theta' - \theta''| < \delta$$

on ait:

$$|\varphi(\theta') - \varphi(\theta'')| < \psi(\delta).$$

¹ Journal de Crelle, t. 63.

² Nous avons précisé un peu l'énoncé du théorème.

Supposons encore qu'on sache déterminer une quantité positive M telle que pour toutes les valeurs réelles de θ on ait $|\varphi(\theta)| < M$.

Cela posé, la différence entre $\varphi(\theta_0)$ et la somme

$$(3) \quad \begin{aligned} & a_0 + a_1 \cos \theta_0 + a_2 \cos 2\theta_0 + \dots + a_n \cos n\theta_0 \\ & + b_1 \sin \theta_0 + b_2 \sin 2\theta_0 + \dots + b_n \sin n\theta_0 \end{aligned}$$

où

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} \varphi(\theta) d\theta, \dots, a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} \varphi(\theta) \cos n\theta \cdot d\theta$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} \varphi(\theta) \sin n\theta \cdot d\theta,$$

les quadratures dans ces formules étant supposées avoir un sens, est inférieure à

$$4M \left(\frac{1}{2m+1} + \frac{\pi}{(2m+1)^2} \right) + 9\psi \left(\frac{2m+1}{2n+1} \pi \right) + 4\psi \left(\frac{\pi}{2n+1} \right) \cdot \log \frac{4(2n+1)}{\pi}.$$

Si $\varphi(\theta)$ est périodique et de période 2π , de sorte que les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n$ sont indépendants de θ_0 et que la formule (3) donne le commencement de son développement en série de FOURIER, et si on peut employer, pour toutes les valeurs de θ_0 , la même fonction $\psi(\delta)$ et de plus si cette fonction est telle que $\psi(\delta) \log \frac{4}{\delta}$ tend vers zéro avec δ , il s'ensuit de ce théorème que le développement de $\varphi(\theta)$ en série de FOURIER est uniformément convergent pour toutes les valeurs de θ .

Envisageons maintenant un ensemble fini ou infini de fonctions $\varphi(\theta)$, que nous supposons encore, pour simplifier, périodiques et de période 2π .

Supposons que, ayant fixé la valeur $\theta = \theta_0$, on puisse employer la même fonction $\psi(\delta)$ pour toutes ces fonctions $\varphi(\theta)$, et que cette fonction soit telle que $\psi(\delta) \log \frac{4}{\delta}$ tende vers zéro quand δ tend vers zéro.

Il est évident, dans ce cas, que la série de FOURIER:

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 \cos \theta_0 + a_2 \cos 2\theta_0 + \dots \\ & + b_1 \sin \theta_0 + b_2 \sin 2\theta_0 + \dots \end{aligned}$$

est *uniformément convergente* pour toutes les fonctions $\varphi(\theta)$ appartenant à l'ensemble donné.¹

Pour pouvoir appliquer ces théorèmes aux parties réelle et imaginaire de la fonction de u obtenue en substituant à l'argument z de la fonction $FA(z)$ la fonction de u définie par

$$\frac{z-a}{z-\bar{a}} = ue^{i\theta}, \quad \left| \frac{1+ue^{i\theta}}{1-ue^{i\theta}} \right| = e^{\frac{2\theta}{\pi}},$$

nous remarquons que, z' et z'' désignant deux valeurs de z correspondant aux valeurs $e^{\theta'i}$ et $e^{\theta''i}$ données à u , on aura nécessairement

$$(4) \quad |z'' - z'| < K \cdot |x - a| \cdot |\theta'' - \theta'|^a,$$

K désignant une certaine constante qui ne dépend que de α .² D'un

¹ Il semble que, en général, on n'a guère apprécié ce théorème de M. LIPSCHITZ à sa juste valeur. Le plus souvent on le présente comme un complément du théorème célèbre de DIRICHLET, pouvant servir à examiner la convergence de la série de FOURIER dans le voisinage des points où la fonction donnée possède un nombre infini de maxima et de minima.

Or, si l'on considère le fond des choses, il est évident que de ces deux théorèmes celui de M. LIPSCHITZ est à la fois le plus profond, le plus utile et le plus élémentaire. On pourrait même dire que, tandis que ce dernier théorème est un vrai théorème d'analyse, le théorème de DIRICHLET est plutôt du ressort de l'arithmétique supérieure.

² Si θ' et θ'' satisfont toutes deux, ou bien à l'inégalité $0 < \theta < \pi$ ou bien à l'inégalité $0 > \theta > -\pi$, on pourra prendre $K = \frac{2^{1-\alpha}}{\alpha}$. On pourra prendre $K = \frac{4^{1-\alpha}}{\alpha}$, si θ' et θ'' sont arbitraires, pourvu seulement que $|\theta'' - \theta'| \leq \frac{\pi}{2}$.

En effet, écrivons pour simplifier v au lieu de $\frac{z-a}{z-\bar{a}}$, de sorte qu'on ait

$$\log v = \int_1^u \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{1-\alpha} \frac{du}{u}.$$

Pour $0 < \theta < \pi$, si nous faisons comme ci-dessus $u = e^{\theta i}$, nous aurons

$$\log v = e^{-ia\frac{\pi}{2}} \int_1^u \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right)^{1-\alpha} d\theta.$$

Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. 233
 autre côté, pour toutes les valeurs de z' et de z'' appartenant à X
 on aura

$$(5) \quad |FA(z'') - FA(z')| < K_1 \cdot |z'' - z'|$$

Par conséquent, si θ et θ'' sont deux valeurs de θ comprises entre 0 et π et si v' et v'' sont les valeurs correspondantes de v , on a

$$(a) \quad \log v'' - \log v' = \int_{\theta'}^{\theta''} \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right)^{1-a} d\theta.$$

Or on a, pour les valeurs considérées de θ ,

$$\frac{2}{\theta} > \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} > 0,$$

par conséquent

$$\left(\frac{2}{\theta} \right)^{1-a} > \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right)^{1-a},$$

$$\int_{\theta'}^{\theta''} \left(\frac{2}{\theta} \right)^{1-a} d\theta > \int_{\theta'}^{\theta''} \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right)^{1-a} d\theta;$$

ce qui donne, en intégrant dans le premier membre, et en ayant égard à (a)

$$\frac{2^{1-a}}{a} (\theta'^a - \theta''^a) > (\log v'' - \log v').$$

Maintenant on a, en écrivant ξ pour $\log v$,

$$v'' - v' = \int_{\log v'}^{\log v''} e^{\xi} d\xi = \int_{\log v'}^{\log v''} v d\xi;$$

par conséquent, $|v|$ étant inférieure à l'unité, on a

$$|v'' - v'| < |\log v'' - \log v'|.$$

D'ailleurs on a

$$x^a + y^a > (x + y)^a$$

pour x et y positifs, $0 < a < 1$ — ce dont on s'assure immédiatement en considérant les dérivées par rapport à x et à y — et par conséquent

$$\theta'^a - \theta''^a < (\theta' - \theta'')^a.$$

Par conséquent on obtient

$$|v'' - v'| < \frac{2^{1-a}}{a} \cdot |\theta'' - \theta'|^a.$$

K_1 désignant une constante plus grande que les valeurs absolues de $F'A(z)$ dans X .

On démontre de même que cette inégalité subsiste si les valeurs θ' et θ'' sont toutes deux comprises entre 0 et $-\pi$.

Si les valeurs θ' et θ'' sont situées de part et d'autre de la valeur $\theta = 0$, on aura

$$|v''| < \frac{2^{1-a}}{\alpha} \cdot |\theta''|^a,$$

$$|v'| < \frac{2^{1-a}}{\alpha} \cdot |\theta'|^a$$

et par conséquent

$$|v'' - v'| < \frac{2^{1-a}}{\alpha} (|\theta''|^a + |\theta'|^a).$$

Or on a pour $\alpha < 1$ et pour x et y positifs, l'inégalité

$$x^\alpha + y^\alpha \leq 2^{1-\alpha}(x + y)^\alpha$$

qui résulte de ce que pour $x + y =$ constante, est maximum $x^\alpha + y^\alpha$, pour $x = y$. On obtient donc

$$|v'' - v'| < \frac{4^{1-a}}{\alpha} (|\theta''| + |\theta'|)^\alpha \\ - \frac{4^{1-a}}{\alpha} |\theta'' - \theta'|^\alpha.$$

Supposons enfin que θ' et θ'' diffèrent, de π tous les deux, de moins de $\frac{\pi}{2}$. Dans ce cas on peut écrire

$$v'' - v' = \int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{1-a} \frac{du}{u},$$

et par conséquent pour $u = e^{i\theta}$

$$\log(v'' - v') = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right)^{1-a} d\theta \cdot e^{-ia\frac{\pi}{2}}.$$

Nous obtenons immédiatement:

$$|\log(v'' - v')| < |\pi - \theta|$$

ce qui donne aisément

$$|v'' - v'| < |\log(v'' - v') - \log(v' - v_0)| < |\theta'' - \theta'|.$$

Or il est évident que

$$|\theta'' - \theta'| < \frac{4^{1-a}}{\alpha} |\theta'' - \theta'|^\alpha.$$

On aura donc

$$(6) \quad |FA(z'') - FA(z')| < K \cdot K_1 \cdot |x - a| \cdot |\theta'' - \theta'|^\alpha.$$

Par conséquent les conditions pour que le développement de FOURIER soit uniformément convergent par rapport à θ sont évidemment remplies et pour la partie réelle et pour la partie imaginaire de la fonction $FA(z)$, considérées comme fonctions de l'angle réel θ introduit par les deux substitutions

$$\frac{z - a}{x - a} = ue^{\int_1^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{1-\alpha} - 1 \right] \frac{du}{u}}$$

et

$$u = e^{\theta i}.$$

Considérons alors

$$(7) \quad RFA(z) = a_0 + \sum (a_n \cos n\theta - b_n \sin n\theta),$$

développement de la partie réelle de cette fonction en série de FOURIER. Il est évident que pour $u = re^{\theta i}$, on a aussi,

$$(8) \quad RFA(z) = a_0 + \sum (a_n r^n \cos n\theta - b_n r^n \sin n\theta).$$

En effet, d'après le théorème d'ABEL, le second membre est uniformément convergent pour $r \leq 1$, et représente par conséquent, comme le premier, une fonction harmonique dans le cercle $r \leq 1$. Or, ces deux fonctions harmoniques étant, d'après la formule (7), identiques sur la circonférence, elles sont aussi identiques à l'intérieur du cercle, et cela donne précisément la formule (8). Les fonctions harmoniques conjuguées ne peuvent donc différer que d'une constante, et on a par conséquent

$$(9) \quad IFA(z) = \sum (a_n r^n \sin n\theta + b_n r^n \cos n\theta) + \text{const.}$$

$IFA(z)$ désignant la partie réelle de la fonction $\frac{1}{z} FA(z)$.

D'un autre côté on a pour $u = e^{ni}$ un développement uniformément convergent en série de FOURIER

$$(10) \quad IFA(z) = a'_0 + \sum (a'_n \cos n\theta - b'_n \sin n\theta)$$

dont en raisonnant comme ci-dessus on tire pour $u = re^{ni}$ le développement suivant convergent pour $r \leq 1$

$$(11) \quad IFA(z) = a'_0 + \sum (a'_n r^n \cos n\theta - b'_n r^n \sin n\theta).$$

En comparant ce développement au développement (9), on trouve

$$a'_n = b_n, \quad b'_n = -a_n.$$

Par conséquent on a, pour $|u| \leq 1$

$$FA(z) = a_0 + ia'_0 + \sum (a_n + ia'_n)u^n,$$

et ce développement converge uniformément sur la circonférence $|u| = 1$.

D'ailleurs il est évident, d'après ce que nous avons dit, que cette convergence est uniforme, non seulement par rapport à l'angle θ , mais encore par rapport à la quantité x qui figure dans la formule de substitution, pourvu que cette quantité reste comprise dans le domaine X .

C'est tout ce qu'il fallait établir pour démontrer qu'on a

$$FA(x) = F(a) + \sum_{v=1}^{\infty} G_v(x-a)$$

et que ce développement est uniformément convergent pour les valeurs de x à l'intérieur de X .

Il est donc démontré qu'on peut employer comme fonction génératrice

$$(48) \quad f(u|\alpha) = \frac{u}{\omega} e^{\int_0^u \left[\left(\frac{1+v}{1-u} \right)^{1-\alpha} - 1 \right] \frac{dv}{v}}$$

où

$$(49) \quad \omega = e^{\int_0^1 \left[\left(\frac{1+v}{1-u} \right)^{1-\alpha} - 1 \right] \frac{dv}{v}}$$

et comme figure génératrice la figure cordiforme représentée par

$$z = a + (x-a)f(u|\alpha)$$

quand u décrit une circonférence qui a pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Les polynômes $G_\nu(x-a)$ deviennent dans ce cas

$$(50) \quad G_\nu(x-a) = \frac{h_{\nu-1}^{(1)}(\beta)}{|\underline{1}|^{\nu-1}} F^{(1)}(a) \frac{x-a}{\omega} + \frac{h_{\nu-2}^{(2)}(\beta)}{|\underline{2}|^{\nu-2}} F^{(2)}(a) \left(\frac{x-a}{\omega}\right)^2 + \dots \\ + \frac{h_1^{(\nu-1)}(\beta)}{|\underline{1}|^1} F^{(\nu-1)}(a) \left(\frac{x-a}{\omega}\right)^{\nu-1} + \frac{1}{|\underline{\nu}|} F^{(\nu)}(a) \left(\frac{x-a}{\omega}\right)^\nu.$$

Rappelons la formule (21) et remarquons en même temps l'égalité

$$(51) \quad \omega = \left(\frac{1}{2}e\right)^2 e^{\frac{2}{\alpha}}(1 + \alpha\mathfrak{P}(\alpha))$$

qui en résulte immédiatement et qui montre de quelle manière ω tend vers l'infini quand α s'évanouit. De l'égalité (6) on tire encore en faisant $u = 1$ la formule remarquable

$$(52) \quad \omega^\mu = 1 + \frac{h_1^{(\mu)}(\beta)}{|\underline{1}|} + \frac{h_2^{(\mu)}(\beta)}{|\underline{2}|} + \dots + \frac{h_\nu^{(\mu)}(\beta)}{|\underline{\nu}|} + \dots$$

ou, en faisant $h_0^{(\mu)}(\beta) = 1$,

$$\omega^\mu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{h_\nu^{(\mu)}(\beta)}{|\underline{\nu}|}$$

On aura donc pour des valeurs suffisamment petites de x l'identité suivante:

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} & F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a) \\ &= F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{h_{\nu-\mu}^{(\mu)}(\beta)}{|\underline{\mu}|^{\nu-\mu}} F^{(\mu)}(a) \left(\frac{x-a}{\omega}\right)^\mu \\ &= F(a) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) \left(\frac{x-a}{\omega}\right)^\mu \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{h_\lambda^{(\mu)}(\beta)}{|\underline{\lambda}|} \\ &= F(a) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{F^{(\mu)}(a)}{|\underline{\mu}|} (x-a)^\mu. \end{aligned} \right.$$

Le polynôme $G_\nu(x - a)$ est un polynôme en x de degré ν mais c'est en même temps un polynôme en β de degré $\nu - 1$ (voir page 210). Les considérations que nous avons employées pour démontrer la convergence de la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x - a)$ nous montrent immédiatement que x étant un point quelconque à l'intérieur de A , il y a toujours une valeur de β par ex. β_0 telle que la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x - a) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{h_{\nu-\mu}^{(\alpha)}(\beta)}{|\mu| \nu - \mu} F^{(\mu)}(a) \left(\frac{x - a}{\omega} \right)^\mu$$

soit uniformément convergente par rapport à β pour chaque domaine

$$0 \leq \underline{\beta} \leq \beta' < \beta_0 < 1.$$

La formule (53) fait ressortir d'une manière intéressante le vrai rôle de la quantité β dans notre mode de représentation. La série $\sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x - a)$ n'est pas une fonction proprement dite de β , parce que sa valeur, la série étant convergente, est absolument indépendante de β . La quantité β sert seulement à régler l'étendue de la convergence, qui augmente de plus en plus en même temps que β s'approche de l'unité.

Rappelons nous la construction de l'étoile $A^{(\alpha)}$ (voir page 229). On voit que la figure cordiforme étant choisie pour figure génératrice l'étoile $A^{(\alpha)}$ prend une forme très simple.

Faisons par exemple

$$F(x) = \frac{1}{1 - e^x}.$$

L'étoile $A^{(\alpha)}$ devient dans ce cas, le point $x = 0$ étant pris pour centre, une figure cordiforme qui a pour axe de symétrie l'axe réel, dont le sommet obtus est au point $x = 1$ et dont le sommet aigu est au point $x = -e^{\pi i \alpha (1-\alpha)/2}$. Nous avons dessiné (planche II) trois spécimens différents de $A^{(\alpha)}$. On remarquera qu'en diminuant α , l'étoile $A^{(\alpha)}$ s'approche avec une grande rapidité de l'étoile A qui est elle-même dans ce cas le plan entier à l'exception de la demi-droite $(1 \dots +\infty)$.

Supposons, pour prendre un autre exemple, que l'étoile A ayant pour centre $x = 0$ n'ait que deux sommets finis $x = 1$, $x = -1$. L'étoile $A^{(\alpha)}$

devient alors le domaine situé dans l'intérieur de deux figures cordiformes de même paramètre α qui ont toutes les deux pour axe de symétrie l'axe réel et dont l'une a pour sommet obtus $x = 1$ et l'autre $x = -1$.



Nous avons vu que la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} G_{\nu}(x-a) \cdot u^{\nu}$$

étant regardée comme série de puissances par rapport à u a pour rayon de convergence l'unité. Par suite d'après le théorème de CAUCHY¹ la limite supérieure des valeurs limites de $|\sqrt[\nu]{G_{\nu}(x-a)}|$; $\nu = 1, 2, \dots, \infty$ est l'unité. Cette propriété subsiste tant que x appartient à l'intérieur de l'étoile $A^{(\alpha)}$. D'un autre côté la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} G_{\nu}(x-a)$ étant divergente, tant que x est un point en dehors de $A^{(\alpha)}$ la limite supérieure des valeurs limites de $|\sqrt[\nu]{G_{\nu}(x-a)}|$ est nécessairement plus grande que l'unité quand x est situé en dehors de $A^{(\alpha)}$. Si on remarque encore que chaque point x à l'intérieur de A sera renfermé dans $A^{(\alpha)}$ si l'on donne à α une valeur suffisamment petite, on obtient le théorème suivant.

Théorème 5. *On peut toujours choisir la fonction génératrice d'une manière telle que toutes les propriétés du théorème 4 subsistent et que l'on ait de plus les suivantes:*

- 1°. *La quantité α étant donnée, la limite supérieure des valeurs limites de $|\sqrt[\nu]{G_{\nu}(x-a)}|$; $\nu = 1, 2, \dots, \infty$ est égale à l'unité quand x appartient à l'intérieur de $A^{(\alpha)}$ et supérieure à l'unité quand x est situé en dehors de $A^{(\alpha)}$.*

¹ Première note, page 44.

- 2°. *Le point x étant situé à l'intérieur de l'étoile A , il existe toujours une quantité $\alpha_0 < 1$ telle que, α étant plus petite que α_0 , la limite supérieure des valeurs limites $|\sqrt[\nu]{G_\nu(x-a)}|$; $\nu = 1, 2, 3, \dots, \infty$ est égale à l'unité, tandis que x étant situé en dehors de A cette limite supérieure est toujours supérieure à l'unité et cela quel que soit α .*

On voit que ce théorème donne un critère précieux pour trouver les sommets de l'étoile A . Pour être sûr que le point x ne peut pas être situé en dedans de A , il suffit en réalité de faire voir que, la quantité α étant choisie aussi petite et une quantité M aussi grande qu'on veut, il y a toujours des indices ν tels que $|G_\nu(x-a)| > M$. D'un autre côté tant que x est situé à l'extérieur de $A^{(a)}$ on est sûr qu'il existe de tels indices.

Dans les cas ordinaires il doit même arriver qu'il y a toujours un indice ν_0 tel que $|G_\nu(x-a)| > M$ tant que $\nu > \nu_0$. D'un autre côté si x est situé à l'intérieur de $A^{(a)}$ il y a toujours, δ étant choisi si petit qu'on veut et α étant pris suffisamment petit, un indice ν_0 tel que $|G_\nu(x-a)| < \delta$ tant que $\nu > \nu_0$.

Je reviendrai dans une autre note sur cette question de la recherche des sommets de A .

La figure génératrice cordiforme définie par

$$z = a + (x-a)f(u|\alpha),$$

la fonction génératrice $f(u|\alpha)$ étant donnée par les égalités (48), (49) où la variable u parcourt une circonférence ayant pour centre l'origine et pour rayon l'unité, possède la propriété remarquable que voici. Regardons la figure comme engendrée par un rayon tournant autour du centre a . Un des angles que le rayon forme avec le contour de la figure est toujours $\frac{1}{2}\alpha\pi$ sauf au point

$$z = a + e^{\frac{1}{2}\alpha\pi} \left[\left(\frac{1-u}{1+u} \right)^{1-\alpha} - \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{1-\alpha} \right] \frac{du}{u} \cdot (x-a)$$

où les deux angles sont $\pi - \frac{1}{2}\alpha\pi$.

Rappelons-nous la définition de l'étoile $A^{(\alpha)}$. Fixons un vecteur et regardons la figure cordiforme autour de ce vecteur qui est inscrite dans l'étoile A . Les sommets communs de cette figure cordiforme et de l'étoile A sont en même temps à cause de la propriété de la figure cordiforme dont nous venons de parler des sommets de l'étoile $A^{(\alpha)}$.



Donc si E est une étoile concentrique et homothétique à $A^{(\alpha)}$ qui est située dans son intérieur et si \bar{E} est l'ensemble de tous les points qui appartiennent aux différentes figures cordiformes construites autour des vecteurs entre a et un point à l'intérieur ou sur le contour de E l'étoile \bar{E} devient identique avec l'étoile E .

On sait que la limite supérieure $|FA^{(\alpha)}(x)|$ à l'intérieur ou sur le contour de E est la même que la limite supérieure de $|FA^{(\alpha)}(x)|$ sur le contour. Appelons cette limite g . La limite supérieure de $|FA^{(\alpha)}(x)|$ quand z appartient à la figure cordiforme construite autour de l'axe de symétrie (ax) , x appartenant au contour de E , n'est donc pas supérieure à g . On a

$$FA^{(\alpha)}(z) = F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_{\nu}(z-a)u^{\nu}.$$

Donc

$$|G_{\nu}(x-a)| < g.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème 6. *On peut toujours choisir la fonction génératrice d'une telle manière que toutes les propriétés des théorèmes 4 et 5 subsistent et encore la propriété suivante:*

En désignant par E une étoile concentrique homothétique et intérieure à $A^{(\alpha)}$, par x un point sur le contour de E et par g la limite supérieure de $|FA^{(\alpha)}(x)|$ quand x parcourt ce contour; ayant

$$FA^{(\alpha)}(x) = F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_{\nu}(x-a),$$

où $G_{\nu}(x-a)$ a la même signification qu'au théorème 4, on aura

$$|G_{\nu}(x-a)| < g; \quad \nu = 1, 2, 3, \dots, \infty.$$

On voit facilement qu'en ayant employé par exemple la figure cunéiforme au lieu de la figure cordiforme on aurait obtenu un théorème beaucoup plus compliqué.

Mettons $\alpha = 1$ et il résulte du théorème 6:

Soit \mathcal{C} le cercle de convergence et r une quantité positive plus petite que le rayon de convergence de la série de Taylor

$$F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\nu|} F^{(\nu)}(a) \cdot (x-a)^{\nu}.$$

Soit encore g la limite supérieure de $|FC(x)|$ sur la circonférence qui a le point a pour centre et r pour rayon. On aura alors, x étant un point sur cette circonférence

$$\left| \frac{1}{|\nu|} F^{(\nu)}(a) \cdot (x-a)^{\nu} \right| < g; \quad \nu = 1, 2, \dots, \infty.$$

C'est le même théorème que celui dont nous avons fait un si fréquent usage dans notre première note¹ et qui est énoncé en général sous la forme

$$\left| \frac{1}{|\nu|} F^{(\nu)}(a) \right| < gr^{-\nu}.$$

¹ Voir WEIERSTRASS, Werke, Bd. I, page 67. M. HURWITZ m'a communiqué lors d'une visite que je faisais chez lui à Zürich le moi de mai de l'année passée qu'il a eu longtemps l'habitude d'énoncer dans son cours le théorème de WEIERSTRASS sous la forme qui se présente ainsi comme cas spécial de mon théorème 6.

Nous ne devons pas finir cet article sans parler d'un résultat remarquable qui a été trouvé par M. BOREL et qui est antérieur à nos travaux.

M. BOREL a démontré¹ l'égalité

$$FK(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-k} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{k^{\lambda}}{\lambda!} \left[F(a) + \frac{1}{1!} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{k!} F^{(k)}(a)(x-a)^k \right]$$

où k désigne une quantité positive et K est une étoile de convergence circonscrite au cercle des constantes $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, $F^{(2)}(a)$, ..., $F^{(k)}(a)$, ... Il a montré par là qu'il existe une expression analytique générale édiflée de même que la série de TAYLOR avec les seuls éléments $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, $F^{(2)}(a)$, ... pris de la fonction mais valable pour une étoile de convergence circonscrite au cercle de ces éléments et contenant à son intérieur tout point de ce cercle où la fonction reste régulière. Autant que nous avons pu nous en assurer il a été le premier à établir ce résultat capital pour la représentation analytique des fonctions monogènes.

Pendant l'impression de cette note, j'ai eu connaissance d'un nouveau résultat du plus grand intérêt que vient d'obtenir M. BOREL.

L'expression limite par laquelle nous avons exprimé $F\mathcal{A}(x)$ et qui possède l'étoile \mathcal{A} pour étoile de convergence peut s'écrire

$$\lim_{a \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n G_{\nu}(x-a).$$

C'est en réalité une expression limite double. Mais nous avons trouvé dans notre première note qu'on peut toujours exprimer $F\mathcal{A}(x)$ par une expression limite simple $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x|a)$. Cette expression limite simple a l'inconvénient que l'étoile \mathcal{A} n'est pas avec nécessité une étoile de convergence de l'expression. On peut se demander s'il n'est pas possible de déterminer le polynôme $g_n(x|a)$ de manière que $\lim g_n(x|a)$ possède l'étoile \mathcal{A} pour étoile de convergence. M. BOREL vient de montrer par une analyse profonde que nous publierons prochainement que ce n'est pas le cas.

¹ *Fondements de la théorie des séries divergentes sommables*, Journal de Mathématiques, Série 5, tome 2, année 1896, pages 103—122.

L'expression analytique la plus simple qui représente $FA(x)$ en dedans de A et qui a en même temps l'étoile A pour étoile de convergence est donc nécessairement une expression limite double, comme celle que nous avons donnée dans le théorème 4 de cette note.

ERKLÄRUNG.

— — —

Im 22^{ten} Bande (1899) dieser Zeitschrift findet sich auf Seite 371—377 die französische Übersetzung einer bereits im October 1897 in den Monatsheften für Mathematik und Physik (Jahrg. 8, p. 377—382) publicirten Note des Herrn M. LERCH. Gegen die darin enthaltene Insinuation, dass ich »*Manches*« aus einer wenig bekannten Abhandlung des genannten Herrn »*neuerdings publicirt*« haben solle, wurde nicht nur unmittelbar nach deren Veröffentlichung und an der Stelle ihres Erscheinens (Monatsh. Jahrg. 9, p. 46) von mir Verwahrung eingelegt, sondern ich habe auch noch in einem bereits Ende März 1898 zur Ausgabe gelangten Aufsätze (Mathem. Annalen, Bd. 50. p. 443 ff.) ausführlich dargelegt, dass Herr LERCH nach Lage der Sache überhaupt nicht berechtigt erscheine, irgendwelche nennenswerthen Prioritäts-Ansprüche mir gegenüber geltend zu machen, selbst wenn dies in *angemessenerer*, als der von ihm gewählten Form geschehen wäre (a. a. O. p. 443—447), und dass er auch in anderer Hinsicht, soweit jene Note an eine meiner früheren Arbeiten anknüpft, einer schiefen, zu falschen Auffassungen verleitenden Darstellungsweise sich bedient habe (a. a. O. p. 455, 456).

Da nichtsdestoweniger die *mehr als ein Jahr später* gedruckte französische Übersetzung die von mir gemachten Einwendungen vollständig ignorirt und überhaupt keinerlei andere Correctur enthält, als dass »*Manches*«, was ich Herrn LERCH entlehnt haben soll, inzwischen zu einem »*beaucoup*« angewachsen ist (a. a. O. p. 376), so sehe ich mich veranlasst, jene meine Erwiderung in ausdrückliche Erinnerung zu bringen und im übrigen auf die oben näher bezeichneten Stellen hinzuweisen.

München, im Mai 1900.

ALFRED PRINGSHEIM.

SUR LES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES DE LA FORME

$$x^\lambda + y^\lambda = cz^\lambda$$

PAR

EDMOND MAILLET

A PALAISEAU.

Nous nous proposons d'établir ici les résultats suivants:

I. Soit λ un nombre 1^{er} non exceptionnel.¹ L'équation indéterminée

$$x^\lambda + y^\lambda = A\lambda^{k\lambda+\beta}z^\lambda$$

($k\lambda + \beta \geq 1$, $\beta = 0$ ou 1) est impossible en nombres entiers réels x, y, z 1^{ers} entre eux deux à deux et à λ , quand A est réel et égal à 1 ou $r_1^{b_1} \dots r_i^{b_i}$, r_1, \dots, r_i étant des nombres premiers différents, différents de λ , et appartenant (mod λ) à des exposants f_1, \dots, f_i tels que

$$\sum_1^i \frac{1}{f_m} \leq \frac{\lambda-3}{\lambda-1}.$$

C'est en particulier le cas quand $A = r_1^{b_1}$, $r_1 \not\equiv 1 \pmod{\lambda}$.

II. L'équation indéterminée

$$x^\lambda + y^\lambda = r_1^{b_1}z^\lambda$$

(λ 1^{er} non exceptionnel, r_1 1^{er}, $b_1 < \lambda$) est impossible en nombres entiers réels:

¹ Nous appelons d'après KUMMER (Journ. de LIOUVILLE, 1851, t. 16 et Abh. der Akad. d. Wissensch., Berlin, an. 1857 et suiv.) nombre 1^{er} non exceptionnel tout nombre 1^{er} $\lambda \geq 5$ qui ne divise le numérateur d'aucun des $\frac{\lambda-3}{2}$ premiers nombres de BERNOULLI. Tout nombre 1^{er} ≥ 5 et ≤ 100 autre que 37, 59 ou 67 est non exceptionnel.

1^o, quand $r_1^b \equiv -1 + c_1 \lambda \pmod{\lambda^2}$, quel que soit λ , c_1 étant un au moins des nombres $1, 2, \dots, \lambda - 1$, qui dépend de λ ;

2^o, quand $\lambda = 5, 7$, ou 17 et $r_1^b \equiv 4 \pmod{\lambda^2}$,

3^o, quand $\lambda = 11$ et $r_1^b \equiv 5$ ou $47 \pmod{11^2}$;

4^o, quand $\lambda = 13$ et $r_1^b \equiv 17 \pmod{13^2}$.

III. L'équation indéterminée ¹

$$x^7 + y^7 = cz^7$$

est impossible en nombres entiers réels quand c est 1^{er} et d'une des formes $49k \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, -8, \pm 9, \pm 10, -15, \pm 16, -22, \pm 23$ ou ± 24 .

IV. L'équation indéterminée

$$x^\lambda + y^\lambda = \lambda z^\lambda$$

(λ 1^{er} non exceptionnel) est impossible en nombres entiers.

Les méthodes qui nous ont conduit à ces résultats permettraient d'ailleurs d'obtenir une foule de résultats analogues pour les équations de la forme $x^\lambda + y^\lambda = cz^\lambda$, c ayant d'autres valeurs que celles indiquées ci-dessus.

I.

Lemme. Soit λ un nombre 1^{er} non exceptionnel: l'équation

$$(1) \quad u^\lambda + v^\lambda = E(\alpha)(1 - \alpha)^{\mu\lambda - \beta} Aw^\lambda \quad (\mu > 0, \beta = 0 \text{ ou } 1)$$

est impossible en nombres entiers complexes u, v, w (u et v n'étant pas idéaux), 1^{ers} entre eux deux à deux et à λ et formés avec une racine $\lambda^{\text{ème}}$ α de l'unité, $E(\alpha)$ étant une unité complexe, et A un nombre entier complexe 1^{er} à λ et égal à 1 ou de la forme $q_1^{a_1} \dots q_i^{a_i}$, où q_1, \dots, q_i sont des facteurs 1^{ers} différents, idéaux ou non, avec $i \leq \lambda - 3$.²

¹ Le cas où $\lambda = 5$ a été étudié par DIRICHLET (Oeuvres complètes) et LEBESGUE (Journ. de LIOUVILLE, 1843).

² KUMMER a établi cette propriété dans le cas particulier où $A = 1, \beta = 0$ (Journ. de LIOUVILLE, loc. citat., p. 494). Nous abrégons la démonstration, qui est une extension de celle donnée par KUMMER pour ce cas particulier.

En effet, on a

$$(2) \quad u^\lambda + v^\lambda = (u+v)(u+\alpha v) \dots (u+\alpha^{\lambda-1}v);$$

si l'on a pris

$$u = a + (1 - \alpha)^2 Q,$$

$$v = b + (1 - \alpha)^2 R,$$

(a, b entiers non complexes, Q, R entiers complexes), ce qui est toujours possible, on a

$$(3) \quad u + v \equiv 0 \pmod{(1 - \alpha)^2};$$

$u + \alpha^r v$ et $u + \alpha^s v$ ($r \neq s$) ont pour plus grand commun diviseur $(1 - \alpha)$; dès lors parmi les facteurs du 2^{ème} membre de (2) on en a deux au moins $u + \alpha^r v, u + \alpha^s v$, ($r > 0, s > 0, r \neq s$) qui ne sont divisibles par aucun des nombres q_1, q_2, \dots, q_i et tels que

$$(4) \quad \begin{cases} u + \alpha^r v = (1 - \alpha) e_r(\alpha) t_r^\lambda(\alpha), \\ u + \alpha^s v = (1 - \alpha) e_s(\alpha) t_s^\lambda(\alpha), \end{cases}$$

$e_r(\alpha), e_s(\alpha)$ étant des unités complexes, $t_r^\lambda(\alpha), t_s^\lambda(\alpha)$ des puissances $\lambda^{\text{èmes}}$ exactes non idéales; par suite $t_r(\alpha), t_s(\alpha)$ sont des nombres complexes véritables (wirklich);¹ ils sont premiers entre eux. On en conclut

$$(5) \quad u + v = (1 - \alpha)^{n\lambda - \lambda + 1 - \beta} E'(\alpha) A_1 w_1(\alpha)^\lambda,$$

où $E'(\alpha)$ est une unité complexe, $A_1 w_1(\alpha)^\lambda$ est un nombre complexe véritable: t_r, t_s et w_1 sont premiers entre eux deux à deux, et premiers à λ .

D'abord, d'après (3) et (4), (1) est impossible quand $\mu\lambda < \lambda + 1$, c'est à dire, quand $\mu = 1$: supposons

$$(6) \quad \mu > 1.$$

(4) et (5) donnent

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha^r & e_r t_r^\lambda \\ 1 & \alpha^s & e_s t_s^\lambda \\ 1 & 1 & (1 - \alpha)^{n\lambda - \lambda - \beta} E' A_1 w_1^\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

¹ Nous disons que le nombre $f(\alpha)$ est existant ou véritable quand il existe un nombre complexe véritable ayant les mêmes facteurs 1^{ers} idéaux que $f(\alpha)$ avec le même degré de multiplicité.

ou

$$(7) \quad t_r^\lambda - \varepsilon t_s^\lambda = E_1(\alpha) A_1(1 - \alpha)^{n\lambda - \lambda - \beta} w_1^\lambda,$$

en posant

$$\varepsilon = \frac{e_s(1 - \alpha^s)}{e_r(1 - \alpha^r)},$$

$$E_1 = \frac{E'(a^r - a^s)}{e_r(1 - \alpha^s)}.$$

ε et E_1 sont des unités complexes. D'après (6) et (7)

$$t_r^\lambda - \varepsilon t_s^\lambda \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

puisque $\lambda = \varepsilon_1(1 - \alpha)^{\lambda-1}$, ε_1 étant une unité complexe; t_r et t_s étant des entiers complexes véritables, on a

$$t_r^\lambda \equiv c, \quad t_s^\lambda \equiv c' \pmod{\lambda},$$

c et c' étant des entiers réels, et

$$c - \varepsilon c' \equiv 0 \pmod{\lambda};$$

ε est donc la puissance $\lambda^{\text{ème}}$ d'une unité complexe ε' ; posant

$$t_r = u_1, \quad \varepsilon' t_s = v_1,$$

(7) devient

$$(8) \quad u_1^\lambda + v_1^\lambda = E_1 A_1(1 - \alpha)^{n\lambda - \lambda - \beta} w_1^\lambda,$$

équation qui est une conséquence de (1). Cette équation est de la même forme que (1), et l'on peut raisonner sur elle comme on l'a fait sur (1): elle est impossible si $\mu - 1 = 1$; si $\mu - 1 > 1$, on est conduit à une nouvelle équation de la forme (8), où $1 - \alpha$ a pour exposant $\mu\lambda - 2\lambda - \beta$, et ainsi de suite. On sera donc toujours finalement conduit à une impossibilité, car, après la $(\mu - 1)^{\text{ème}}$ opération, on obtient une équation où l'exposant de $1 - \alpha$ est $\lambda - \beta$, équation impossible d'après ce qu'on a vu.

c. q. f. d.

Théorème I. Soit λ un nombre 1^{er} non exceptionnel. L'équation indéterminée

$$(9) \quad x^\beta + y^\lambda = Ax^{\lambda\lambda+\beta} z^\lambda,$$

($k\lambda + \beta \geq 1$, $\beta = 0$ ou 1) est impossible en nombres entiers réels x, y, z ^{1ers} entre eux deux à deux et à λ , quand A est réel et égal à 1 ou $r_1^{d_1} \dots r_i^{d_i}$, r_1, \dots, r_i étant des nombres premiers différents, différents de λ , et appartenant $(\text{mod } \lambda)$ à des exposants f_1, \dots, f_i tels que

$$(10) \quad \sum_{i=1}^i \frac{1}{f_i} \leq \frac{\lambda - 3}{\lambda - 1}.$$

En effet, r_m possède $\frac{\lambda - 1}{f_m}$ facteurs premiers, idéaux ou non.¹ D'après (10), les conditions supposées dans l'énoncé du lemme précédent sont réalisées: A a au plus $\lambda - 3$ facteurs premiers différents, et, d'après

$$(k\lambda + \beta)(\lambda - 1) \equiv -\beta \pmod{\lambda},$$

(9) est de la forme (1). Le théorème I est alors une conséquence du lemme précédent.

Corollaire. Tout étant posé comme ci-dessus, l'équation (9) n'est possible quand $A = r_1^{d_1}$ (r_1 ^{1er} à λ et ^{1er}) que si r_1 est $\equiv 1 \pmod{\lambda}$.

En effet, faisant $i = 1$, r_1 appartient $(\text{mod } \lambda)$ à l'exposant f_1 , c'est à dire² que $r_1^{f_1}$ est la plus petite puissance de r_1 , qui soit $\equiv 1 \pmod{\lambda}$. Pour que le théorème soit applicable, il suffit qu'on ait

$$(3) \quad \frac{1}{f_1} \leq \frac{\lambda - 3}{\lambda - 1}.$$

Quand $f_1 = 1$, $r_1 \equiv 1 \pmod{\lambda}$, cette condition n'a pas lieu; mais elle est satisfaite quand $f_1 \geq 2$, puisque $\lambda \geq 5$, car alors elle a lieu si

$$\lambda - 1 \leq 2\lambda - 6, \quad \text{ou} \quad 5 \leq \lambda.$$

II.

Le théorème précédent permet de démontrer *complètement*, ce qu'on n'avait pu faire, croyons-nous, jusqu'ici, l'impossibilité d'une foule d'équa-

¹ KUMMER, Journ. de LIOUVILLE, t. 16, p. 431 et suiv.

² Voir par ex. DIRICHLET, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 1879, p. 63, ou SERRET, Alg. Sup., t. 2, 1885, p. 48.

tions indéterminées en nombres entiers de la forme $x' + y' = cz'$, pour λ non exceptionnel et < 100 ; absolument comme les méthodes de KUMMER seules ont permis jusqu'ici de démontrer *complètement* l'impossibilité de $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ pour $\lambda \leq 100$ et > 7 .¹

Considérons le cas où $c = r_1^{b_1}$, et soit l'équation indéterminée en nombres entiers

$$(12) \quad x + y = r_1^{a_1} z.$$

Si l'on a x, y, z *1^{ers}* entre eux deux à deux, nous distinguerons les trois cas suivants:

1^o, $z \equiv 0 \pmod{\lambda}$; 2^o, x ou y , x par exemple $\equiv 0 \pmod{\lambda}$; 3^o, x, y, z *1^{ers}* à λ .

Je dis que, quand on suppose x, y, z non *1^{ers}* entre eux deux à deux on peut ramener l'équation en question à une équation analogue comprise dans l'un des trois cas précédents.

En effet, si x, y, z ont un facteur commun p , on pourra supprimer dans (12) le facteur p' commun aux deux membres. Si non, si x et y ont un facteur *1^{er}* commun p , ou bien on aura $p \neq r_1$, et p diviserait z , ce qu'on ne suppose pas, ou bien $p = r_1$; si la plus haute puissance de r_1 qui divise à la fois x et y est $r_1^{a_1}$, $r_1^{a_1} z^\lambda$ est divisible par $r_1^{a_1 \lambda}$, et, puisque z est *1^{er}* à r_1 , $a_1 \lambda \leq b_1$; l'équation (12) se ramène à

$$\left(\frac{x}{r_1^{a_1}}\right)^\lambda + \left(\frac{y}{r_1^{a_1}}\right)^\lambda = r_1^{a_1 \lambda - a_1'} z'^\lambda,$$

où $\frac{x}{r_1^{a_1}}$ et $\frac{y}{r_1^{a_1}}$ n'ont plus le facteur commun r_1 . Supposons maintenant que x et y n'aient pas de facteur commun: si x ou y , x par exemple, a en commun avec z le facteur *1^{er}* p , ce facteur devrait diviser y .

Il en résulte que l'on peut toujours supposer dans (12) x, y, z *1^{ers}* entre eux deux à deux, sans quoi (12) se ramène à une équation de la même forme

$$(13) \quad x^\lambda + y^\lambda = r_1^{d_1} z^\lambda,$$

avec $d_1 = b_1 - \theta \lambda$, et où x, y, z sont *1^{ers}* entre eux deux à deux.

¹ Voir aussi les rappels des résultats indiqués par LEBESGUE (Journal de LIOUVILLE, t. 5, 1840, p. 184) et LIOUVILLE (id., p. 360) pour les équations indéterminées $x^{2n} + y^{2n} = z^2$, $x^{2n} - y^{2n} = 2z^n$.

Si $b_1 < \lambda$, (13) coïncide avec (12), et, pour montrer que (12) est impossible, il suffit de l'établir quand x, y, z sont 1^{ers} entre eux deux à deux. Supposons $b_1 < \lambda$.

$$1^{\circ}, z \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

On appliquera le corollaire du lemme précédent: (12) est impossible si $r_1 \not\equiv 1 \pmod{\lambda}$, pourvu que λ ne soit pas exceptionnel.

$$2^{\circ}, x \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

(12) donne

$$(14) \quad y^{\lambda} \equiv r_1^{b_1} z^{\lambda} \pmod{\lambda^2}.$$

y et z étant premiers à λ , on peut trouver un nombre $\alpha \not\equiv 0$ et $< \lambda$ tel que $y \equiv \alpha z \pmod{\lambda}$. (14) donnera

$$\alpha^{\lambda} \equiv r_1^{b_1} \pmod{\lambda^2},$$

$$\alpha \equiv r_1^{b_1} \pmod{\lambda},$$

d'où

$$(15) \quad (r_1^{b_1})^{\lambda} \equiv r_1^{b_1} \pmod{\lambda^2}.$$

Pour vérifier si cette congruence a lieu on pourra évidemment remplacer dans le 1^{er} membre $r_1^{b_1}$ par son plus petit résidu $\pmod{\lambda}$, et l'on se servira d'une table des résidus 1^{er} $\pmod{\lambda^2}$. Donc:

Le 2^{ème} cas n'est possible que si la congruence (15) a lieu.

Le même raisonnement s'applique identiquement à l'équation indéterminée

$$(16) \quad ax^{\lambda} + by^{\lambda} = cz^{\lambda},$$

où x, y, z sont 1^{ers} entre eux deux à deux, $x \equiv 0 \pmod{\lambda}$, $b \equiv 1 \pmod{\lambda^2}$. Elle n'est possible avec ces hypothèses que si

$$(15') \quad c^{\lambda} \equiv c \pmod{\lambda^2}$$

a lieu.

Exemples: si $c \equiv 2$ ou $4 \pmod{\lambda^2}$, on devra avoir $2^{\lambda} - 2 \equiv 0$ ou $4^{\lambda} - 4 \equiv 0 \pmod{\lambda^2}$, ce qui est impossible quand $\lambda < 31$; de même quand

¹ Nous en avons donné une pour $\lambda \leq 31$ et $\lambda = 197$ (Assoc. franç. pour l'avanc. des Sc., Congrès de St Etienne, 1897, Mémoires, p. 166 et suiv).

$\lambda = 11$ et $c \equiv 5$ ou $47 \pmod{11^2}$; de même quand $\lambda = 13$ et $c \equiv 17 \pmod{13^2}$; de même enfin quand $c \equiv -1 \pmod{\lambda}$ avec $c \neq k\lambda^2 - 1$, λ étant quelconque.

3^o, x, y, z 1^{ers} à λ .

Nous avons établi¹ le théorème suivant:

Théorème. Pour que l'équation indéterminée

$$(17) \quad ax^{\lambda'} + by^{\lambda'} = cz^{\lambda'}$$

(λ 1^{er} , x, y, z 1^{ers} entre eux 2 à 2 et à λ , a, b, c 1^{ers} entre eux 2 à 2 et à λ) admette un système de solutions, il est nécessaire que la congruence

$$(18) \quad a + b\eta_0^{\lambda'} = c(\alpha + \beta\eta_0)^{\lambda'} \pmod{\lambda^{t+1}},$$

où α, β sont les nombres $< \lambda$ qui satisfont aux congruences

$$a \equiv c\alpha, \quad b \equiv c\beta \pmod{\lambda},$$

admette une solution $\eta_0 > 0$, $< \lambda$ et telle que $\alpha + \beta\eta_0 \not\equiv 0 \pmod{\lambda}$.

Pour appliquer ceci à (12), on prendra $t = 1$, $a \equiv b \equiv 1 \pmod{\lambda^2}$, $\alpha \equiv \beta \pmod{\lambda}$; (18) donne

$$1 + \eta_0^{\lambda} \equiv c\lambda^2(1 + \eta_0)^{\lambda} \pmod{\lambda^2},$$

et par suite

$$(19) \quad c^{\lambda}(1 + \eta_0^{\lambda}) \equiv c(1 + \eta_0)^{\lambda} \pmod{\lambda^2},$$

qui doit avoir une solution η_0 avec $0 < \eta_0 < \lambda$ et $\eta_0 \not\equiv -1 \pmod{\lambda}$, quand $c \equiv \lambda_1^{\lambda} \pmod{\lambda^2}$, si (17) est alors possible.

On sait que si $c \equiv c_0 + c_1\lambda \pmod{\lambda^2}$ ($c_0 < \lambda$, $c_1 < \lambda$) il y a toujours, pour chaque valeur de c_0 au moins deux valeurs de c_1 telles que (19) n'ait pas de solution. Si $c = \lambda_1^{\lambda}$ est tel que c_0 et c_1 soient parmi ces valeurs, (19), $ax^{\lambda} + by^{\lambda} = cz^{\lambda}$, et a fortiori (12) seront impossibles. Prenant en particulier $c_0 = \lambda - 1$ il y a au moins une valeur de c_1 telle que $c_0 + c_1\lambda \neq k\lambda^2 - 1$, et pour laquelle (12) est impossible.² On voit de même dans le 3^{ème} cas que

¹ Assoc. franç., loc. citat., p. 159.

² Il y en a même deux au moins, car si l'on se reporte à la p. 162 de la note précitée de l'Assoc. franç., on voit que $c_0 = \lambda - 1$, $c_0 + c_1\lambda = k\lambda^2 - 1$ donnent $\varepsilon = 1$, c'est à dire que la valeur de c_1 correspondante est de celles pour lesquelles

$$\lambda_0^{\lambda} \equiv \varepsilon(c_0 + c_1\lambda) \pmod{\lambda^2}$$

(19) et (12) sont impossibles quand $c \equiv 4 \pmod{\lambda^2}$ avec $\lambda = 5, 7$ ou 17 , et quand $\lambda = 11$ avec $c \equiv 5$ ou $47 \pmod{11^2}$, ou $\lambda = 13$ avec $c \equiv 17 \pmod{13^2}$. On le vérifiera facilement avec une table de résidus $\pmod{\lambda^2}$.

En rapprochant les résultats obtenus nous obtenons les théorèmes suivants:

Théorème II. Soit l'équation indéterminée $ax^k + by^k = cz^k$ ($\lambda \nmid 1^{\text{er}}$):

1°. Si $a \equiv b \equiv 1 \pmod{\lambda^2}$, cette équation est impossible en nombres entiers premiers entre eux 2 à 2 et à λ quand $c \equiv -1 + c_1\lambda \pmod{\lambda^2}$ c_1 étant un au moins des nombres $1, 2, \dots, \lambda-1$, qui dépend de λ , ou encore quand $c \equiv 4 \pmod{\lambda^2}$ avec $\lambda = 5, 7$ ou 17 , quand $\lambda = 11$ avec $c \equiv 5$ ou $47 \pmod{11^2}$, ou $\lambda = 13$ avec $c \equiv 17 \pmod{13^2}$.

2°. Si $b \equiv 1 \pmod{\lambda^2}$, cette équation est impossible en nombres entiers premiers entre eux 2 à 2 et tels que $x \equiv 0 \pmod{\lambda}$ quand $c \equiv -1 \pmod{\lambda}$, avec $c \neq k\lambda^2 - 1$, quel que soit λ , ou encore quand $c \equiv 2$ ou $4 \pmod{\lambda^2}$ avec $\lambda \leq 31$, ou encore quand $\lambda = 11$ avec $c \equiv 5$ ou $47 \pmod{11^2}$, ou $\lambda = 13$ avec $c \equiv 17 \pmod{13^2}$.

Appliquant ceci à (12), et tenant compte du corollaire du lemme I et des remarques faites sur l'équation (12) pour le cas où x, y, z ne seraient pas premiers entre eux 2 à 2, nous obtenons les résultats suivants:

Théorème III. L'équation indéterminée

$$x^\lambda + y^\lambda = r_1^{b_1} z^\lambda$$

($\lambda \nmid 1^{\text{er}}$ non exceptionnel, $r_1 \nmid 1^{\text{er}}$, $b_1 < \lambda$) est impossible en nombres entiers:

1°, quand $r_1^{b_1} \equiv -1 + c_1\lambda \pmod{\lambda^2}$,¹ c_1 étant un au moins des nombres $1, 2, \dots, \lambda-1$, qui dépend de λ .

2°, quand $\lambda = 5, 7$, ou 17 et $r_1^{b_1} \equiv 4 \pmod{\lambda^2}$.

3°, quand $\lambda = 11$ et $r_1^{b_1} \equiv 5$ ou $47 \pmod{11^2}$.

4°, quand $\lambda = 13$ et $r_1^{b_1} \equiv 17 \pmod{13^2}$.

On pourrait évidemment trouver une foule d'autres équations $x^k + y^k = cz^k$ impossibles par les mêmes procédés. A titre d'exemple cherchons encore tout ce que ceux-ci peuvent donner quand $\lambda = 7$, et $c \nmid 1^{\text{er}}$ et 1^{er} à 7.

¹ On sait en particulier que si $b_1 = 1$, on a une infinité de valeurs de r_1 satisfaisant à l'énoncé pour chaque valeur de λ . D'après une remarque antérieure, il y a même au moins deux valeurs de c_1 pour lesquelles le théorème est vrai.

Supposant x, y, z 1^{ers} entre eux deux à deux et examinant les trois cas distingués précédemment nous trouvons:

1^o, dans le 3^{ème} cas $x^2 + y^2 = cz^2$ est impossible quand c n'est $\equiv (\text{mod } 49)$ à aucun des nombres 0, ± 1 , ± 2 , ± 11 , ± 12 , ± 13 , ± 17 , ± 18 , ± 19 , ou ± 20 .

2^o, dans le 1^{er} cas $x^2 + y^2 = cz^2$ est impossible quand c est $\equiv 1 (\text{mod } 7)$.

3^o, dans le 2^{ème} cas $x^2 + y^2 = cz^2$ est impossible quand c n'est pas résidu de puissance 7^{ème} (mod 49), c'est-à-dire quand $c \equiv 1, -19, -18, 18, 19$ ou -1 .

On ¹ en conclura:

Théorème IV. L'équation indéterminée $x^2 + y^2 = cz^2$ est impossible en nombres entiers quand c est 1^{er}, 1^{er} à 7, et d'une des formes

$$49k \pm 3, \pm 4, \pm 5, + 6, - 8, \pm 9, \pm 10, - 15, \pm 16, - 22, \\ + 23 \text{ ou } + 24.$$

III.

Théorème V. L'équation indéterminée

$$x^\lambda + y^\lambda = \lambda z^\lambda$$

(λ 1^{er} non exceptionnel) est impossible en nombres entiers.

On voit comme antérieurement qu'il suffit de considérer le cas où x, y, z sont 1^{ers} entre eux deux à deux. Alors z seul peut être divisible par $1 - \alpha$. Si $(1 - \alpha)^k$ ($k \geq 0$) est la plus haute puissance de $1 - \alpha$ qui divise z , l'équation proposée se ramène à

$$x^\lambda + y^\lambda = \varepsilon(\alpha) z_1^\lambda (1 - \alpha)^{\lambda k + \lambda - 1},$$

où x, y, z_1 sont 1^{ers} entre eux deux à deux et à λ . Elle est impossible d'après un lemme précédent.

Palaiseau, 15 juillet 1899.

Une partie de ces résultats est déjà indiquée dans notre note précitée des Mémoires de l'Assoc. franç.

ON CERTAIN DISCONTINUITIES CONNECTED WITH PERIODIC ORBITS

BY

S. S. HOUGH
of CAPE TOWN.

In the final part of his work on *Celestial Mechanics* which has lately appeared M. POINCARÉ devotes some space to the consideration of the orbits discussed by Prof. DARWIN in his recent memoir on *Periodic Orbits*.¹ From considerations of analytical continuity M. POINCARÉ has been driven to the conclusion that Prof. DARWIN is in error in classifying together certain orbits of the form of a figure-of-8 and others which he designates as satellites of the class A . "Je conclus" says POINCARÉ "que les satellites A instables ne sont pas la continuation analytique des satellites A stables. Mais alors que sont devenus les satellites A stables?"

Besides the question here raised by POINCARÉ a second immediately presents itself. After explaining the disappearance of the stable orbits A it is necessary also to give a satisfactory account of the origin of the unstable orbits A . These questions had occupied my mind prior to the publication of M. POINCARÉ's work, and the present paper contains in substance the conclusions at which I had arrived in connection with them.

It will be seen that the difficulties which have occurred in following up the changes in form of DARWIN's orbits arise in some measure from the omission to take into account the orbits described in the present paper as 'retrograde', and the failure to recognize the analytical continuity between

¹ Acta Mathematica, vol. 21.

these orbits and the direct orbits. It had been my intention to defer publication of my conclusions until I had made an exhaustive examination of the retrograde orbits with something approaching the completeness devoted by DARWIN to the direct orbits, but as I see little prospect of obtaining the necessary leisure for so vast an undertaking in the immediate future I have thought it desirable to announce the results at which I have arrived, with some confidence that a closer investigation will prove them to be correct in their essential features though possibly subject to modification as regards details largely of a speculative character.

A summary of the contents of the paper and of the conclusions derived will be found in the last section.

§ 1. *On the form of an orbit in the neighbourhood of a point of zero force.*

We shall throughout adopt the notation of Prof. DARWIN. Thus S will denote the Sun, J a planet Jove, ν the ratio of the mass of the Sun to that of Jove whose mass is unity, n the angular velocity of J about S .

Then the equations of motion of a satellite of infinitesimal mass referred to rectangular axes rotating with uniform angular velocity n about the centre of gravity of S and J , the origin being at the point S and the axis of x coinciding with the line SJ , are

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \end{cases}$$

where

$$(2) \quad 2\Omega = \nu \left(r^2 + \frac{z^2}{r} \right) + \rho^2 + \frac{z^2}{\rho},$$

the length SJ being taken as unity, and r, ρ denoting the distances of the satellite from S, J respectively.

These equations admit of JACOBI's integral

$$(3) \quad V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2\Omega - C,$$

where V denotes the velocity of the satellite relatively to the moving axes.

The points of zero force at which a satellite might remain in a position of relative equilibrium are determined by the equations

$$(4) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0.$$

The positions of these points has been examined by DARWIN who finds that there are three of them situated on the line SJ and two more at the vertices of the equilateral triangles described on the line SJ .

Now suppose that x_0, y_0 are the coordinates of one of these points and that ξ, η are the coordinates of the satellite referred to it as origin, so that

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta.$$

Then if ξ, η be sufficiently small we may expand $\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \frac{\partial \Omega}{\partial y}$ in ascending powers of ξ, η and by TAYLOR's theorem we shall obtain

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \xi \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x_0^3} + \eta \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x_0 \partial y_0} + \frac{1}{2} \left[\xi^2 \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x_0^3} + 2\xi\eta \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x_0^2 \partial y_0} + \eta^2 \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x_0 \partial y_0^2} \right] + \dots,$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} = \xi \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x_0 \partial y_0} + \eta \frac{\partial^3 \Omega}{\partial y_0^2} + \frac{1}{2} \left[\xi^2 \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x_0^2 \partial y_0} + 2\xi\eta \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x_0 \partial y_0^2} + \eta^2 \frac{\partial^3 \Omega}{\partial y_0^3} \right] + \dots$$

Thus in the immediate neighbourhood of a point of zero force x_0, y_0 the motion of the satellite will be approximately determined by the equations

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \xi}{dt^2} - 2n \frac{d\eta}{dt} = \xi \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x_0^3} + \eta \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x_0 \partial y_0}, \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} + 2n \frac{d\xi}{dt} = \xi \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x_0 \partial y_0} + \eta \frac{\partial^3 \Omega}{\partial y_0^2}, \end{cases}$$

where terms involving squares and products of ξ, η have been omitted. These equations being linear, it will be possible to obtain particular so-

tions of them by assuming for ξ , η the forms $ae^{\lambda'}$, $be^{\lambda''}$. On substituting these forms in the differential equations (5) we find

$$(6) \quad \begin{aligned} a\left(\lambda^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_0^2}\right) - b\left(2n\lambda + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_0 \partial y_0}\right) &= 0, \\ b\left(\lambda^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_0^2}\right) + a\left(2n\lambda - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_0 \partial y_0}\right) &= 0, \end{aligned}$$

whence, on eliminating a , b , we obtain for the determination of λ the biquadratic equation

$$\left(\lambda^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_0^2}\right)\left(\lambda^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_0^2}\right) + 4n^2\lambda^2 - \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_0 \partial y_0}\right)^2 = 0$$

or

$$(7) \quad \lambda^4 + \lambda^2 \left\{ 4n^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_0^2} \right\} + \left\{ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_0^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_0^2} - \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_0 \partial y_0} \right)^2 \right\} = 0.$$

The character of the motion indicated by the equations (5) will turn on the nature of the roots of this equation. Now the conditions implied by the equations (4) involve that the point x_0 , y_0 is a singular point of the curve belonging to the family $\Omega = \text{const.}$, which contains it, while the nature of the singularity for the different points of zero force has been examined by DARWIN. For those points which lie on the axis of x he finds that there will be two real intersecting branches, and thus at these points

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_0^2} \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_0^2} - \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_0 \partial y_0} \right)^2$$

will be negative.

Hence the values of λ^2 derivable from the equation (7) will be both real for these points, but they will be of opposite signs. Also at points on the axis of x

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_0 \partial y_0} = 0,$$

which introduces some simplification into the equations (6). We propose only to concern ourselves with the points of zero force which lie on the axis of x . Suppose that for one of these points the two values of λ^2 derivable from equation (7) are

$$\lambda^2 = \alpha^2, \quad \lambda^2 = -\beta^2,$$

where α, β are real quantities. We then obtain the following particular solutions of (5)

$$(i) \quad \xi = a_1 e^{\alpha t}, \quad \eta = \frac{\alpha^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1^2}}{2n\alpha} e^{\alpha t},$$

$$(ii) \quad \xi = a_2 e^{-\alpha t}, \quad \eta = -a_2 \frac{\alpha^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1^2}}{2n\alpha} e^{-\alpha t},$$

$$(iii) \quad \xi = a_3 e^{\beta i t}, \quad \eta = -a_3 \frac{\beta^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1^2}}{2n\beta i} e^{\beta i t},$$

$$(iv) \quad \xi = a_4 e^{-\beta i t}, \quad \eta = a_4 \frac{\beta^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1^2}}{2n\beta i} e^{-\beta i t},$$

and the general solution, involving the four arbitrary constants a_1, a_2, a_3, a_4 will be obtained by adding together these particular solutions.

If we put

$$a_1 + a_2 = h, \quad a_1 - a_2 = k, \quad a_3 + a_4 = H, \quad a_3 - a_4 = -Ki,$$

and write for brevity γ^2 in place of $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1^2}$, we obtain as the general solution of (5) involving four arbitrary constants h, k, H, K

$$(8) \quad \begin{cases} \xi = h \cosh \alpha t + k \sinh \alpha t + H \cos \beta t + K \sin \beta t, \\ \eta = \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{2n\alpha} (h \sinh \alpha t + k \cosh \alpha t) - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2n\beta} (H \sin \beta t - K \cos \beta t). \end{cases}$$

This solution being free from imaginary quantities is capable of a real physical interpretation.

To avoid circumlocution we shall speak of the region surrounding a point of zero force L within which the equations (5) may be regarded as giving an approximation to the motion as the 'domain' of L . If then a satellite be initially in the domain of L it will be possible to determine four constants h, k, H, K so that the equations (8) will represent its motion at least for a finite time, but the terms involving the hyperbolic functions will rapidly increase with t so that the satellite will depart from

the domain of L , and only a short length of its path will be sensibly represented by these equations.

In like manner whatever be the initial circumstances, if the satellite should at any instant enter the domain of L , it will be possible to determine four arbitrary constants h, k, H, K so that the equations (8) will represent its motion so long as it remains within this domain. Let us then examine the character of the motion represented by the equations (8).

First suppose that a satellite is describing a path within the domain of L such that $h = 0, k = 0$. Its motion will then be given by

$$(9) \quad \begin{cases} \xi = H \cos \beta t + K \sin \beta t, \\ \eta = -\frac{\beta^2 + \gamma^2}{2n\beta} (H \sin \beta t - K \cos \beta t). \end{cases}$$

Without loss of generality we may put $K = 0$, since this evidently only involves a change in the epoch from which t is measured. We thus have

$$\xi = H \cos \beta t, \quad \eta = -\frac{\beta^2 + \gamma^2}{2n\beta} H \sin \beta t.$$

The path of the satellite referred to the moving axes is therefore elliptic and the satellite will not tend to leave the domain of L .

Next suppose that $H = 0, K = 0$ so that the motion is given by

$$(10) \quad \begin{cases} \xi = h \cosh \alpha t + k \sinh \alpha t, \\ \eta = \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{2n\alpha} (h \sinh \alpha t + k \cosh \alpha t). \end{cases}$$

The path of the satellite is now a hyperbola whose centre is at L . The satellite will enter the domain of L along one branch of the hyperbola and after traversing the part of the curve which lies within the domain it will recede along another branch. Of course the path before entering and after leaving the domain of L may depart rapidly from the infinite branches of the hyperbola, but we are at present only concerned with the form of the orbit within the domain of L .

A special case of importance occurs when the path within the domain of L is such that $h^2 = k^2$. The hyperbola represented by (10) then degenerates into a pair of straight lines, coincident with the asymptotes.

If h, k have like signs the satellite will then be continually receding from L along a straight line, whereas if h, k have unlike signs it will be continually approaching L , but it will not reach L until $t = +\infty$. In fact the nearer it approaches to L the smaller does its velocity become, so that it will not be able to reach this point within a finite time.

If now the initial circumstances of projection undergo continuous change in such a manner that the satellite always enters the domain of L , and that its motion within the domain may be represented by the equations (10), the quantities h, k and therefore also $h^2 - k^2$ will vary continuously. It may happen that in the course of the change $h^2 - k^2$ will pass through the value zero and change sign. This will imply that the infinite branch of the hyperbola along which the satellite enters the domain will cross the asymptote, and that consequently immediately after the change in sign of $h^2 - k^2$ the satellite will recede along the second asymptote in the opposite direction to that in which it receded before the change. It follows that, if two satellites be projected simultaneously under initial circumstance which differ infinitesimally, but so that, when they enter the domain of L , the values of $h^2 - k^2$ for their two paths have infinitesimal values with opposite signs, the paths of the satellite though differing infinitesimally prior to entering the domain of L will have lost all similarity of character before they depart from this region. The nearer however the hyperbolic paths approach to the asymptotes the longer will the satellites take in passing round the vertices, and consequently the smaller the difference in the initial circumstances the longer will be the interval before the separation commences.

We have so far for simplicity supposed that the satellite moves within the domain of L either in an elliptic path (9) or in a hyperbolic path (10). In general however its path will be represented by (8) which indicates an elliptic path superposed upon a hyperbolic path. We may form a conception of this motion by supposing the satellite to move in an ellipse whose form is represented by (9) while the centre of this ellipse moves along the hyperbola represented by (10).

The character of the motion of the centre of the ellipse will then be to some extent shared by that of the satellite, but, when the major axis of the hyperbolic path becomes small, the time which the centre of the ellipse takes to move round the vertex of the hyperbola will increase and

the elliptic element of the motion will commence to shew its independent existence by the formation of loops in the orbit of the satellite. The nearer the hyperbola approaches to its asymptote the greater will be the number of loops described by the satellite prior to leaving the domain of L , until when the hyperbola actually coincides with an asymptote the number of loops will become infinite. The orbit of the satellite will then approach closer and closer to the simple elliptic orbit represented by (9), and will in fact be asymptotic to this orbit in the sense in which the term is used by POINCARÉ.

Except in the case just considered the satellite will finally recede from the domain of L in one of two essentially different ways according as the centre of the ellipse recedes along a branch of the hyperbola which approximates to one or other of the infinite arms of the second asymptote.

The 'asymptotic' orbit just dealt with is the limiting orbit which separates those which leave in one way from those which leave in the other.

§ 2. *Application to the Orbits of Professor Darwin.*

The results proved in the last section rigorously apply only to the very limited region surrounding a point of zero force within which the motion can be sensibly represented by the approximate equations (5), but there can be no reasonable doubt that the general characteristics will be maintained over a far more extensive field. A good illustration is furnished by the orbits traced by DARWIN.

For example the orbits of the 'oscillating satellites' figured in Darwin's plates are closely analogous to the elliptic orbits represented by our equations (8). They are in fact the orbits at which we should arrive by the continuous deformation of the elliptic orbits which would result from diminution of the constant of relative energy C . By the time C has attained the values for which the figures have been drawn, these orbits have lost their symmetrical form but are still roughly elliptic in character.

Next consider the non-periodic orbits traced on p. 177 of Darwin's memoir, viz: those started at right angles to the line SJ on the side of J remote from S with C equal to $39^{\circ}0$. As x_0 (the abscissa of the point

of projection) decreases and reaches a value in the neighbourhood of 1.095 the orbit begins to approach the region of the point of zero force L . It however recedes from this region towards the planet J after describing a loop. But when x_0 has the value 1.09375, or a smaller value, the orbit after passing near the orbit of the oscillating satellite no longer recedes towards the planet J , but towards the Sun S . As in the last section we may regard the motion of the satellite when in the neighbourhood of the point of zero force as consisting of two independent motions, (1) a motion in a closed periodic orbit similar to that of the oscillating satellite, (2) a bodily transference of this closed orbit in virtue of which each point of the orbit is carried along a curve analogous to the hyperbola of the last section. We may refer to these two parts of the motion briefly as the 'elliptic' and the 'hyperbolic' elements. Evidently the fate of a satellite after passing near L will turn on the character of the hyperbolic element of its motion, and the satellite will recede towards J or towards S according as the branch of the hyperbolic curve along which the elliptic orbit is carried recedes towards J or towards S .

The critical case which separates orbits receding towards J from those receding towards S , occurs when the hyperbolic element of the motion takes place in a curve which plays the part of the asymptotes in the last section. Each point of the periodic 'elliptic' orbit then tends towards a fixed limiting position, but it takes an infinite time for it to reach this position. Consequently the satellite will describe an infinite series of loops each of which approximates closer than the preceding to the orbit of the oscillating satellite a . If the hyperbolic element of the motion differs only very slightly from its asymptotic form a large but finite number of loops approximating to the orbit a will be described, but the satellite will ultimately recede either towards J or towards S according as the hyperbolic path lies on one side or the other of its critical form.

We are thus able to describe the manner in which the interval between the orbits $x_0 = 1.095$, $x_0 = 1.09375$ is to be filled up. As x_0 decreases from 1.095, loops, the first of which has already shewn its existence in the figure traced, will be formed in gradually increasing numbers and these will tend to approximate in figure to the orbit of the oscillating satellite; the path however will ultimately fall away in the direction of the planet J .

At length a stage will be reached when an infinite number of loops will be described before the satellite recedes. The orbit will then approach the orbit of the oscillating satellite asymptotically after the manner of the 'asymptotic orbits' treated of by POINCARÉ.¹

As x_0 still further decreases the satellite will after describing at first a large number of loops recede towards S . The number of loops described will however rapidly diminish with x_0 , until when $x_0 = 1.09375$ all trace of them will have disappeared.

It will save circumlocution if we make use of the terms 'lunar' and 'planetary' to distinguish those of our orbits which, after passing near the orbit of the oscillating satellite, recede towards J from those which recede towards S . These terms are however at present only to be used to describe the character of the motion in the course of a single revolution round the primary. Thus an orbit which is 'lunar' so far as its first approach to L is concerned might become 'planetary' after two or more revolutions round the primary.

The lunar and planetary orbits will be separated from one another by orbits which are asymptotic to the orbit of the oscillating satellite. These orbits we shall speak of briefly as 'asymptotic' orbits.

With large values of C , DARWIN has shewn that any infinitesimal body moving in the plane of the orbit of J about S may be regarded either as a satellite, as an inferior planet, or as a superior planet, but that with smaller values of C it may be transferred from one category to another. The circumstances described in the present section are those which occur when an orbit is undergoing the change from that of a satellite to that of an inferior planet. It is clear that a similar sequence of events will occur when the orbit changes from that of a satellite or an inferior planet to that of a superior planet.

¹In consideration of the fact that the orbit is symmetrical with respect to the line SJ it will be asymptotic to the orbit of the oscillating satellite for $t = -\infty$ as well as for $t = +\infty$, and will thus furnish an interesting illustration of one of POINCARÉ's 'doubly asymptotic orbits'.

§ 3. *On the relative orbit of a satellite which approaches indefinitely close to its primary.*

Imagine a satellite P to be moving subject solely to the attraction of its primary J . The orbit will then be a conic section.

Let us suppose that the initial circumstances are such that the orbit is an ellipse of large eccentricity. At perijove the satellite will then pass very near to its primary. Further suppose that the initial circumstances are varied continuously in such a manner that the distance of the satellite at perijove diminishes without limit, while the length and position of the major axis remain invariable. The elliptic orbit will become more and more flattened until it becomes sensibly a straight line except through very small portions of its length at perijove and apojove.

The same will be true in whichever direction the satellite is moving in its orbit and the two orbits which correspond to the two different directions of projection will approach the same limiting rectilinear form.

It is clear that if we suppose all the circumstances remote from the primary to undergo continuous variation the two forms of orbit may be regarded as continuations of one another, the rectilinear orbit forming the connecting link between the direct and the retrograde orbits, though physically only the part of this path between two successive perijove passages can be regarded as having a real existence, owing to the collision which would ensue between the satellite and primary at the instant which corresponds to the time of perijove passage.

There will be a similar connection between the direct and the retrograde orbits if we suppose that the initial circumstances are more general in character, admitting of change in the length and position of the major axis. If the initial conditions vary continuously the length and position of the major axis will likewise vary continuously, and, provided only that the length retains a finite value at the critical rectilinear stage, the direct and the retrograde orbits will merge into one another.

Let us next consider the figures of the relative orbit, when the motion is referred to axes which rotate uniformly. The motion may then be regarded as taking place in a moving ellipse, the line of apses of which revolves uniformly in a direction opposite to that of the rotation of the

axes. We wish to consider the form of the relative orbit when this ellipse is very much flattened and approximates to the rectilinear form.

When the satellite is at perijove it is evident that the motion in the ellipse takes place very rapidly and therefore that the form of the path will resemble closely that which occurs when the axes are at rest. This results from the fact the axes can only be very slightly displaced during the passage of the satellite round Jove. The more eccentric the ellipse the more closely will the relative orbit correspond with the actual orbit. Thus the motion in the relative orbit will be direct or retrograde according as that in the actual orbit is direct or retrograde.¹

On the other hand when the satellite is in apojove the motion in the actual orbit will be very slow and the apparent motion in the relative orbit will be chiefly that due to the rotation of the axes themselves. Thus the apparent motion will be retrograde whatever be the direction of motion in the true orbit. It is then evident that the path from apojove will be of the form indicated in the annexed diagrams (figs 1 and 2) according as the motion in the true orbit is direct or retrograde. In these figures the axes are supposed to be rotating in a counter-clockwise direction, and the direction of motion of the satellite is indicated by arrowheads.

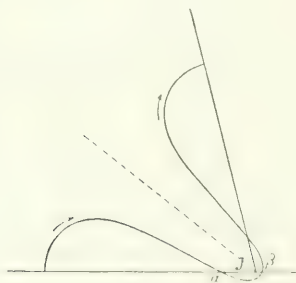


Fig. 1.

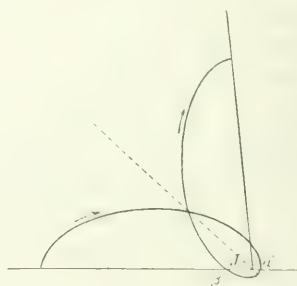


Fig. 2.

The critical form of orbit which corresponds with our previously rectilinear orbit, and which separates the orbits of the type represented in

¹ A 'direct' motion implies motion in the same sense as that of the rotation of the axes.

figure 1 from those of the type represented in figure 2, evidently possesses a cusp at J . Of course if a satellite moving in this orbit arrived at J a collision would occur and the physical continuity would be interrupted, but if we suppose that in the event of a collision the satellite rebounds without loss of energy in the direction opposite to that in which it fell into the primary the physical as well as the analytical continuity between the direct and retrograde orbits will be maintained.

So far we have regarded the satellite as moving subject to the attraction of J alone, but if it be moving under the disturbing influence of the Sun, its path when in the neighbourhood of J will still be governed by the laws of elliptic motion. If then all the circumstances remote from J undergo continuous variation in such a manner that the orbit approaches J and in the course of the change actually falls into J , it is evident that so far as its form in the immediate neighbourhood of J is concerned a series of changes will occur similar to that already described. The orbit will pass through the cusped form and after the critical stage the direction of the motion round J will be reversed. If at first the satellite described an open loop round J as in fig. 1, it would afterwards describe a closed loop as in fig. 2 and vice-versâ.

As the orbit approaches the critical form from either direction its form in the neighbourhood of J will approximate closer and closer to that of a parabola. Suppose α, α' are the points in which the orbits (figures 1 and 2) cut any line through J as the satellite approaches J and β, β' the points in which they cut this line as the satellite recedes. Then the points $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ will all ultimately coincide with J , but the tangents to the orbits at α, β , and at α', β' being ultimately tangents at the extremities of a focal chord of a parabola will in their limiting position be at right angles. These limiting positions will be the two bisectors of the angles between the line $\alpha\beta$ and the limiting position of the axis of the parabola, i.e. the tangent at the cusp of the limiting orbit.

It follows from the figures that though we might regard the point α' as the analytical continuation of α since both coincide with J at the critical stage, if we wished to maintain continuity in the direction of the curve at the point where it crosses a given line, such as $\alpha\beta$, we must regard the point β' of fig. 2 as the continuation of α fig. 1 and α' as the continuation of β .

§ 4. *Application to the orbits of Professor Darwin.*

Let us deal with those orbits which start from points on the line SJ at right angles to this line, and confine our attention to those for which the starting point lies outside SJ on the side of J remote from S . With a given value of the constant of relative energy two such orbits may be regarded as originating from each point, distinguishable by the initial direction of projection. We may without ambiguity designate these orbits as direct or retrograde according as the initial direction of motion is direct or retrograde.

It is now clear that if the starting point moves up towards J the direct and the retrograde orbits will approach the same limiting (cusped) form, and that so far as the circumstances in the remote parts of the orbits are concerned each form of orbit can be regarded as the analytical continuation of the other.

Next suppose that the region to which the starting point is confined is limited by a branch of the curve of zero velocity as in the figure (5) on page 177 of DARWIN's paper, and let us further suppose that the starting point moves up to its extreme limit in the opposite direction viz: the point M where the curve of zero velocity cuts SJ . Now the form of an orbit in the neighbourhood of the curve of zero velocity has been dealt with by DARWIN, who has shewn that at such a point the orbit will possess very large curvature. The limiting form will be cusped while the figures before and after the passage through the cusped form will be similar in character to those presented in our figures 1 and 2 above.

Hence again we see that as the starting point approaches M the direct and retrograde orbits will approach the same limiting cusped form, the cusp being at M on the curve of zero velocity. Likewise also the direct and retrograde orbits may be regarded as continuations of one another.

As the starting point P moves along the line of syzygies the direct and retrograde orbits may then be regarded as forming a continuous cycle as P moves backwards and forwards between J and M . In this cycle when P arrives at J or M the orbit will assume the cusped form and an interchange from the direct to the retrograde or vice versâ will occur.

The tendency of the direct orbits to assume the cusped form is well indicated by the orbit $C = 39.0$, $x_0 = 1.001$ shown by Professor DARWIN (fig. 5).

§ 5. Conjectural Forms of Retrograde Orbits.

The cusped orbit $C = 40.0$, $x_0 = 1$ has been computed in part by myself and independently by Prof. DARWIN. Its form is found to resemble that shown in fig. 3 below. Again when x_0 reaches its extreme limit in the opposite direction the form of the cusped orbit is that shown in fig. 4. We may pass from one of these forms to the other either by following the direct orbits or by following the retrograde orbits.

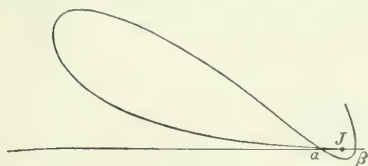


Fig. 3.

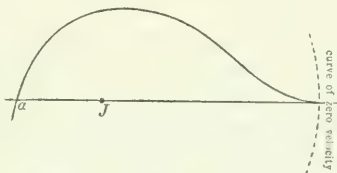


Fig. 4.

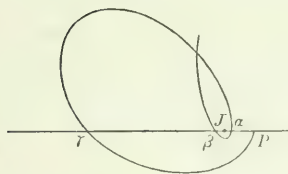


Fig. 5.

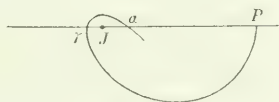


Fig. 6.



Fig. 7.

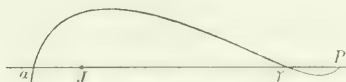


Fig. 8.

The sequence of changes in the forms of the orbits which occur as we follow the direct orbits may be inferred from the results already given by DARWIN, but as regards the retrograde orbits we have as yet no positive data available. It seems to me however that the probable sequence of changes is that indicated by figs. 5—8. In fig. 5 the starting point P has receded slightly from J and the direction of rotation round J at the next approach has been reversed by a passage through the cusped form.

In fig. 6 the large loop has diminished in size and the small loop (no longer represented in full) has increased, indicating another near approach of the satellite to the primary.

Fig. 7 represents the form of the orbit after this loop has passed through the cusped stage, while fig. 8 at once fills up the interval which remains between this orbit and that shewn in fig. 4.

§ 6. φ -curves.

The main object of DARWIN's research was to investigate the forms of the different varieties of *periodic* orbits, but in order to discover these periodic orbits he has incidentally determined the forms of a large number of non-periodic orbits. The method of procedure was to trace these latter orbits by a process of mechanical quadratures, and to examine the values of the angle (φ_1) at which the normal to the orbit was inclined to the axis-of- x at the instant when the orbit again crosses this axis. The periodic orbits are then selected by determining by interpolation the initial circumstances which allow of the orbit cutting the line of syzygies at right angles at the second crossing, i.e. those which make the value of φ_1 zero or a multiple of π .

Now the initial circumstances with which we are concerned involve two parameters viz: C , the constant of relative energy, and x_0 , the abscissa of the starting point. If the value of C be assigned, φ_1 may be regarded as a function of the single quantity x_0 , and the nature of this function may be represented graphically by a curve with x_0 as abscissa and φ_1 as ordinate. When the form of this curve is known we may at once recognize the existence of, and the initial circumstances associated with the periodic orbits by reading off the abscissae of the points of intersection of

the curve with the lines $\varphi_1 = 0$, $\varphi_1 = \pm \pi$, $\varphi_1 = \pm 2\pi$, &c. As C varies, the curve, which we shall describe as a φ -curve, will undergo continuous deformation and the variations in its form will indicate the vicissitudes through which the different periodic orbits pass.

For large values of C the planet J will be surrounded by a closed branch of the curve of zero-velocity, and it therefore appears that two forms of discontinuity in the figures of the non-periodic orbits under discussion may present themselves; (1) where the satellite is instantaneously reduced to rest by attaining a point on the curve of zero-velocity and (2) where the satellite falls into the primary.

The former case has been frequently met with by DARWIN and it is clear from his figures that the crisis concerned involves no abrupt change at points on the orbit other than that where it occurs. Thus no discontinuity in the value of φ_1 will result.

No instance of the occurrence of the second event has been found by DARWIN prior to the satellite first crossing the line of syzygies. A case has however been found ($C = 39.0$, $x_0 = 1.095$) where the satellite passes very close to its primary after twice crossing the axis-of- x , while similar instances appear to occur among the retrograde orbits in the critical forms which separate orbits of the characters represented in figs. 5-6-7.

Now the angle φ made by the normal with the axis-of- x at the points where the orbit cuts this axis must be regarded analytically as a multiple-valued function of x_0 having an infinite number of determinations, since the orbit will evidently cut the axis-of- x an infinite number of times. The complete φ -curve will then consist of an infinite number of branches each one of which corresponds with a particular crossing. In dealing with the direct orbits we define φ_1 as that particular determination which corresponds to the first crossing of the axis after a semi-revolution round the primary, the values which correspond to subsequent crossings being denoted by different suffixes (φ_2 , φ_3 , &c.).

In so far as we can pass from the direct orbits to the retrograde orbits, by continuous deformation through the cusped form, the particular crossing, to which the angle φ_1 belongs in the case of the retrograde orbits, may be defined as the geometrical continuation of that previously defined so long as the point under consideration does not fall into the planet J . This definition will however lead to ambiguity when the orbit

falls into J . To remove this ambiguity we will suppose that before and after the passage through the cusped form, the crossings corresponding to the approach of the satellite to the primary are continuations of one another, as also are those which correspond to the recession of the satellite from the primary. The angle φ_1 will then be defined without ambiguity, and it is evident that if the sequence of changes indicated in fig. 3—8 be the correct sequence through which the orbits pass, the points marked with similar letters on these figures will correspond with one another, the determination φ_1 being that which belongs to the point α throughout.

From the result proved at the end of § 3 it follows that the angle φ_1 will no longer be a continuous function of x_0 , but when the crossing to which φ_1 belongs falls into J the ordinate of the φ -curve will change abruptly by $\frac{1}{2}\pi$. The points selected as the continuations of one another are in fact not the true analytical continuations of one another so that when the orbit passes through the critical form we transfer our attention from one branch to another of the φ -curve.

The advantage gained by defining φ_1 in this manner, rather than by following the continuous changes in the angle φ , is that as we follow the cycle of orbits discussed in § 5, φ_1 will go through a series of cyclical changes, whereas if we maintained strict analytical continuity, on each passage through a cycle we should have to fix our attention on a different determination of the angle φ .

We are now in a position to examine that branch of the φ -curve which corresponds to the determination φ_1 . Since the direct and retrograde orbits merge into one another when x_0 has its extreme values (1 and m) the curve will touch the lines $x_0 = 1$, $x_0 = m$.

For large values of C , DARWIN finds only a single periodic orbit for which $\varphi_1 = \pi$ among the direct orbits in question, while the angle φ_1 decreases with increasing values of x_0 . Assuming that the forms of the retrograde orbits are similar to those represented in § 5 the φ_1 -curve will then be as below, where two passages through the cusped form are indicated by abrupt diminutions by $\frac{1}{2}\pi$ as x_0 increases.

In this figure the point A corresponds with DARWIN's periodic orbit, the points J and M with orbits which start from a cusp while the points

P, P', Q, Q' correspond with orbits which have a cusp at J , at some time after starting.

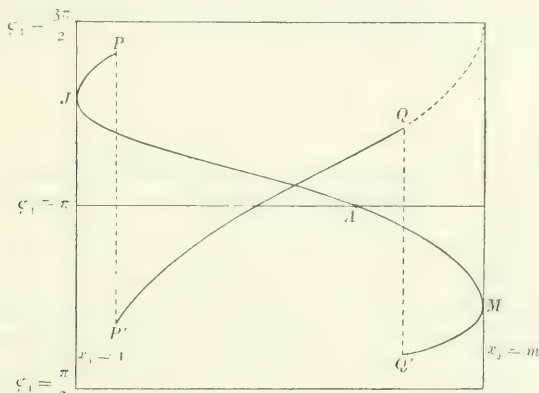


Fig. 6.

If we follow the retrograde orbits up to their limiting form when cusped at M it is evident that the normal at the crossing denoted by γ in figs. 7, 8, which may be regarded as the true analytical continuation of α in figs. 5 and 6, will approach nearer and nearer to a direction at right angles to the line of syzygies. At the final stage the crossing will disappear by coalescence with a second which occurs before the passage through the starting point. We thus conclude that the continuation of the branch $P'Q$ will touch the line $x_0 = m$ at the point where $\varphi_1 = \frac{3}{2}\pi$, as indicated by the dotted part of the curve in the above diagram.

Further since the points P, Q' necessarily lie between the lines $\varphi_1 = \frac{3\pi}{2}$ and $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, it may be readily seen that the branch of our curve which corresponds with the retrograde orbits must necessarily cut the line $\varphi_1 = \pi$, indicating the existence of a retrograde periodic.

If as in the above figure P, Q' lie on opposite sides of the line $\varphi_1 = \pi$, P', Q will also lie on opposite sides of this line and the retrograde periodic

will then be of the character indicated by figs. 5 and 6 in which the crossing α becomes rectangular, i.e. it will be a 'doubly' periodic orbit.

On the other hand if P, Q' lie on the same side of $\varphi_1 = \pi$ one of the branches JP, MQ' must have bent round so as to cross this line, and the form of the retrograde orbit will be modified in a manner which it is easy to trace.

§ 7. *First deformation of the φ -curve accounting for the disappearance of the orbit A.*

As C varies the figure of the φ -curve given in the last section will undergo continuous deformation, and we may follow the fate of the orbit A by fixing our attention on the point A of this figure. Now from the figures given by DARWIN we see that as C decreases the point A will approach the line $x_0 = 1$. Meanwhile the point J will move along the line $x_0 = 1$, and it is evident that the points A and J may at some stage coincide. When this occurs the cusped orbit J itself cuts the axis at right angles at the next crossing and may be regarded as periodic. Prof. DARWIN who is at present examining the forms of some of these cusped orbits informs me that the orbits in question appear to become periodic for a value of C about 39.5, but the actual numerical value has not yet been determined.

After the critical stage the point J will cross the line $\varphi_1 = \pi$ and the point A will no longer be found in that part of the curve which corresponds with the direct orbits, but in the part which corresponds with the retrograde orbits. Subsequently the curve will bend up so as to again cut the line $\varphi_1 = \pi$, indicating the growth of two new periodic orbits, the orbits B and C of Prof. DARWIN's paper. The form of the φ -curve, so far at least as regards that part of it with which we are concerned will now be as below (fig. 10).

It appears then that the starting point of the orbit A will move up to the planet J , that the orbit will at first become cusped and that afterwards it will have a loop round J which is described by the satellite in a retrograde direction. The critical stage occurs when C is in the neighbourhood of 39.5. This explains why Prof. DARWIN who confined

his attention to the direct orbits alone, failed to find any trace of this orbit when $C = 39.0$.

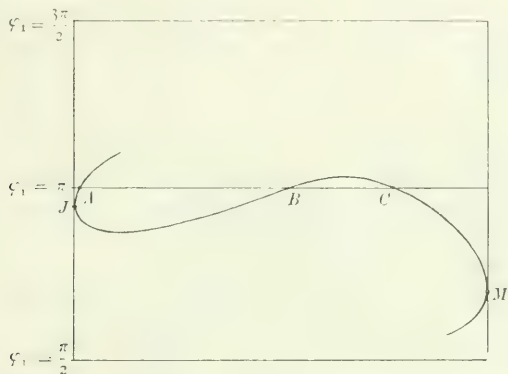


Fig. 10.

§ 8. *Form of the φ -curve in the neighbourhood of an asymptotic orbit.*

So long as the curve of zero velocity possesses a closed branch round J , the only forms of discontinuity which the φ -curve can present are those dealt with in the preceding sections, but when the curve of zero-velocity has assumed an hour-glass form more complex figures, resulting from the existence of asymptotic orbits, may occur. The nature of the singularity which appears in the neighbourhood of an asymptotic orbit may however be inferred from the curves given by DARWIN for the case $C = 39.0$.

Hitherto by defining φ_1 as a particular determination of a multiple-valued function we have been able to regard φ_1 as a single-valued function of the quantity x_0 , but we must now attach a slightly extended meaning to the symbol φ_1 , which will no longer permit us to regard it as single-valued.

Suppose that the crossing on which our attention is fixed and to which the determination φ_1 belongs approaches the point of zero-force. We have

seen (§ 1) that the orbit may then acquire loops, and may therefore cut the axis of x in several points before it recedes again either towards the planet or the Sun. When such loops exist, we define φ_1 as the angle made by the normal with the axis at any crossing prior to its again receding from the point of zero force. The number of real determinations of φ_1 will then depend on the number of loops which cut the line of syzygies.

Now on reference to DARWIN's figures it will be seen that as x_0 decreases from the value $x_0 = m$, $\varphi_1 - \pi$ is initially negative and twice vanishes and changes sign. The vanishing points determine two periodic orbits B and C . The corresponding portion of the φ -curve will then resemble that of the curves previously given.

If we confine our attention to the value of φ_1 at the first crossing it is evident that after passing the point B the value of φ_1 diminishes, until when x_0 is rather less than 1.06 it attains the value $\frac{\pi}{2}$. For values of x_0 beyond this one, the corresponding crossing becomes imaginary by coalescence with a second. Hence the branch of the φ_1 curve, to which we limit ourselves in directing our attention only to the first crossing, will intersect the line $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ at right angles and will at this stage identify itself with a second branch. This second branch applies to the values of φ_1 at the second crossing, and from the figures it is clear that it first appears when x_0 is rather larger than 1.095. The second value of φ_1 comes into existence simultaneously with a third and its initial value is $\frac{\pi}{2}$. The value of φ_1 as we pass along the second branch ranges between $-\frac{\pi}{2}$ and $+\frac{\pi}{2}$, and consequently vanishes at some stage. The vanishing stage is that which corresponds to the figure-of-8 orbit of DARWIN's paper. It is clear that the second branch may be continued into a third, the third into a fourth and so on, that these various branches are in reality different parts of one and the same continuous curve, which possesses an infinite branch consisting of a series of waves of the form shewn in fig. 11.

This figure gives a concise summary of the results implied in DARWIN's figures 3 and 5, and we may interpret all the features of it in connection with the orbits represented in those figures.

Thus consider the intersections with the curve of an ordinate which moves from right to left.

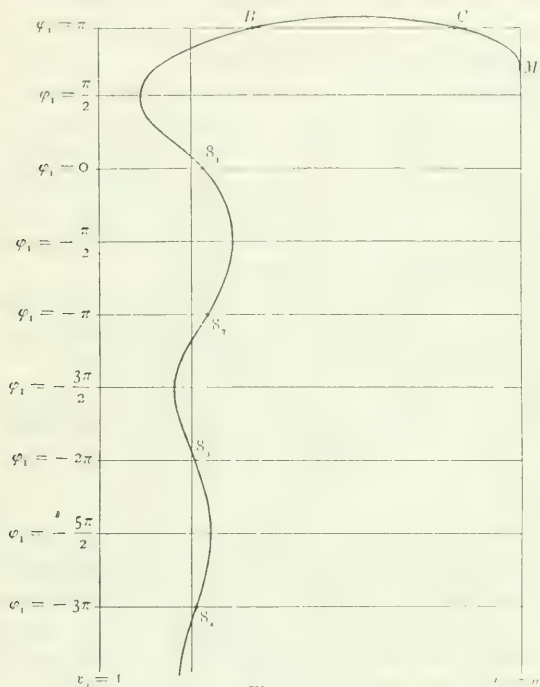


Fig. 11.

The first critical stage which will occur after its foot has passed B will be when the ordinate just touches the crest of the first wave. The ordinate will then intersect the curve in two new coincident points indicating that the orbit will intersect the axis of x in two new coincident points. This results from the fact that the orbit has acquired a single loop which just comes into contact with the axis of x at the critical stage. Evidently the initial values of φ_1 will be each equal to $-\frac{\pi}{2}$ and consequently the crest of the first wave lies on the line $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$.

The new values of ζ_1 will then separate and the next critical stage will occur when the larger of them attains the value zero, i. e. when the ordinate passes through the point marked S_1 in the diagram. The orbit will then be periodic and of the form of a figure-of-8. It is the figure-of-8 orbit which has been found by DARWIN.

For further decrease in x_0 the ordinate will touch the crest of a second wave which indicates that a second loop will have been formed in the orbit and that this second loop bends upwards so as to touch and afterwards cut the axis-of- x . Subsequently when the ordinate passes through the point S_2 the orbit with two loops will have become periodic. It will then be one of the more complex figure-of-8 orbits whose existence has been foreshadowed by Prof. DARWIN (p. 189).

Evidently the number of waves intersected by the ordinate will go on rapidly increasing in number, and with them the number of loops of the orbit intersecting the axis of x , until a critical stage will be reached when the ordinate attains a position shewn in the figure about which all the waves oscillate. When the ordinate attains this position the orbit will be the asymptotic orbit described in § 2 which possesses an infinite number of loops.

For further decrease in x_0 we see from the results of § 2 that the orbit will no longer be of the 'lunar' type but of the 'planetary' type. The number of real intersections of the ordinate with the ζ -curve will rapidly diminish which implies that the orbit will shed its loops. Finally the ordinate will cease to intersect the curve in real points and the orbit will have attained the form shewn by DARWIN for the cases $x_0 = 1.04$, 1.02 and 1.001 , where there are no real intersections with the axis of x prior to the recession towards the Sun.

The intersections of the infinite branch with each of the lines $\zeta_1 = 0$, $\zeta_1 = -\pi$, $\zeta_1 = -2\pi$ &c. will indicate the existence of periodic orbits having 1, 2, 3 &c. loops. Since these orbits are all necessarily of the lunar type the points on the figure, marked S_1 , S_2 , S_3 &c., which correspond to these periodic orbits, all lie to the right of the critical ordinate which separates the lunar orbits from the planetary.

We see then that the existence of an asymptotic orbit implies also the existence of an infinite number of complex figure-of-8 orbits, the first of which is that which has been found by DARWIN.

§ 9. Completion of the ζ -curve.

The part of the curve shewn in our last figure is that which corresponds to the direct orbits. DARWIN's investigations enable us to figure this part of the curve with certainty, but no attempt has been made to draw it to scale in order that the essential features may be exhibited in a somewhat exaggerated form. Thus the amplitudes of the successive waves will be very much smaller than they are represented, all the critical features being included between $x_0 = 1.095$ and $x_0 = 1.06$ (approximately). As regards the remaining part of the curve we however have no such data available, and we have to fall back entirely on considerations of continuity to supply them.

Now DARWIN finds that when $x_0 = 1.02$ and even when $x_0 = 1.001$ the orbits are planetary and that they do not intersect the axis-of- x prior to their recession towards the Sun. It seems probable that they will retain this same character until x_0 reaches its limiting value (unity) and the orbit has a cusp at J . On the other hand when $x_0 = 1.3$ (see fig. 3) the orbits are lunar, and it is probable that they will retain their lunar character until the starting point reaches the curve of zero-velocity ($x_0 = m$).

If this be the case, as we pass from the orbit $x_0 = m$ to the orbit $x_0 = 1$ by continuous deformation, following the retrograde orbits instead of the direct orbits, we must pass through a stage where the orbits change from the lunar to the planetary form. Thus there must be a second asymptotic orbit among the retrograde orbits.

Whether or not the above assumptions as to the form of the cusped orbits be correct, it is clear than in such a cycle of orbits as that under consideration asymptotic orbits must occur in even numbers. Thus the existence of a single asymptotic orbit in the cycle necessarily involves the existence of a second.

Now it might appear at first sight that an asymptotic orbit could pass out of our cycle when the orbit falls into the planet and ζ_1 undergoes an abrupt change by $\frac{1}{2}\pi$. Such however cannot be the case. To prove this let us suppose that the crossing on which our attention is fixed moves up to the planet J . A second crossing will reach J simultaneously

with it. Now if our crossing corresponds with the approach to J , since a second crossing will occur after it on the opposite side of J , the orbit (so far as this crossing is concerned) will necessarily be of the lunar type both before and after the change. On the other hand if the crossing with which we are concerned belongs to the branch of the curve along which the satellite recedes from J , since the discontinuity in the geometrical form of the orbit is confined to the critical point and does not extend to remote parts of the curve, the orbit will be of the same character before and after its passage through the critical form. Thus such a discontinuity, as that represented by the passage from the point P to P' or from Q to Q' in fig. 9, can never involve a transition from the lunar to the planetary form or vice-versâ.

It appears then that asymptotic orbits can only disappear from our cycle by coalescence and that the development of them will always occur in pairs.

§ 10. *Second deformation of the ζ -curve.*

Having recognized the existence of the asymptotic orbits and the form which the ζ -curve assumes in their neighbourhood we next proceed to examine the transitional forms through which the curve will pass when two such orbits coalesce. A reversal of the order of the events considered will then indicate the state of affairs prior and subsequent to the development of a pair of asymptotic orbits.

First let us consider the forms of the orbits which possess a cusp at J as C increases. When $C = 39\cdot0$ these belong to the planetary class, but when $C = 40\cdot0$ they are found to be no longer planetary but lunar. The cusped orbit must therefore, for intermediate values of C , acquire loops, pass through the asymptotic form and finally shed these loops again. This will occur when one of the two ordinates which correspond to the asymptotic orbits in our cycle moves up to the line $x_0 = 1$. The corresponding asymptotic orbit will then undergo a change from the direct to the retrograde form or vice-versâ, and subsequently both asymptotic orbits will be direct or both retrograde. It seems probable that it is the retrograde orbit which passes through the critical form and becomes direct after

the crisis. This assumption is however only made for the purpose of giving greater definiteness to our statements and is not essential to the arguments. After the passage of the asymptotic orbit through the cusped form the figure-of-8 orbits which accompany it will each in turn undergo a like change. For simplicity we will suppose that all these changes occur before the next critical stage is reached and that consequently the form of the φ -curve, so far as it applies to the direct orbits, is now as below, having two infinite branches.

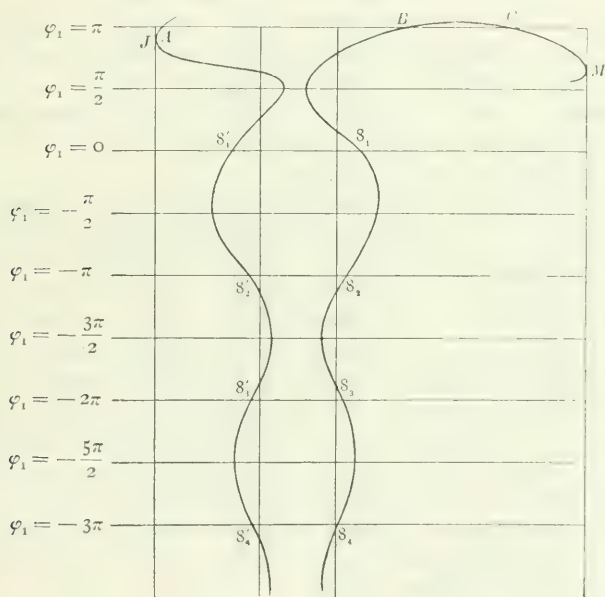


FIG. 12.

There will now be a second figure-of-8 orbit of a character similar to Prof. DARWIN's, which corresponds to the point $8'_1$ of the figure, while there will be two infinite series of more complex figures-of-8 corresponding to the two series of points $8_2, 8_3, \dots, 8'_2, 8'_3, \dots$. It should be noticed that none of these points can be between the two critical ordinates

which correspond with the asymptotic curves, since the periodic orbits all belong essentially to the lunar category. As C decreases further the next event of importance will be the coalescence of the crests of the two first waves in the above figure. After this coalescence the infinite branches of the curve will be severed from the remaining part, which will form a curve of the type shewn in figs. 9 and 10.

The significance of this change is that for larger values of C orbits of the type represented by $C = 39.0$, $x_0 = 1.04$, which do not intersect the axis of x before their recession, can no longer exist.

Subsequently as the two critical orbits approach one another the successive wave crests of the two branches will coalesce in turn and a series of isolated ovals will be formed. The curve will then consist of a branch similar to those of §§ 6 and 7, a finite number of isolated ovals and two infinite branches as below, where the curve is drawn on a reduced vertical scale with two ovals (fig. 13).

We arrive next at the case where the two critical ordinates move up to coincidence. The asymptotic orbits will then coalesce and disappear. The infinite branches of the ζ -curve will have degenerated into an infinite series of isolated ovals. The two infinite series of figure-of-8 periodic orbits will however still have a real existence.

For further increase in C these ovals will shrink in size, reduce to points and finally disappear. It is clear that each of the points S_1, S_2, S_3, \dots will disappear by coalescence with the corresponding point of the series S'_1, S'_2, S'_3, \dots indicating that each of the periodic orbits disappears by coalescence with a second. Also it is evident that the more distant ovals will be the first to vanish indicating that the periodic orbits with a large number of turns round the orbit a will vanish before those with a smaller number of turns and that the last orbits to vanish will be the simple figures-of-8 of Prof. DARWIN's paper.

There will be an interval between the disappearance of the points S_1, S'_1 &c. and the final evanescence of the ovals. During this interval non-periodic orbits may occur having loops, but it will never be possible for the loops to adjust themselves so as to cut the line of syzygies at right angles.

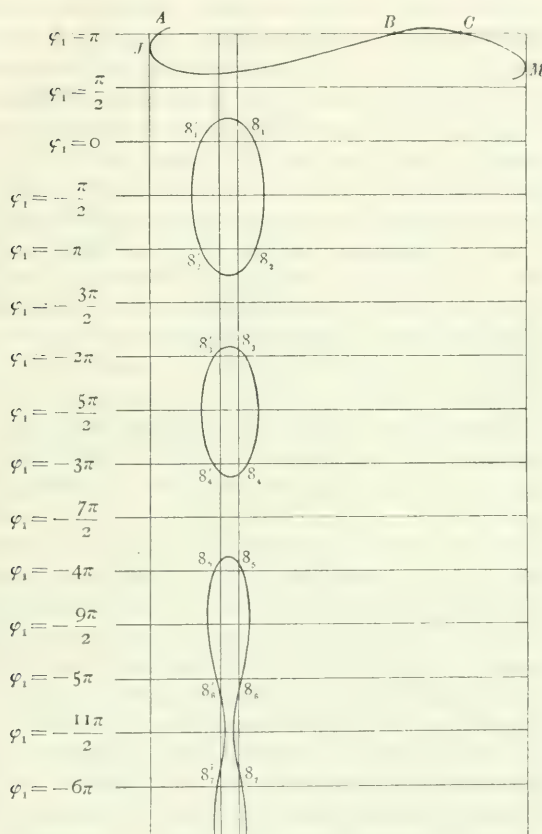


Fig. 13.

§ 11. Summary and Conclusion.

The problems dealt with arise as the result of the study of an apparently remarkable change in the forms of certain periodic orbits which have been examined by Prof. DARWIN, whereby an orbit originally

in the form of a simple closed oval seems to have developed into the form of a figure-of-8. This change is of so surprising a character that M. POINCARÉ and others have concluded that Prof. DARWIN was misled in regarding the simple oval orbit and the figure-of-8 orbit as members of the same family. But if we regard them as members of two different families questions at once arise as to the earlier history of the second family and the later history of the former. On these points DARWIN's results throw very little light, but by supplementing the numerical results obtained by him by arguments based on the consideration of geometrical continuity I have shewn that the history of either family may be traced in part, and have verified M. POINCARÉ's conclusion as to the independence of these two families. The results explain fully how the first family has been lost sight of by DARWIN and how the second family comes into existence. It appears to have been largely a matter of chance that with the actual numerical data adopted the appearance of the second family coincided exactly with the appearance of the first, a fact which naturally led DARWIN to the conclusion that the two forms of orbit really belonged to the same group.

The earlier sections of the paper (§§ 1—4) deal with two critical cases which may occur in connection with the forms of non-periodic orbits and lead to two classifications of these orbits. They are first classified as 'lunar' or 'planetary' according to the fate of the satellite after describing a semi-revolution round the primary. If it recedes towards the primary and proceeds to describe further revolutions round it, it is described as 'lunar'. If on the other hand it passes away towards the Sun it is described as 'planetary'. The critical orbits which separate the lunar from the planetary describe an infinite number of loops round the point of zero-force, approximating at each turn closer and closer to the orbit of the oscillating satellite. Adopting POINCARÉ's term we describe the critical orbit as an 'asymptotic' orbit. We next classify the orbits as 'direct' or 'retrograde' according as the initial direction of motion is direct or retrograde, the critical orbits which separate the one class from the other being described as 'cusped' on account of the forms which they assume. It is then shewn that by the inclusion of the retrograde orbits as well as the direct, we may arrange the orbits under consideration into a perfect self-contained cycle which may however involve certain abrupt discontinuities. The

disappearance of the orbit A is accounted for by the fact that at the stage at which it was sought by DARWIN it had passed through the critical cusped form and thus was no longer to be found in the part of the cycle examined by him viz: the part which includes only the direct orbits.

We proceed to shew how all the results indicated in the figures of the non-periodic orbits traced by DARWIN may be represented on a single curve, and how a study in the variations in the form of this curve will enable us to trace the history of the different families of periodic orbits. The method employed by DARWIN to discover the periodic orbits in fact is equivalent to the examination of the form of this curve in regions where there were *a priori* grounds for suspecting the existence of a periodic orbit.

The chief point of interest in connection with these curves is the form which they assume in the neighbourhood of an asymptotic orbit i.e. one of the critical orbits implied in our first classification. The form indicates that such an asymptotic orbit is accompanied not only by a simple figure-of-8 orbit of the kind found by DARWIN, but also by an infinite series of complex figures-of-8 whose exact forms have not yet been examined but whose existence has been predicted by DARWIN.

We next shew that in a complete cycle of orbits, such as that which we have found to exist, asymptotic orbits must occur in even numbers and consequently must appear or disappear in pairs. As DARWIN's results indicate only one of such orbits among the direct orbits for the case $C=39\cdot0$ we conclude that a second one must exist among the retrograde orbits. The two asymptotic orbits must have had a common origin and at the instant of their first appearance must have been both direct or both retrograde. For purposes of illustration it has been assumed that both are initially direct though this is not essential to the arguments employed.

The existence of two asymptotic orbits implies also the existence of two simple figure-of-8 orbits of the form found by DARWIN, which must likewise have had a common origin. The converse is however not necessarily true. For if we trace back the changes described in the last section we see that the first indication of the development of a pair of asymptotic orbits will be the growth of loops, as in the orbit $x=1\cdot095$ of DARWIN's fig. 5. When these loops first appear it will not be possible for them to arrange themselves so as to cut the line of syzygies at right angles and render the orbit periodic, but with smaller values of C pairs

of periodic looped orbits will appear which gradually separate from one another. The first to appear will be those with the smaller number of loops, the final ones being the asymptotic orbits which may be regarded as the limiting form of periodic looped orbits when the number of loops becomes infinitely great.

The passage of the second asymptotic orbit from the direct to the retrograde form will be preceded by a similar passage of the whole series of periodic looped orbits which accompany it, including the simple figure-of-8 orbit which at its origin coincided with that of Prof. DARWIN. Here again the failure to find any trace of this orbit is to be explained by the fact that the search was confined to the direct orbits alone, whereas at the stage under investigation ($C = 39.0$) this orbit had already passed into the retrograde form.

In conclusion I have to thank Prof. DARWIN not only for the unfailing courtesy with which he has placed at my disposal all the details of the prodigious amount of numerical work which formed the basis of his published memoir on this subject, but also for the readiness with which he has communicated to me his further results still under investigation and for valuable criticism which has saved me from numerous errors. Even should the present results be found to require modification on further investigation, and it is admitted that the detail is to be regarded as conjectural rather than proven, I shall feel that the paper will have served a useful purpose if it succeeds in enticing other investigators into the vast and hitherto unexplored field which seems to be opened up with each new development of this highly interesting subject.

ÜBER DIE ASYMPTOTISCHE DARSTELLUNG DER INTEGRALE LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

J. HORN

in CLAUSTHAL.

Im ersten Theil meiner Arbeit *Über das Verhalten der Integrale von Differentialgleichungen bei der Annäherung der Veränderlichen an eine Unbestimmtheitsstelle*¹ habe ich das Verhalten der Integrale einer Riccati'schen Differentialgleichung und einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung für den Fall untersucht, dass die unabhängige Veränderliche auf einem bestimmten Wege nach einer Unbestimmtheitsstelle geht. Für die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung,² deren Coefficienten in der Umgebung der Unbestimmtheitsstelle den Charakter rationaler Functionen haben, habe ich die Sätze des Herrn POINCARÉ³ über die asymptotische Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten durch die Thomé'schen Normalreihen ohne Benutzung der Laplace'schen Transformirten bewiesen und vervollständigt, indem ich an die Untersuchung des Grenzwertes der logarithmischen Ableitung am Anfang der Abhandlung des Herrn POINCARÉ im American Journal anknüpfte. Damals kam es mir vorzugsweise darauf an, Methoden zu gewinnen, welche sich, wie der zweite und dritte Theil⁴ der angeführten

¹ Crelles Journal Bd. 118.

² Vgl. auch KNESER, *Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen bei grossen reellen Werthen des Arguments* (Crelles Journ. Bd. 116 u. 117).

³ American Journ. Bd. 7, Acta math. Bd. 8.

⁴ Crelles Journ. Bd. 119. Vgl. die Arbeiten von Herrn BENDIXSON.

Arbeit zeigen, auf nicht lineare Differentialgleichungen übertragen lassen. Indem ich jetzt diese Rücksicht bei Seite lasse, beweise ich für eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, deren Coefficienten in der Umgebung der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ den Charakter rationaler Functionen haben,¹ die asymptotische Darstellung der Integrale durch die der Differentialgleichung formell genügenden divergenten Reihen, wobei ich wie in der oben erwähnten Arbeit vorläufig noch einzelne nach der Stelle $x = \infty$ führende Wege ausschliesse und die Wurzeln der charakteristischen Gleichung als verschieden voraussetze. Auch jetzt mache ich von der Laplace'schen Transformirten keinen Gebrauch, sondern nur von Poincaré's Untersuchung des Grenzwertes der logarithmischen Ableitung und von der bekannten Erniedrigung der Ordnung einer linearen Differentialgleichung unter Benutzung eines particulären Integrals.

§ 1.

Wir schicken einige Hilfsuntersuchungen voraus.²

In dem Differentialgleichungssystem

$$(A) \quad x^{-k} \frac{dw_\lambda}{dx} = \alpha_\lambda w_\lambda + \sum_\mu Q_{\lambda\mu} w_\mu \quad (\lambda, \mu = 1, \dots, m)$$

sei k eine ganze positive Zahl (einschl. 0), die $Q_{\lambda\mu}$ Functionen von x mit der Eigenschaft

$$\lim Q_{\lambda\mu} = 0^3$$

und $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ constante Grössen, deren reelle Theile eine absteigende Reihe bilden und sämmtlich verschieden sein sollen. Wir lassen x als

¹ Die Untersuchungen des Herrn POINCARÉ, welche sich auf die Laplace'sche Transformation gründen, setzen die Coefficienten als rational in der ganzen Ebene voraus, während hier nur das Verhalten in der Umgebung der Unbestimmtheitsstelle in Frage kommt.

² Vgl. POINCARÉ, Am. Journ. Bd. 7.

³ Unter $\lim f(x)$ wird stets der Grenzwert verstanden, welchem die Function $f(x)$ zustrebt, wenn x als reelle positive Grösse ins Unendliche geht.

reelle positive Grösse ins Unendliche gehen und untersuchen das Verhalten der Quotienten

$$\frac{w_\lambda}{w_1} \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

Es ist

$$x^{-k} \frac{d \log \frac{w_\lambda}{w_1}}{dx} = \alpha_\lambda - \alpha_1 + Q_{\lambda\lambda} - Q_{11} + \sum_{\mu \neq \lambda} Q_{\lambda\mu} \frac{w_\mu}{w_\lambda} - \sum_{\mu > 1} Q_{1\mu} \frac{w_\mu}{w_1} \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

und

$$R(\alpha_\lambda - \alpha_1) < 0, \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

Wir haben

$$|Q_{\lambda\mu}| < \delta,$$

wo δ eine für $x = \infty$ verschwindende positive Grösse ist. Wenn man

$$2\delta \left(1 + \frac{m-1}{\varepsilon} \right) = R(\alpha_1 - \alpha_2) - g$$

setzt, wo g eine kleine positive Grösse darstellt, so ist ε für grosse x positiv und

$$\lim \varepsilon = 0.$$

Wenn für einen gewissen Werth von x

$$\left| \frac{w_\mu}{w_\lambda} \right| < \frac{1}{\varepsilon} \quad (\mu = 1, \dots, \lambda-1, \lambda+1, \dots, m)$$

$$\left| \frac{w_\mu}{w_1} \right| < \frac{1}{\varepsilon} \quad (\mu = 2, \dots, m)$$

ist, so ist der reelle Theil von

$$x^{-k} \frac{d \log \frac{w_\lambda}{w_1}}{dx}$$

kleiner als

$$R(\alpha_2 - \alpha_1) + 2\delta + 2(m-1)\delta \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

also

$$x^{-k} \frac{d \log \left| \frac{w_\lambda}{w_1} \right|}{dx} < -g.$$

¹ $R(a)$ ist der reelle Theil von a .

Wir verstehen unter M den jeweilig grössten der Quotienten

$$\left| \frac{w_k}{w_1} \right| \quad k=2, \dots, n,$$

und zeigen, dass, wenn

$$\varepsilon < M < \frac{1}{\varepsilon}$$

ist,

$$x^{-1} \frac{d \log M}{dx} < -g$$

sein muss. Es sei

$$M := \left| \frac{w_r}{w_1} \right| \geq \left| \frac{w_{k'}}{w_1} \right| \geq \dots$$

Wegen

$$M < \frac{1}{\varepsilon}$$

ist

$$\left| \frac{w_r}{w_1} \right| < \frac{1}{\varepsilon}; \quad k=2, \dots, n,$$

ferner ist

$$\left| \frac{w_1}{w_{k'}} \right| < \varepsilon$$

wegen

$$M := \left| \frac{w_r}{w_1} \right| > \varepsilon$$

und

$$\left| \frac{w_R}{w_{k'}} \right| \leq 1 < \frac{1}{\varepsilon} \quad k=2, \dots,$$

wegen

$$|w_{k'}| \geq |w_{k''}| \geq \dots;$$

es ist also

$$\left| \frac{w}{w_{k'}} \right| < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Unter diesen Voraussetzungen ist aber

$$x^{-k} \frac{d \log \left| \frac{w_k}{w_1} \right|}{dx} = x^{-k} \frac{d \log M}{dx} < -g.$$

Wenn für einen gewissen Werth von x M zwischen ε und $\frac{1}{\varepsilon}$ liegt und bei wachsendem x grösser als ε bleibt, so ist hiernach

$$\lim M = 0;$$

das gleiche ist der Fall, wenn für beliebig grosse Werthe von x $M \leq \varepsilon$ ist. Mit anderen Worten, wenn für einen grossen Werth von x

$$\left| \frac{w_\lambda}{w_1} \right| < \frac{1}{\varepsilon} \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

ist, so ist

$$\lim \frac{w_\lambda}{w_1} = 0. \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

Für das Folgende genügt es, zu wissen, dass überhaupt ein Integralsystem w_1, \dots, w_m des Differentialgleichungssystems (A) vorhanden ist, welches die Eigenschaft besitzt, dass sich sämtliche Quotienten

$$\frac{w_2}{w_1}, \dots, \frac{w_m}{w_1}$$

der Grenze Null nähern, wenn x als reelle positive Grösse ins Unendliche geht.

Die Functionen

$$z_\lambda = \frac{w_\lambda}{w_1} \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

genügen den Differentialgleichungen

$$(B) \quad x^{-k} \frac{dz_\lambda}{dx} + z_\lambda \sum_{\mu} R_{1\mu} z_\mu = \beta_\lambda z_\lambda + \sum_{\mu} R_{\lambda\mu} z_\mu + R_{\lambda 1}, \quad (\lambda, \mu = 2, \dots, m)$$

wobei gesetzt ist:

$$\begin{aligned}\beta_\lambda &= \alpha_\lambda - \alpha_1, \\ R_{1\mu} &= Q_{1\mu}, \quad R_{\lambda 1} = Q_{\lambda 1}, \\ R_{\lambda\mu} &= Q_{\lambda\mu}, \quad (\lambda \neq \mu) \\ R_{\lambda\lambda} &= Q_{\lambda\lambda} - Q_{11}.\end{aligned}$$

Ein System von der Form (B) besitzt ein Integralsystem z_2, \dots, z_m mit der Eigenschaft

$$\lim z_\lambda = 0, \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

wenn

$$R(\beta_\lambda) < 0, \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

$$\lim R_{1\mu} = 0, \quad \lim R_{\lambda 1} = 0, \quad \lim R_{\lambda\mu} = 0$$

ist. Denn ein solches System (B) kann aus einem System von der Form (A) hergeleitet werden.

Wir nehmen jetzt an, die Functionen $R_{\lambda\mu}$ ($\lambda, \mu = 1, \dots, m$) seien von der Form

$$R_{\lambda\mu} = \frac{b_{\lambda\mu}^{(1)}}{x} + \dots + \frac{b_{\lambda\mu}^{(n)}}{x^n} + \frac{\beta_{\lambda\mu}^{(n)}}{x^n},$$

$$\lim \beta_{\lambda\mu}^{(n)} = 0,$$

wo n eine feste ganze positive Zahl darstellt. Ersetzt man jede Function $\beta_{\lambda\mu}^{(n)}$ durch Null, so wird das System (B) durch ein System von Potenzreihen

$$z_\lambda = \frac{c_{\lambda 1}}{x} + \frac{c_{\lambda 2}}{x^2} + \dots \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

formell befriedigt. Wir zeigen, dass das System (B) ein Integralsystem von der Form

$$z_\lambda = \frac{c_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{c_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\zeta_{\lambda n}}{x^n} = z_{\lambda n} + \frac{\zeta_{\lambda n}}{x^n},$$

$$\lim \zeta_{\lambda n} = 0$$

besitzt. Die Functionen

$$\zeta_\lambda = \zeta_{\lambda n} \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

Über die asymptotische Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen. 295
genügen nämlich den Differentialgleichungen

$$x^{-k} \frac{d\zeta_\lambda}{dx} + \zeta_\lambda \sum_{\mu} S_{\lambda\mu} \zeta_\mu = \beta_\lambda \zeta_\lambda + \sum_{\mu} S_{\lambda\mu} \zeta_\mu + S_{\lambda 1}, \quad (\lambda, \mu = 2, \dots, m)$$

wenn man setzt:

$$S_{1\mu} = \frac{R_{1\mu}}{x^\mu},$$

$$S_{\lambda\mu} = R_{\lambda\mu} - R_{1\mu} z_{\lambda n} \quad (\lambda \neq \mu),$$

$$S_{\lambda\lambda} = R_{\lambda\lambda} - R_{1\lambda} z_{\lambda n} - (R_{12} z_{2n} + \dots + R_{1m} z_{mn}) + \frac{n}{x^{\lambda+1}},$$

$$S_{\lambda 1} = \varphi_{\lambda 1},$$

wo $\varphi_{\lambda 1}$ eine Function von x mit

$$\lim \varphi_{\lambda 1} = 0$$

ist. Ein System von dieser Form besitzt aber, wie vorhin gezeigt wurde, ein Integralsystem ζ_2, \dots, ζ_m mit der Eigenschaft

$$\lim \zeta_\lambda = 0. \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

§ 2.

Den eigentlichen Gegenstand unserer Untersuchung bildet die Differentialgleichung

$$(C) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + x^k P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + x^{2k} P_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + x^{(m-1)k} P_{m-1} \frac{dy}{dx} + x^{mk} P_m y = 0.$$

Die Coefficienten

$$P_\lambda = a_\lambda + \frac{a_{\lambda 1}}{x} + \frac{a_{\lambda 2}}{x^2} + \dots \quad (\lambda = 1, \dots, m)$$

sind entweder Potenzreihen von $\frac{1}{x}$, welche in der Umgebung von $x = \infty$ convergent sind, oder Functionen, welche durch divergente Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ asymptotisch dargestellt werden, wenn x als reelle positive Grösse

ins Unendliche geht; in beiden Fällen ist, welche ganze positive Zahl auch für n gesetzt werden möge,

$$I', \quad a_\lambda + \frac{a_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{a_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\bar{w}_{\lambda n}}{x^n},$$

$$\lim \bar{w}_{\lambda n} = 0.$$

Die charakteristische Gleichung von (U)

$$\alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \dots + a_{m-1} \alpha + a_m = 0$$

habe n verschiedene Wurzeln

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m,$$

deren reelle Theile verschieden und absteigend geordnet seien.

Setzt man¹

$$y = w_1 + \dots + w_m,$$

$$x^{-vk} \frac{d^v y}{dx^v} = \alpha_1^v w_1 + \dots + \alpha_m^v w_m, \quad (v=1, \dots, m-1)$$

so genügen die Functionen w_1, \dots, w_m einem Differentialgleichungssystem von der Form (A), woraus durch die Substitution

$$z_\lambda = \frac{w_\lambda}{w_1} \quad (\lambda=2, \dots, m)$$

ein System von der Form (B) hervorgeht. Es ist

$$R(\beta_\lambda) = R(\alpha_\lambda - \alpha_1) < 0 \quad (\lambda=2, \dots, m)$$

und entweder

$$R_{\lambda\mu} = \frac{b_{\lambda\mu}^{(1)}}{x} + \frac{b_{\lambda\mu}^{(2)}}{x^2} + \dots \quad (\lambda, \mu=1, \dots, m)$$

eine convergente Potenzreihe oder

$$R_{\lambda\mu} = \frac{b_{\lambda\mu}^{(1)}}{x} + \dots + \frac{b_{\lambda\mu}^{(n)}}{x^n} + \frac{\beta_{\lambda\mu}^{(n)}}{x^n},$$

$$\lim \beta_{\lambda\mu}^{(n)} = 0$$

¹ Vgl. POINCARÉ, Am. Journ. Bd. 7.

für jedes n . Setzt man für jede Function $R_{\lambda n}$ die convergente oder asymptotische unendliche Reihe, so wird das System (B) durch das Reihensystem

$$z_{\lambda} = \frac{c_{\lambda 1}}{x} + \frac{c_{\lambda 2}}{x^2} + \dots \quad (\lambda = 1, \dots, p),$$

formell befriedigt. Nimmt man jetzt für n eine feste Zahl, so besitzt (B), wie in § 1 gezeigt wurde, eine Lösung

$$z_{\lambda} = \frac{c_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{c_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\xi_{\lambda n}}{x^n},$$

$$\lim \xi_{\lambda n} = 0.$$

Ob diese Lösung auch für jede Zahl $n' > n$ auf die Form

$$z_{\lambda} = \frac{c_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{c_{\lambda n'}}{x^{n'}} + \frac{\xi_{\lambda n'}}{x^{n'}}, \quad \lim \xi_{\lambda n'} = 0$$

gebracht werden kann, d. h. ob die Function z_{λ} durch die Reihe

$$\frac{c_{\lambda 1}}{x} + \frac{c_{\lambda 2}}{x^2} + \dots$$

asymptotisch dargestellt wird, bleibt noch dahin gestellt.

Aus den formalen Reihenentwicklungen

$$z_{\lambda} = \frac{c_{\lambda 1}}{x} + \frac{c_{\lambda 2}}{x^2} + \dots \quad (\lambda = 1, \dots, m)$$

ergibt sich der Gleichung

$$x^{-k} \frac{d \log y}{dx} = \frac{a_1 w_1 + \dots + a_m w_m}{w_1 + \dots + w_m}$$

$$= \frac{a_1 + a_2 z_2 + \dots + a_m z_m}{1 + z_2 + \dots + z_m}$$

zufolge die formale Entwicklung

$$x^{-k} \frac{d \log y}{dx} = a_1 + \frac{a_{11}}{x} + \frac{a_{12}}{x^2} + \frac{a_{13}}{x^3} + \dots$$

oder, wenn man

$$z_{1, k+1} = \rho_1,$$

$$e^{\frac{a_{1, k+2}}{x} - \frac{c_{1, k+2}}{2x^2} - \dots} = C_1 + \frac{C_{11}}{x} + \frac{C_{12}}{x^2} + \dots$$

setzt, die der Differentialgleichung (C) formal genügende Normalreihe

$$y = S_1 = e^{\frac{a_1 x^{k+1}}{k+1} + \frac{a_2 x^k}{k} + \dots + a_n x} x^{c_1} \left(C_1 + \frac{C_{11}}{x} + \frac{C_{12}}{x^2} + \dots \right).$$

Aus der Gleichung

$$z_n = \frac{c_{21}}{x} + \dots + \frac{c_{2,n+k+1}}{x^{n+k+1}} + \frac{\zeta_{2,n+k+1}}{x^{n+k+1}},$$

$$\lim \zeta_{2,n+k+1} = 0$$

folgt

$$x^{-k} \frac{d \log y_1}{dx} = \frac{a_1 + a_2 z_2 + \dots + a_m z_m}{1 + z_2 + \dots + z_m} = a_1 + \frac{a_{11}}{x} + \dots + \frac{a_{1,n+k+1}}{x^{n+k+1}} + \frac{\gamma_{1n}}{x^{n+k+1}},$$

$$\lim \gamma_{1n} = 0$$

oder

$$y_1 = e^{\frac{a_1 x^{k+1}}{k+1} + \frac{a_2 x^k}{k} + \dots + a_n x} \left(C_1 + \frac{C_{11}}{x} + \dots + \frac{C_{1n}}{x^n} + \frac{\gamma_{1n}}{x^n} \right),$$

$$\lim \gamma_{1n} = 0.$$

Da n eine zwar von vornherein willkürlich gewählte, aber dann festgehaltene Zahl ist, so ist noch nicht bewiesen, dass die Function y_1 durch die Reihe S_1 asymptotisch dargestellt wird.

Aus der Gleichung

$$x^{-vk} \frac{d^v y_1}{dx^v} = \frac{a_1^{(v)} + a_2^{(v)} z_2 + \dots + a_m^{(v)} z_m}{1 + z_2 + \dots + z_m}$$

folgen noch Gleichungen von der Form

$$x^{-vk} \frac{d^v y_1}{dx^v} = a_1^{(v)} + \frac{a_{11}^{(v)}}{x} + \dots + \frac{a_{1,n+k+1}^{(v)}}{x^{n+k+1}} + \frac{\gamma_{1n}^{(v)}}{x^{n+k+1}},$$

$$\lim \gamma_{1n}^{(v)} = 0$$

Unter z_2, \dots, z_m wird das oben eingeführte Integralsystem von (B) verstanden; es ist nur die Bezeichnung insofern geändert, als die beliebige, aber feste Zahl n jetzt mit $n+k+1$ bezeichnet ist.

Über die asymptotische Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen. 299
und insbesondere

$$\lim x^{-\nu k} \frac{d^{\nu} y_1}{y_1} = \alpha_1^{\nu}. \quad (\nu=1, \dots, m-1)$$

§ 3.

Die am Anfang von § 2 beschriebene Differentialgleichung (C) wird formell befriedigt durch m Normalreihen

$$S_{\lambda} = e^{\frac{\alpha_{\lambda} x^{k+1}}{k+1} + \frac{\alpha_{\lambda 1} x^k}{k} + \dots + \alpha_{\lambda k} x} x^{\rho_{\lambda}} \left(C_{\lambda} + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \frac{C_{\lambda 2}}{x^2} + \dots \right). \quad (\lambda=1, \dots, m)$$

Wir bewiesen den folgenden Satz:¹

Die Differentialgleichung (C) besitzt ein Fundamentalsystem

$$y_1, \dots, y_m$$

von der Eigenschaft, dass die Function y_{λ} durch die Normalreihe S_{λ} asymptotisch dargestellt wird, wenn x als reelle positive Grösse ins Unendliche geht; d. h. es ist, wenn n irgend eine ganze positive Zahl ist,

$$y_{\lambda} = e^{\frac{\alpha_{\lambda} x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\rho_{\lambda}} \left(C_{\lambda} + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{C_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\gamma_{\lambda n}}{x^n} \right),$$

$$\lim \gamma_{\lambda n} = 0.$$

Für eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} + x^k y = 0,$$

$$P = a + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_{n+k+1}}{x^{n+k+1}} + \frac{\bar{\omega}_{n+k+1}}{x^{n+k+1}}, \quad \lim \bar{\omega}_{n+k+1} = 0$$

ist dieser Satz gültig; denn die Integration ergibt

$$y = e^{\frac{ax^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{a_{k+1}} \left(C + \frac{C_1}{x} + \dots + \frac{C_n}{x^n} + \frac{\gamma}{x^n} \right),$$

$$\lim \gamma_n = 0.$$

¹ Vgl. POINCARÉ, Acta math, Bd. 8.

Wir nehmen an, der ausgesprochene Satz sei für eine Differentialgleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung richtig, und zeigen, dass er dann auch für eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung gilt.

Wir beginnen mit dem Beweis des Satzes, den wir für eine Differentialgleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung als gültig voraussetzen:

Ist in der Differentialgleichung (C)

$$P' = a_{\lambda} + \frac{a_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{a_{\lambda, n+k+1}}{x^{n+k+1}} + \frac{\bar{a}_{\lambda, n+k+1}}{x^{n+k+1}},$$

$$\lim \bar{a}_{\lambda, n+k+1} = 0$$

so besitzt dieselbe ein Fundamentalsystem

$$y_{\lambda} = e^{\frac{a_{\lambda, \lambda+1}}{x^{k+1}} + \dots} x^{\rho_{\lambda}} \left(C_{\lambda} + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{C_{\lambda n}}{x^n} + \frac{C_{\lambda, n+1}}{x^{n+1}} \right),$$

$$\lim \rho_{\lambda n} = 0.$$

Wir verstehen unter y_1 das in § 2 nachgewiesene Integral von (C) und setzen

$$y = y_1 \int z dx,$$

Dann genügt z der linearen Differentialgleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(D_1) \quad \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + x^k Q_1 \frac{d^{m-2} z}{dx^{m-2}} + \dots + x^{(m-1)k} Q_{m-1} z = 0;$$

dabei ist, wenn man

$$Q_i = \frac{b_i}{x^{n+k+1}}$$

setzt,

$$Q_n = (m)_n x^{-n} \frac{y_1^{(n)}}{y_1} + (m-1)_{n-1} P_1 x^{-(n-1)k} \frac{y_1^{(n-1)}}{y_1} + \dots + (1)_1 P_{n-1} x^{-k} \frac{y_1}{y_1} + P,$$

$$= b_n + \frac{b_{n1}}{x} + \dots + \frac{b_{n, n+k+1}}{x^{n+k+1}} + \frac{\omega_{n, n+k+1}}{x^{n+k+1}},$$

$$\lim \omega_{n, n+k+1} = 0.$$

Insbesondere ist

$$b_n = (m)_n \alpha_1^n + (m-1)_{n-1} a_1 \alpha_1^{n-1} + \dots + (1)_1 a_{n-1} \alpha_1 + a_n.$$

¹ Dabei ist n als feste Zahl gedacht.

Setzt man

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \dots + a_m, \\ g(\beta) &= \beta^{m-1} + b_1 \beta^{m-2} + \dots + b_{m-1}, \end{aligned}$$

so ist

$$f(\alpha_1 + \beta) = \beta g(\beta).$$

Da die charakteristische Gleichung $f(\alpha) = 0$ von (C) die Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ besitzt, so sind

$$\beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1, \dots, \quad \beta_m = \alpha_m - \alpha_1$$

die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $g(\beta) = 0$ von (D₁). Es ist

$$0 > R(\beta_2) > \dots > R(\beta_m).$$

Die Differentialgleichung (D₁) hat nach dem für die Ordnung $m-1$ vorausgesetzten Satze die $m-1$ Integrale

$$\begin{aligned} z_\lambda &= e^{\frac{\beta_\lambda x^{k+1}}{k+1} + \frac{\beta_{\lambda 1} x^k}{k} + \dots + \beta_{\lambda k} x} x^{\sigma_k} \left(D_\lambda + \frac{D_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{D_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\partial_{\lambda n}}{x^n} \right), \\ \lim \partial_{\lambda n} &= 0. \end{aligned} \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

Wir untersuchen die folgenden $m-1$ Integrale von (C):

$$y_k = y_1 \int_\nu^x z_\lambda dx. \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

Der Index λ wird vorübergehend weggelassen.

Durch Integration der Gleichung

$$\begin{aligned} & d \left[e^{\frac{\beta x^{k+1}}{k+1} + \frac{\beta_1 x^k}{k} + \dots + \beta_k x} x^{\sigma-k-\nu} \right] \\ &= \left(\beta + \frac{\beta_1}{x} + \dots + \frac{\beta_k}{x^k} + \frac{\sigma-k-\nu}{x^{k+1}} \right) e^{\frac{\beta x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\sigma-\nu} dx \end{aligned}$$

zwischen den Grenzen ∞ und x erhält man, wenn man

$$\eta_\nu = \int_\nu^x e^{\frac{\beta x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\sigma-\nu} dx$$

setzt, die Recursionsformel

$$\beta\eta_\nu + \beta_1\eta_{\nu+1} + \dots + \beta_k\eta_{\nu+k} + (\sigma - k - \nu)\eta_{\nu+k+1} = e^{\frac{\beta x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\sigma-k-\nu}.$$

Wenn man mittelst dieser Formel $\eta, \eta_1, \dots, \eta_n$ durch $\eta_{n+1}, \dots, \eta_{n+k+1}$ ausdrückt, hat man

$$\begin{aligned} \int_{\infty}^x z dx &= D\eta + D_1\eta_1 + \dots + D_n\eta_n + \int_{\infty}^x e^{\frac{\beta x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\sigma-n} \partial_n dx \\ &= e^{\frac{\beta x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\sigma-k} \left(H + \frac{E_1}{x} + \dots + \frac{E_n}{x^n} \right) + h_1\eta_{n+1} + \dots + h_{k+1}\eta_{n+k+1} \\ &\quad + \int_{\infty}^x e^{\frac{\beta x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\sigma-n} \partial_n dx. \end{aligned}$$

Setzt man

$$z_n = \omega_n + h_1 + \frac{h_2}{x} + \dots + \frac{h_{k+1}}{x^{k+1}},$$

so ist $\lim z_n$ endlich, und die letzten Glieder des Ausdrucks für $\int_{\infty}^x z dx$ schreiben sich

$$\int_{\infty}^x e^{\frac{\beta x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\sigma-n} \tau_n dx.$$

Unter Einführung der Bezeichnung

$$\varepsilon_n = e^{-\frac{\beta x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\sigma-k+1+n} \int_{\infty}^x e^{\frac{\beta x^{k+1}}{k+1} + \dots} v^{\sigma-n-1} \tau_n(v) dx$$

hat man

$$\int_{\infty}^x z dz = e^{\frac{\beta x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\sigma-k} \left(H + \frac{E_1}{x} + \dots + \frac{E_n}{x^n} + \varepsilon_n \right).$$

Um zu beweisen, dass

$$\lim \varepsilon_n = 0$$

ist, setzt man

$$v^{k+1} = x^{k+1} + w$$

oder

$$r = r \left(1 + \frac{r^{\nu}}{r^{k+1}} \right)^{\frac{1}{k+1}},$$

so dass ε_n übergeht in

$$\varepsilon_n = - \frac{1}{(k+1)x} \int_0^{\infty} e^{\frac{rw}{k+1}} + \sum_{\nu=1}^k \frac{\beta_{k+1+\nu}}{\nu} \left[\left(1 + \frac{rw}{x^{k+1}} \right)^{\frac{\nu}{k+1}} - 1 \right] \\ \times \left(1 + \frac{rw}{x^{k+1}} \right)^{\frac{\sigma-n-k-1}{k+1}} \tau_n(v) dw.$$

Für $t \geq 0$ ist

$$\frac{|\beta_{k+1-\nu}|}{\nu} \left(1 + t \frac{k+1}{t} \right)^{\frac{\nu}{k+1}} - 1 \quad (\nu=1, \dots, k)$$

positiv und kleiner als M_ν ; setzt man

$$t = \frac{w^{\frac{k+1}{k+1}}}{x^\nu},$$

so hat man für $w \geq 0$, $x > 0$

$$\frac{|\beta_{k+1-\nu}|}{\nu} x^\nu \left[\left(1 + \frac{w}{x^{k+1}} \right)^{\frac{\nu}{k+1}} - 1 \right] < M_\nu w^{\frac{\nu}{k+1}}.$$

Ferner ist für $w \geq 0$, $x > 1$

$$\left| \frac{\sigma-n-k-1}{k+1} \right| \log \left(1 + \frac{w}{x^{k+1}} \right) < M \log(1+w),$$

wo M eine positive Grösse ist. Wenn man x so gross nimmt, dass $|\tau_n(x)|$ und demnach auch $|\tau_n(v)|$ unterhalb der endlichen Grösse g liegt, so ist

$$|\varepsilon_n| < \frac{g}{k+1} \int_0^{\infty} e^{\frac{R(\beta)w}{x^{k+1}}} + \sum_{\nu=1}^k M_\nu w^{\frac{\nu}{k+1}} + M \log(1+w) dw.$$

Das letzte Integral ist endlich und daher

$$\lim \varepsilon_n = 0.$$

Wenn man den Index λ wieder einführt, hat man

$$\int_x^x z_\lambda dx = e^{\frac{\beta_\lambda x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\sigma_\lambda - k} \left(E_\lambda + \frac{E_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{E_{\lambda n}}{x^n} + \varepsilon_{\lambda n} \right),$$

$$\lim \varepsilon_{\lambda n} = 0,$$

also

$$y_\lambda = e^{\frac{\alpha_\lambda x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\rho_\lambda} \left(C_\lambda + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{C_{\lambda n}}{x^n} + \gamma_{\lambda n} \right)$$

$$\times e^{\frac{\beta_\lambda x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\sigma_\lambda} \left(E_\lambda + \frac{E_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{E_{\lambda n}}{x^n} + \varepsilon_{\lambda n} \right)$$

oder für $\lambda = 2, \dots, m$

$$y_\lambda = e^{\frac{\alpha_\lambda x^{k+1}}{k+1} + \frac{\alpha_{\lambda 1} x^k}{k} + \dots + \alpha_{\lambda k} x} x^{\rho_\lambda} \left(C_\lambda + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{C_{\lambda n}}{x^n} + \gamma_{\lambda n} \right),$$

$$\lim \gamma_{\lambda n} = 0.$$

Ferner hat man

$$x^{-k} \frac{d \log y_\lambda}{dx} = x^{-k} \frac{d \log y_1}{dx} + \frac{z_\lambda}{x^k \int_x^x z_\lambda dx},$$

woraus unter Einsetzung der bekannten Entwicklungen für die Grössen auf der rechten Seite hervorgeht:

$$x^{-k} \frac{d \log y_\lambda}{dx} = \alpha_\lambda + \frac{\alpha_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{\alpha_{\lambda, n+k}}{x^{n+k}} + \frac{\eta_{\lambda n}}{x^{n+k}},$$

$$\lim \eta_{\lambda n} = 0.$$

§ 4.

Wir haben gesehen, dass die Differentialgleichung (C) m Integrale

$$y_1, \dots, y_m$$

mit der Eigenschaft

$$\lim x^{-k} \frac{d \log y_\lambda}{dx} = \alpha_\lambda \quad (\lambda = 1, \dots, m)$$

oder

$$y_\lambda = e^{\frac{(a_\lambda + \delta_\lambda) x^{\lambda+1}}{\lambda+1}}, \quad \lim \delta_\lambda = 0 \quad (\lambda = 1, \dots, m)$$

besitzt. Aus dieser Form geht hervor, dass eine Relation

$$\sum_{\lambda} c_{\lambda} y_{\lambda} = 0$$

mit constanten Coefficienten nicht bestehen kann, dass also y_1, \dots, y_m ein Fundamentalsystem bilden.

Ist

$$\bar{y}_m = c_1 y_1 + \dots + c_m y_m$$

irgend ein Integral mit der Eigenschaft

$$\lim x^{-k} \frac{d \log \bar{y}_m}{dx} = \alpha_m,$$

so muss $c_1 = 0, \dots, c_{m-1} = 0$ sein; es gibt also nur ein einziges Integral y_m , für welches

$$\lim x^{-k} \frac{d \log y_m}{dx} = \alpha_m$$

ist, wenn Integrale, welche sich bloss um einen constanten Factor unterscheiden, als identisch angesehen werden.

Das Integral y_m von (C) ist folgendermassen entstanden. Nach Festlegung der ganzen positiven Zahl n ist $\zeta_\lambda = \zeta_{\lambda, n+k+1}$ ($\lambda = 2, \dots, m$) irgend ein Integralsystem des in § 1 aufgestellten, aus (C) auf die in § 2 angegebene Weise hergeleiteten Differentialgleichungssystems mit der Eigenschaft

$$\lim \zeta_\lambda = 0. \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

Die Gleichung

$$y_1 = e^{\int \frac{a_1 + a_2 z_2 + \dots + a_m z_m}{1 + z_2 + \dots + z_m} dx},$$

wo

$$z_\lambda = \frac{c_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{c_{\lambda, n+k+1}}{x^{n+k+1}} + \frac{\zeta_{\lambda, n+k+1}}{x^{n+k+1}}$$

ist, stellt ein Integral von (C) dar. Wenn unter z_m das einzige Integral von (D₁) verstanden wird, für welches

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-k} \frac{d \log z_m}{dx} = \gamma_m = \alpha_m$$

ist, so ist

$$z_m = e^{\frac{\alpha_m x^{k+1}}{k+1} + \dots}$$

Setzt man an Stelle der ursprünglich angenommenen Zahl n irgend eine ganze positive Zahl $n' > n$, während im übrigen das bei der Bildung von y_m benutzte Verfahren beibehalten wird, so stösst man auf die Function

$$y'_m = e^{\frac{\alpha_m x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\beta_m} \left(C_m + \frac{C_{m1}}{x} + \dots + \frac{C_{mn'}}{x^{n'}} + \frac{\gamma_{mn'}}{x^{n'}} \right),$$

$$\lim \gamma_{mn'} = 0,$$

welche, weil

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-k} \frac{d \log y'_m}{dx} = \alpha_m$$

ist, mit y_m identisch sein muss.

Es ist als für *jeden* Werth von n

$$y_m = e^{\frac{\alpha_m x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\beta_m} \left(C_m + \frac{C_{m1}}{x} + \dots + \frac{C_{mn}}{x^n} + \frac{\gamma_{mn}}{x^n} \right),$$

$$\lim \gamma_{mn} = 0.$$

§ 5.

Wir wissen jetzt, dass das Integral y_m durch die Normalreihe

$$S_m = e^{\frac{\alpha_m x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\beta_m} \left(C_m + \frac{C_{m1}}{x} + \frac{C_{m2}}{x^2} + \dots \right)$$

asymptotisch dargestellt wird.

Es ist noch zu zeigen, dass für jeden Werth $\lambda = 1, \dots, m$ das Integral y_λ durch die Normalreihe S_λ asymptotisch dargestellt wird, d. h. dass für *jeden* Werth von n

$$y_\lambda = e^{\frac{\alpha_\lambda x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\beta_\lambda} \left(C_\lambda + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{C_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\gamma_{\lambda n}}{x^n} \right), \quad \lim \gamma_{\lambda n} = 0$$

ist, nicht nur für die in § 2 eingeführte feste Zahl n . Wir verstehen unter n' eine beliebige ganze positive Zahl, welche die ursprünglich eingeführte Zahl n übertrifft. Wir bilden, von dieser Zahl n' ausgehend, ein Integral y'_λ ebenso, wie y_λ mit der Zahl n gebildet wurde. Dann ist

$$y'_\lambda = e^{\frac{a_\lambda x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\rho_\lambda} \left(C'_\lambda + \frac{C'_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{C'_{\lambda n'}}{x^{n'}} + \frac{\gamma'_{\lambda n'}}{x^{n'}} \right),$$

$$\lim \gamma_{\lambda n'} = 0.$$

Die Integrale y'_1, \dots, y'_m bilden ein Fundamentalsystem; es ist

$$y_\lambda = y'_\lambda + c_{\lambda+1} y'_{\lambda+1} + \dots + c_m y'_m.$$

Wenn man y'_λ durch den obigen Ausdruck ersetzt und

$$y'_\mu = e^{\frac{a_\mu x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\rho_\mu} (C'_\mu + \gamma'_\mu), \quad \lim \gamma'_\mu = 0 \quad (\mu = \lambda+1, \dots, m)$$

setzt, so hat man

$$y_\lambda = e^{\frac{a_\lambda x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\rho_\lambda} \left(C'_\lambda + \frac{C'_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{C'_{\lambda n'}}{x^{n'}} + \frac{\gamma'_{\lambda n'}}{x^{n'}} \right) + \sum_{\mu=\lambda+1}^m e^{\frac{(a_\mu - a_\lambda)x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\rho_\mu - \rho_\lambda} c'_\mu (C'_\mu + \gamma'_\mu).$$

Setzt man

$$\gamma_{\lambda n'} = \gamma'_{\lambda n'} + \sum_{\mu=\lambda+1}^m e^{\frac{(a_\mu - a_\lambda)x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\rho_\mu - \rho_\lambda + n} c'_\mu (C'_\mu + \gamma'_\mu),$$

so ist, da der reelle Theil von $\alpha_\mu - \alpha_\lambda$ negativ ist,

$$\lim \gamma_{\lambda n'} = 0$$

und man hat

$$y_\lambda = e^{\frac{a_\lambda x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\rho_\lambda} \left(C'_\lambda + \frac{C'_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{C'_{\lambda n'}}{x^{n'}} + \frac{\gamma_{\lambda n'}}{x^{n'}} \right)$$

für jede Zahl n' , w. z. b. w.

Ist

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_m y_m$$

irgend ein Integral von (C) und

$$c_1 = \dots = c_{n-1} = 0, \quad c_n \neq 0,$$

so hat man für einen beliebigen Werth von n

$$y = c_\lambda e^{\frac{a_\lambda x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\rho_\lambda} \left(C_\lambda + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{C_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\gamma_{\lambda n}}{x^n} \right) + \sum_{\mu=\lambda+1}^m c_\mu e^{\frac{(a_\mu + \delta_\mu) x^{k+1}}{k+1}},$$

wo

$$\lim r_{\lambda n} = 0, \quad \lim \delta_\mu = 0$$

ist. Setzt man

$$\bar{r}_{\lambda n} = r_{\lambda n} + \sum_{\mu=\lambda+1}^m \frac{c_\mu}{c_\lambda} e^{(a_\mu - a_\lambda + \delta_\mu) \frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{a_{\lambda 1} x^k}{k} - \dots} x^{-\rho_\lambda + n},$$

so ist

$$y = c_\lambda e^{\frac{a_\lambda x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\rho_\lambda} \left(C_\lambda + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{C_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\gamma_{\lambda n}}{x^n} \right),$$

$$\lim \bar{r}_{\lambda n} = 0,$$

d. h. das Integral

$$y = c_\lambda y_\lambda + \dots + c_m y_m$$

wird, wenn c_λ von Null verschieden ist, durch die Reihe $c_\lambda S_\lambda$ asymptotisch dargestellt.

Wir haben uns bisher auf die Betrachtung reeller positiver Werthe von x beschränkt. Geht x mit dem Argument ω ins Unendliche, so wird die Differentialgleichung (C) durch die Substitution $x = \rho e^{i\omega}$ in eine Differentialgleichung mit der unabhängigen Veränderlichen ρ übergeführt, deren charakteristische Gleichung die Wurzeln

$$e^{i(k+1)\omega} \alpha_1, \dots, e^{i(k+1)\omega} \alpha_m$$

besitzt. Durch die bisherige Voraussetzung, dass die reellen Theile der Wurzeln der charakteristischen Gleichung verschieden sind, sind diejenigen Argumente vorläufig ausgeschlossen, für welche zwei der Grössen $e^{i(k+1)\omega} \alpha_\lambda$ gleiche reelle Theile erhalten.

SUR LES SÉRIES DE POLYNOMES ET DE FRACTIONS RATIONNELLES

PAR

EMILE BOREL

A PARIS.

Introduction.

1. L'étude des séries de fractions rationnelles, qui renferment comme cas particulier les séries de polynomes, paraît devoir suivre naturellement la théorie des séries de puissances. Il y a cependant près d'un siècle que cette dernière théorie est achevée dans ses traits essentiels et l'on ne sait presque rien de général sur les séries de fractions rationnelles. Ce fait étonnera moins, si l'on se rappelle certains résultats récents, obtenus notamment par MM. RUNGE et PAINLEVÉ et sur lesquels nous reviendrons: retenons-en simplement ce fait, que les séries de fractions rationnelles et même les séries de polynomes sont un instrument analytique infiniment plus général que les séries de puissances; cette grande généralité peut être un avantage pour certaines applications; mais elle crée des difficultés presque insurmontables dans la recherche des propriétés communes à toutes les séries considérées.

2. Aussi paraît-il nécessaire, si l'on désire que ces séries puissent être utilisées commodément, de ne pas les considérer dans toute leur généralité, mais d'étudier tout d'abord parmi elles des classes plus ou moins étendues.

Dans cet ordre d'idées, on doit signaler tout d'abord l'étude déjà ancienne de séries dont les termes sont proportionnels à des polynomes P_n donnés à l'avance et dépendant seulement de l'entier n . Sans méconnaître l'intérêt de ces recherches, ni leur grande importance dans bien des appli-

ations, on doit observer qu'à chaque classe remarquable de polynômes correspond une théorie particulière, et qu'on ne peut guère espérer obtenir par cette voie des résultats un peu généraux.

A un autre point de vue, rappelons que, à la suite des travaux mémorables de WEIERSTRASS, M. MITTAG-LEFFLER a donné, pour représenter les fonctions analytiques uniformes dont les points singuliers sont dénombrables, des séries de fractions rationnelles, d'une forme spéciale appropriée au but à atteindre. Pour la classe de fonctions analytiques considérées, ces séries fournissent un mode de représentation très remarquable par ce double caractère: la série converge dans tout le domaine d'existence de la fonction et les singularités de cette dernière y sont mises en évidence de la manière la plus simple.

Des séries de fractions rationnelles plus compliquées ont été étudiés, notamment par MM. POINCARÉ, GOURSAT, LERCH, PRINGSHEIM; j'en ai repris l'étude dans ma thèse,¹ à un point de vue nouveau, sur lequel j'aurai à revenir dans la première partie de ce mémoire.

Enfin, il y a peu de temps, M. MITTAG-LEFFLER a attiré l'attention sur certaines séries très remarquables de polynômes et ses recherches ont été suivies de plusieurs autres, dont nous parlerons plus loin.

3. Je voudrais essayer d'esquisser ici une théorie générale des séries de polynômes et de fractions rationnelles, et de leurs applications à la théorie des fonctions, en m'inspirant des idées que j'ai développées dans ma thèse et dans mes Leçons sur la théorie des fonctions. J'indiquerai, chemin faisant, un certain nombre de résultats nouveaux que j'ai obtenus depuis un an. Dans la recherche, j'ai été guidé par des idées que j'ai exposées dans mon Mémoire sur les séries divergentes; je n'y reviendrai pas, me réservant d'étudier plus tard les rapports de ma théorie des séries sommables avec le sujet de ce mémoire. Les principaux résultats nouveaux de ce mémoire ont été communiqués à l'Académie des sciences les 23 mai 1899, 17 et 23 avril 1900; j'en ai exposé aussi une partie dans un cours que j'ai eu l'honneur de faire au Collège de France pendant l'hiver 1899—1900 (Fondation Claude-Antoine Peccot).

¹ *Sur quelques points de la théorie des fonctions.* Annales de l'Ecole normale, 1895.

4. Ce mémoire est divisé en trois parties.

Dans la première, j'étudie les séries générales de fractions rationnelles au moyen de méthodes analogues à celles que j'ai appliquées dans ma thèse aux séries de fractions simples. Je cherche à obtenir des résultats aussi étendus que possible au moyen seulement d'hypothèses d'*inégalités* relatives aux numérateurs. Des hypothèses de cette nature sont d'ailleurs indispensables si l'on veut éviter qu'il puisse n'y avoir aucun rapport entre les singularités des séries et les singularités des fonctions qu'elles représentent.

Dans la seconde partie, j'étudie avec soin la mesure de la convergence des développements en série de polynomes de M. MITTAG-LEFFLER. Cette étude pourra rendre, je pense, d'importants services, dans les applications de ces séries. Mais mon but principal est d'obtenir, à l'aide de ces séries de polynomes, des propriétés nouvelles des séries de fractions rationnelles étudiées dans la première partie.

Dans la troisième partie enfin, j'indique comment les résultats précédents suggèrent naturellement l'idée d'une généralisation de la théorie du prolongement analytique et j'esquisse, dans ses traits essentiels, cette théorie nouvelle. J'espère indiquer là une direction dans laquelle il y a encore beaucoup à faire et où d'importants résultats pourront être obtenus, soit dans le champ des variables réelles, soit dans le champ des variables complexes.

Je termine par une brève conclusion, dans laquelle j'indique les conséquences que me paraissent avoir les résultats de ce mémoire, au point de vue de la notion de fonction et les recherches principales qu'il y aurait encore à faire.

PREMIÈRE PARTIE.

Les séries de fractions rationnelles.

5. Nous avons déjà remarqué qu'il y a certainement bien peu de propriétés communes à toutes les séries de fractions rationnelles; c'est une conséquence du fait qu'il est possible d'introduire beaucoup d'arbitraire

dans les représentations connues des fonctions analytiques par de telles séries. Il est donc indispensable de faire, sur les séries que l'on étudie, certaines hypothèses restrictives; pour que le lecteur se rende bien compte de la mesure dans laquelle ces hypothèses sont nécessaires, il ne sera pas inutile de rappeler rapidement quelques résultats relatifs à la représentation des fonctions analytiques par les séries de fractions rationnelles.

6. WEIERSTRASS a le premier démontré la possibilité de former des séries de fractions rationnelles représentant des fonctions analytiques différentes dans leurs diverses régions de convergence. Une méthode déduite par M. APPELL de la considération de l'intégrale de CAUCHY permet d'obtenir ce résultat sous la forme la plus simple.¹ Etant donnés, par exemple, trois cercles tels que la région du plan extérieure aux trois cercles se compose de deux domaines séparés D_1 et D_2 , et deux fonctions analytiques F_1 et F_2 régulières respectivement dans ces deux domaines, on peut trouver une série

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{(n)}}{(z-a)^n} + \frac{B^{(n)}}{(z-\beta)^n} + \frac{C^{(n)}}{(z-\gamma)^n}$$

convergeant uniformément et absolument dans D_1 et dans D_2 et telle que l'on ait

$$F(z) = F_1(z)$$

dans tout D_1 et

$$F(z) = F_2(z)$$

dans tout D_2 .

Ce résultat conduit à exclure de nos recherches les séries renfermant des puissances de $\frac{1}{z-a}$ dont l'exposant grandit indéfiniment.²

¹ Acta mathematica, t. I.

² En effet dans le cas où une telle série serait convergente pour toute valeur de $\frac{1}{z-a}$, la difficulté du texte ne se présenterait pas, mais on aurait alors, si a est isolé, un point singulier essentiel en a , cas bien connu. Un cas plus général a été étudié par M. MITTAG-LEFFLER dans le tome 4 des Acta, et enfin le cas où les points singuliers essentiels seraient aussi deus que le sont les pôles dans les séries que nous étudierons est bien plus compliqué et son étude doit suivre celle que nous tentons ici.

Nous supposons donc que, dans les divers termes de la série, le degré de multiplicité de chaque pôle est limité. Mais cette hypothèse n'est pas suffisante; on peut, en effet, comme l'a montré M. PAINLEVÉ former des séries de fractions rationnelles *n'ayant que des pôles simples* et représentant, dans des régions séparées du plan, des fonctions très diverses.

7. Voici un exemple, que j'ai donné, dans mon Cours du Collège de France, pour montrer quels résultats singuliers on peut obtenir, même avec des pôles simples. Désignons par $\varphi(m)$ la fonction arithmétique bien connue depuis GAUSS et posons

$$F(z) = \sum \frac{\varphi(m)z^m}{1 - z^m}.$$

Cette série est manifestement convergente pour toute valeur de z dont le module est inférieur à un ; elle converge absolument et uniformément dans tout cercle de rayon plus petit que un . On a d'ailleurs

$$F'(z) = \sum [\sum \varphi(\delta_m)] z^m = \sum m z^m = \frac{z}{(1 - z)^2},$$

en désignant par δ_m les divers diviseurs de l'entier m .

Ainsi la série $F(z)$, qui n'a que des pôles simples, représente une fonction analytique dont l'unique singularité est un pôle double. Ce pôle double est d'ailleurs le seul point singulier de la fonction sur le cercle de rayon un , alors que les points singuliers des termes de la série forment un ensemble dense sur tout arc de ce cercle.

On pourrait varier à l'infini les exemples; mais il est temps d'aborder notre sujet principal; nous en avons dit assez pour justifier la nécessité d'hypothèses restrictives; nous ne prétendons pas d'ailleurs que celles que nous serons amenés à faire soient les seules qui conduisent à des résultats simples; mais on se convaincra aisément qu'elles sont presque toutes imposées par la nature de la question.

8. Soit

$$(1) \quad F(z) = \sum \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$$

une série de fractions rationnelles. Nous supposons tout d'abord que les

degrés des polynomes P_n et R_n sont limités;¹ si la série est convergente pour au moins un point $z = z_0$, nous poserons $z = z_0 + \frac{1}{z'}$ et il viendra

$$F(z) = \sum \frac{P_n(z_0)}{R_n(z_0)} + \sum \left[\frac{P_n\left(z_0 + \frac{1}{z'}\right)}{R_n\left(z_0 + \frac{1}{z'}\right)} - \frac{P_n(z_0)}{R_n(z_0)} \right].$$

Dès lors, dans la seconde somme, on obtiendra visiblement des fractions rationnelles telles que le degré du numérateur soit *inférieur* à celui du dénominateur; nous pouvons donc supposer, afin de ne pas multiplier les notations, que cette condition est remplie par la série (1). Nous supposons de plus, *bien que ce ne soit pas indispensable*, que les modules des zéros de tous les polynomes $R_n(z)$ sont supérieurs à un nombre fixe R . Cela revient à supposer que le point z_0 n'est pas un point limite de l'ensemble formé par tous ces zéros. Enfin, nous désignerons par m le degré le plus élevé de tous les polynomes $R_n(z)$ et nous supposons que, dans chacun d'eux, le coefficient de la plus haute puissance de z est égal à l'unité. On pourra donc écrire

$$(2) \quad P_n(z) = A_n^{(1)} z^{m-1} + A_n^{(2)} z^{m-2} + \dots + A_n^{(n-1)} z + A_n^{(m)},$$

$$(3) \quad R_n(z) = z^m + B_n^{(1)} z^{m-1} + B_n^{(2)} z^{m-2} + \dots + B_n^{(m)},$$

certains des coefficients A et B pouvant être nuls. L'hypothèse que nous avons faite sur les zéros de $R_n(z)$ entraîne visiblement

$$(4) \quad |B_n^{(k)}| < \frac{|m|}{|k|(m-k)} R^k.$$

Notre hypothèse fondamentale est maintenant la suivante; il existe une série convergente à termes positifs

$$(5) \quad \sum u_n,$$

telle que l'on ait

$$(6) \quad |A_n^{(k)}| < u_n^{m+1}.$$

En ce qui concerne la possibilité de lever cette restriction, voir p. 351.

Nous allons voir que cette hypothèse permet d'étudier la série proposée, sans rien supposer sur la distribution dans le plan des zéros des $R_n(z)$. Posons

$$(7) \quad R_n(z) = (z - a_n)(z - b_n) \dots (z - l_n),$$

le nombre des lettres a, b, \dots, l étant égal à m . Les divers nombres a_n, b_n, \dots, l_n correspondant à la même valeur de n , ou à des valeurs différentes, peuvent être d'ailleurs distincts ou non; nous ne supposons rien à ce sujet.

Traçons un cercle ayant pour centre le point a_n et pour rayon hu_n , h étant une constante positive; il est clair que si le point z est extérieur à ce cercle, l'on aura:

$$(8) \quad |z - a_n| > hu_n,$$

Si donc le point z est extérieur à tous les cercles analogues C et intérieur au cercle de rayon R , on aura, en vertu de (2), (6), (7), (8),

$$(9) \quad \left| \frac{P_n(z)}{R_n(z)} \right| < \frac{u_n^{m+1}(R^{m-1} + R^{m-2} + \dots + R + 1)}{h^m u_n^m} < ku_n,$$

k étant un nombre fixe. La série (1) a donc ses termes respectivement inférieurs en module à ceux d'une série convergente à termes positifs. Elle converge donc absolument et uniformément pour toutes les valeurs de z qui satisfont à la condition énoncée. Mais existe-t-il de telles valeurs de z ? Nous allons montrer que l'on peut choisir le nombre h de telle manière que, dans toute région aussi petite que l'on veut donnée à l'avance, il existe, non seulement des points de convergence, mais des lignes de convergence uniforme.¹ Considérons en effet des droites parallèles à une direction déterminée quelconque et une perpendiculaire commune D à ces droites. Les points intérieurs aux divers cercles C que nous avons construits se projettent sur D suivant des segments dont la longueur est égale au diamètre

¹ Si l'on avait voulu seulement prouver l'existence de points de convergence, on aurait pu remplacer l'inégalité (8) par $|z - a_n| > h\sqrt{u_n}$ et l'inégalité (6) par $A_n^{(4)} < u^{\frac{m}{2}+1}$, inégalité moins restrictive.

de ces cercles; l'un de ces segments a donc pour longueur $2u_n$ et leur longueur totale est

$$2mh\sum u_n$$

et est par suite *finie*, la série $\sum u_n$ étant convergente.

Dès lors, étant donné sur D un segment AB aussi petit que l'on veut, il existe à l'intérieur de AB une infinité non dénombrable de points n'appartenant qu'à un *nombre limité* des segments considérés.¹ Soit P l'un de ces points, ne coïncidant avec la projection du centre d'aucun des cercles et soit Δ la perpendiculaire à D menée par le point P . Cette droite Δ a les propriétés suivantes: elle ne passe par aucun des points a_n, \dots, l_n, \dots elle ne coupe qu'un nombre limité des cercles C . Dans ces conditions, la série (1) est absolument et uniformément convergente sur tout Δ . Il est en effet possible, pour étudier la convergence de cette série, de supprimer les termes, en nombre limité, qui correspondent² aux cercles C rencontrant Δ ; en effet, aucun de ces termes ne devient infini sur Δ , d'après la première des propriétés que nous avons reconnues à cette droite. Ces termes étant supprimés, les termes restants sont, en vertu des inégalités (9) et de la deuxième des propriétés de Δ , respectivement inférieurs en module aux termes d'une série convergente à termes positifs. Notre proposition est donc démontrée.

9. Il résulte de propositions bien connues que la somme de la série $F'(z)$ est une fonction continue sur Δ , dont on obtient l'intégrale en intégrant la série terme à terme. La droite Δ sera dite une droite de continuité. Il existe donc des droites de continuité parallèles à toute direction, dans tout intervalle aussi petit que l'on veut donné à l'avance. Il en résulte, en particulier, que l'on peut construire un polygone de continuité différant aussi peu que l'on veut d'une courbe donnée à l'avance.

Relativement à la construction de courbes de continuité autres que

¹ Voir mes Leçons sur la théorie des fonctions, ch. III, pour la démonstration rigoureuse de ce point, que l'on peut regarder comme presque évident.

² Il est essentiel de remarquer que, si en un même point a coïncident une infinité de pôles $a_n, b_n, c_n, a_n'', \dots$, il correspond à chacun de ces pôles un cercle C différent; et, comme il n'y a qu'un nombre limité de cercles C rencontrant Δ , on devra supprimer seulement un nombre limité des termes dans lesquels $R_n(z)$ s'annule pour $z = a$.

des droites, je renverrai aux détails que j'ai donnés dans ma thèse, où j'ai traité un cas particulier de la question qui vient de nous occuper.

10. Soit C une courbe de continuité fermée (courbe continue ou polygone, peu importe). Quelle est la valeur de l'intégrale

$$\int_C F(z) dz,$$

intégrale que nous savons avoir un sens?

La série uniformément convergente pouvant être intégrée terme à terme, on a

$$\int_C F(z) dz = \sum \int_C \frac{P_n(z)}{R_n(z)} dz = 2i\pi \sum_{n=1}^{n=\infty} (\Sigma \rho_n)$$

en désignant par $\Sigma \rho_n$ la somme des résidus de la fraction rationnelle $\frac{P_n(z)}{R_n(z)}$, relativement aux pôles intérieurs à C .

Il résulte de ce qui précède que la série:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} (\Sigma \rho_n)$$

est convergente; mais il n'est pas inutile d'observer que l'on n'a pas le droit de supprimer les parenthèses qui groupent les résidus ρ_n correspondant à une même fraction rationnelle; il peut, en effet, fort bien arriver, que la série

$$\Sigma \rho_n,$$

soit *divergente*, la sommation étant étendue à tous les résidus, intérieurs à C , de tous les termes de la série $F(z)$, pris dans un ordre quelconque. Pour s'en rendre compte, il suffit d'observer que, si un même nombre α annule une infinité de $R_n(z)$, il peut arriver que la série dont les termes sont les résidus de toutes les fractions $\frac{P_n(z)}{R_n(z)}$ relativement à ce pôle soit *divergente*. Ce fait n'est nullement incompatible avec nos hypothèses, lesquelles ne portent que sur les coefficients des P_n . Supposant, pour fixer

les idées que le pôle a_n soit simple, le résidu de la fraction rationnelle $\frac{P_n(z)}{R_n(z)}$ relativement à ce pôle est, comme l'on sait

$$\frac{P_n(a_n)}{(a_n - b_n)(a_n - c_n) \dots (a_n - l_n)}.$$

Il est donc possible, les coefficients des P étant choisis, de prendre $a_n - b_n$, $a_n - c_n$, ..., $a_n - l_n$, ou même seulement l'une de ces différences assez petite pour que ce résidu dépasse tout nombre donné à l'avance. Si l'on procède de même pour tous les termes dans lesquels figure en dénominateur $z - a_n$ on voit que l'on peut rendre aussi divergente que l'on veut la série des résidus des diverses fractions relativement à un même pôle. Si ce pôle est intérieur au contour C , la série

$$\sum \rho_n$$

ne peut donc être convergente, si l'on ne considère pas ses termes comme convenablement groupés. Il est assez remarquable que le théorème fondamental de CAUCHY

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) dz = \sum \rho_n$$

la somme étant étendue aux résidus intérieurs à C , s'applique, en un certain sens, à la fonction $F(z)$, même dans le cas où les divers pôles n'ont pas de résidus déterminés: quel que soit le contour C , pourvu que l'intégrale existe, la série divergente $\sum \rho_n$ devient convergente par un arrangement convenable de ses termes. Nous étudierons plus loin, à la fin de cette première partie, des cas où les résidus ont, pour chaque pôle, une existence individuelle et des propriétés encore plus précises.

11. Mais nous allons terminer d'abord ce que nous avons à dire des séries que nous considérons en ce moment; cherchons quelles conditions d'inégalité doivent être vérifiées pour que les séries obtenues par la dérivation terme à terme possèdent aussi des courbes de convergence.

Nous avons posé

$$F(z) = \sum \frac{P_n(z)}{R_n(z)},$$

nous écrivons

$$F'(z) = \sum \frac{P'_n(z) R_n(z) - R'_n(z) P_n(z)}{[R_n(z)]^2}$$

et nous allons chercher quelles conséquences entraînent les égalités et inégalités de la page 314. Nous remplaçons seulement l'inégalité (6) par l'inégalité plus générale

$$(6') \quad |A_n^{(k)}| < u_n^\mu,$$

μ étant un nombre arbitraire que nous nous réservons de fixer ultérieurement.

Il est manifeste alors que, si l'on pose,

$$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^{(1)} z^{m'-1} + A_n^{(2)} z^{m'-2} + \dots + A_n^{(m')}}{z^m + B_n^{(1)} z^{m'-1} + \dots + B_n^{(m')}} ,$$

on aura tout d'abord

$$m' = 2m$$

et que, de plus, les A' et les B' vérifieront des inégalités tout à fait semblable aux inégalités (4) et (6') que vérifient les A et les B . En effet, dans l'inégalité (6') l'introduction d'un facteur constant dans le second membre n'a aucune importance, puisque l'essentiel est que la série

$$\sum u_n$$

soit convergente, ce qui ne dépend pas de la multiplication des u_n par une constante.

Le seul changement essentiel qu'éprouve la série lorsqu'on la remplace par sa dérivée est donc le changement de m en $2m$. On devra donc, pour pouvoir appliquer à la dérivée les résultats que nous avons obtenus pour la série, supposer que dans l'inégalité (6), m est remplacé par $2m$, c'est à dire que, dans (6'), l'on a

$$\mu \geq 2m + 1.$$

On verra de même que, si l'on a,

$$\mu \geq \lambda m + 1,$$

la série

$$F^{(\lambda)}(z) = \sum \frac{d^\lambda}{dz^\lambda} \left(\frac{P_n(z)}{R_n(z)} \right)$$

possède des droites (et même des courbes) de convergence uniforme. On peut d'ailleurs, sur chacune de ces droites, intégrer la série terme à terme, ce qui justifie les notations $F'(z), \dots, F^{(\lambda)}(z)$ que nous avons adoptées pour désigner les séries obtenues en dérivant terme à terme la série $F(z)$.

12. Nous avons d'ailleurs fait observer que les droites de convergence uniforme peuvent être prises parallèles à une direction arbitraire et qu'il en existe une infinité non dénombrable dans tout intervalle, si petit qu'il soit. On peut ajouter qu'il existe une infinité de points tels que par chacun d'eux il passe une infinité de droites de convergence uniforme, intérieures à un angle quelconque donné à l'avance (voir mes Leçons sur la théorie des fonctions ch. V). Considérons l'un de ces points et les diverses droites de convergence qui y passent: *sur chacune d'elles la fonction $F(z)$ a la même dérivée $F'(z)$* . Si l'on prend deux droites de convergence uniforme rectangulaires, et les axes des x et des y parallèles à ces droites, la partie réelle u de $F(z)$, satisfait, en leur point d'intersection, à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

On pourrait convenir de dire que la fonction $F(z)$ est *quasi-monogène* et la fonction u *quasi-harmonique*. Pour nous borner à $F(z)$ on peut retenir que cette fonction a les propriétés suivantes: *elle est continue, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre λ au moins, sur une infinité non dénombrable de droites, parallèles à toute direction, dans tout intervalle; il existe d'ailleurs dans tout domaine une infinité non dénombrable de points par lesquels passent, dans tout angle, des droites de convergence en infinité non dénombrable; enfin, en tout point par lequel il passe plus d'une droite de convergence, la dérivée est la même dans toutes les directions où elle existe. Il serait intéressant de rechercher si une fonction satisfaisant à ces conditions peut être nulle sur un segment de droite sans être identiquement nulle; mais c'est là une question que je n'ai pu résoudre, même en adjoignant l'hypothèse que toutes les dérivées existent, cas que nous allons étudier dans un instant. Si l'on résolvait par la négative la question que nous venons de poser,*

on aurait généralisé beaucoup la notion de fonction analytique; nous devrions nous contenter d'une généralisation bien moins étendue, qui nous a été suggérée en grande partie par les considérations précédentes et qui mettra peut être sur la voie de la solution complète.

13. Mais revenons aux dérivées successives de $F(z)$; nous avons vu que la condition de convergence, pour la dérivée d'ordre λ , peut s'écrire

$$(6') \quad |A_n^{(\lambda)}| < n_n^\mu$$

avec

$$\mu \geq \lambda m + 1.$$

Supposons que l'inégalité (6') soit vérifiée quel que soit μ , à partir d'une certaine valeur de n (cette valeur de n est évidemment fonction de μ). Alors, quel que soit λ , il existe des droites sur lesquelles la série converge ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre λ inclusivement. On ne peut en conclure immédiatement qu'il existe des droites sur lesquelles la série converge ainsi que toutes ses dérivées; ce résultat est cependant exact, comme on s'en assurera aisément en reprenant les démonstrations qui précèdent.¹

On peut remarquer que l'on peut trouver, d'une infinité de manières, un système unique d'inégalités, entraînant les inégalités (6') pour toute

¹ On peut même aller plus loin; les inégalités

$$(1) \quad |A_n^{(k)}| < n_n^\mu$$

expriment que la série

$$(2) \quad \sum |A_n^{(k)}|^{\frac{1}{k}}$$

est convergente. Si dans les inégalités (1) les n_n dépendent de μ , mais sont toujours tels que la série $\sum n_n$ soit convergente, la série (2) est toujours convergente, quel que soit μ . Or l'ensemble des séries (2) que l'on obtient en donnant à μ des valeurs entières est visiblement tel (voir les travaux du P. du BOIS REYMOND et le mémoire de M. HADAMARD dans le tome 18 des Acta mathematica) qu'il existe une série à termes positifs moins convergente que chacune d'elles. Si, pour ne pas compliquer les notations, on désigne cette série par $\sum n_n$, on aura, pour n assez grand, les inégalités (1), quel que soit μ , les n_n ne dépendant pas de μ .

valeur de μ (pourvu que n soit assez grand). Par exemple, on peut écrire:

$$|A_n^k| < e^{-n_n^k},$$

h étant un nombre positif quelconque. Mais nous ne pouvons nous attarder sur ces détails.

14. Nous allons rechercher maintenant comment se comporte la série que nous étudions, dans le voisinage d'un point quelconque du plan. Nous serons ainsi amenés, par la voie la plus simple, à connaître les propriétés spéciales des séries de fractions rationnelles qui restent convergentes après la décomposition en éléments simples. Mais occupons-nous d'abord des séries les plus générales que nous écrivons toujours

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(z)}{R_n(z)},$$

en supposant:

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{n=m} A_n^{(k)} z^{m-k},$$

$$R_n(z) = z^m + \sum_{k=1}^{l=m} B_n^{(k)} z^{m-k} = (z - a_n) \dots (z - l_n),$$

$$|A_n^k| < n_n^{m+1},$$

la série $\sum n_n$ étant convergente.

Cela posé soit α un point quelconque du plan; nous dirons que ce point α est un pôle d'ordre m pour la série $F(z)$ si l'un au moins des dénominateurs $R_n(z)$ est égal à $(z - \alpha)^m$; il résulte des inégalités relatives aux $A_n^{(k)}$ qu'il est alors possible de mettre la série $F(z)$ sous la forme

$$(10) \quad F(z) = \frac{A}{(z - \alpha)^m} + F_1(z),$$

A étant une constante et $F_1(z)$ une série analogue à $F(z)$, mais pour laquelle α n'est pas un pôle d'ordre m .

Nous dirons que A est le numérateur correspondant à α ; dans le cas où α n'est pas un pôle d'ordre m , nous conviendrons de dire que le numérateur correspondant est zéro; de cette manière à tout point α du plan correspond un nombre bien déterminé A . On a dès lors le théorème suivant.

Etant donné un point quelconque α et un chemin quelconque C aboutissant en ce point et sur lequel la série $F(z)$ converge, sauf peut être en α , si le produit $(z - \alpha)^m F(z)$ tend vers une limite lorsque z tend vers α en suivant le chemin C , cette limite est égale au numérateur correspondant A . De plus, il existe effectivement des chemins C aboutissant à α et tels que la limite considérée existe. Ces chemins C sont en infinité non dénombrable; la démonstration même fera voir combien d'arbitraire subsiste dans leur formation.

Il est manifeste qu'il suffit de démontrer la proposition précédente dans le cas où le point α n'est pas un pôle d'ordre m ; car, si elle est vraie pour la fonction $F_1(z)$ l'égalité (10) montre qu'elle sera vraie aussi pour $F(z)$.

Nous supposons donc que α n'est pas un pôle d'ordre m pour $F(z)$, c'est à dire qu'aucun des dénominateurs $R_n(z)$ n'est égal à $(z - \alpha)^m$; nous allons montrer tout d'abord qu'il existe une infinité de chemins C sur lesquels la série $F(z)$ est convergente et tels que le produit $(z - \alpha)^m F(z)$ tende vers zéro lorsque z tend vers α .

Dans ce but, donnons-nous un nombre positif η que nous ferons tendre ultérieurement sur zéro, mais qui est actuellement bien déterminé; nous allons montrer qu'il y a des points voisins de α et tels qu'en chacun d'eux l'on ait

$$|(z - \alpha)^m F(z)| < \eta.$$

Traçons d'abord autour de α un cercle de rayon arbitraire ρ , duquel nous ne sortirons pas et soit r le maximum du module de z dans ce cercle; on a, dans ce cercle,

$$|P_n(z)| < u_n^{m+1}(r^{m-1} + r^{m-2} + \dots + r + 1);$$

la série $\sum u_n$ étant convergente, nous pouvons choisir q assez grand pour que l'on ait

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} (r^{m-1} + \dots + r + 1) u_n < \frac{\eta}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=q+1}^{\infty} u_n < \frac{1}{2m}.$$

Ayant ainsi choisi q , considérons la somme

$$S = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{P_n(z)}{R_n(z)}.$$

c'est une fraction rationnelle qui admet le point α comme pôle d'ordre $m - 1$ au plus; nous tracerons autour de α un cercle de rayon ρ' assez petit pour qu'il n'y ait pas à l'intérieur de ce cercle d'autre pôle de $S_q(z)$ et, pour que l'on ait, en tout point intérieur à ce cercle

$$|z - \alpha| < \frac{\gamma}{2};$$

cela est évidemment possible.

Ceci fait, soit ε un nombre positif inférieur à ρ et à ρ' ; traçons un cercle I' ayant pour centre α et pour rayon ε ; traçons de plus des cercles C ayant pour centres les divers zéros de $R_n(z)$ (pour $n \geq q + 1$), et pour rayons respectifs εu_n . Si le point z est extérieur à ces cercles et intérieur au cercle I' de rayon ε , on aura, d'une part

$$\left| \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{P_n(z)}{R_n(z)} \right| < \sum \frac{u_n^{m+1} (r^{m-1} + \dots + r + 1)}{\varepsilon^m u_n^m} < \frac{\gamma}{2\varepsilon},$$

et, d'autre part

$$|z - \alpha| < \varepsilon.$$

On aura donc

$$\left| (z - \alpha)^m \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{P_n(z)}{R_n(z)} \right| < \frac{\gamma}{2}$$

et par suite

$$|(z - \alpha)^m P(z)| < \gamma.$$

Cette inégalité est vérifiée pour les points *intérieurs* au cercle I' et *extérieurs* aux cercles C ; il faut prouver qu'il existe de tels points. On y arrive sans peine par un raisonnement analogue à celui de la page 316. Si l'on projette orthogonalement sur une direction quelconque le cercle I' et les cercles C , le premier se projette sur un segment 2ε tandis que la somme des projections des cercles C est au plus égal à

$$m \sum_{n=q+1}^{\infty} 2\varepsilon u_n < \varepsilon.$$

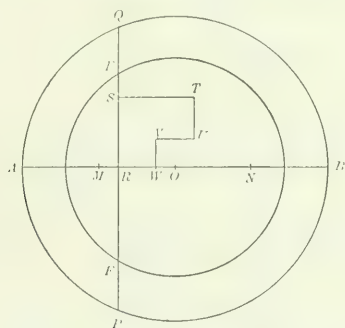
Il existe donc une infinité non dénombrable de droites parallèles à une direction arbitraire et rencontrant le cercle C tout en ne rencontrant aucun des cercles I' .

Mais il y a plus; soit AB le diamètre du cercle C parallèle à la direction sur laquelle on projette, M et N les milieux des deux rayons OA , OB ; la longueur MN étant égale à ε , il existe une perpendiculaire à AB , satisfaisant aux conditions requises, en rencontrant AB entre M et N ; soit PQ cette perpendiculaire, rencontrant AB en R ; l'on a visiblement

$$(15) \quad PQ < 2\varepsilon,$$

$$QR < \varepsilon.$$

Considérons un cercle C' de centre o et de rayon $\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$; il est aisé de voir que la corde EF' interceptée par ce cercle sur le segment PQ est supérieure ou égale au rayon OE (elle est égale dans le cas limite où R coïncide



avec M). Dès lors, si l'on remplace le cercle C par le cercle C' de rayon $\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$, et si l'on prend pour direction des projetantes une direction perpendiculaire à PQ , on trouvera, en procédant de même (c'est à dire en prenant une droite dont la distance au centre de C' est au plus égale à la moitié du rayon) une droite ST qui rencontrera EF' à l'intérieur de C' et l'on aura d'ailleurs l'inégalité analogue à (15)

$$ST < \frac{2\varepsilon}{\sqrt{3}}.$$

En continuant de même on construira une ligne polygonale $RSTUVW\dots$ dont les angles sont tous droits et dont les côtés sont inférieurs aux termes successifs d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{3}}$; leurs distances au point O sont aussi respectivement inférieures aux termes d'une autre progression géométrique de même raison. La ligne ainsi formée a donc une longueur finie et tend vers le point O .

Il reste à montrer que l'on peut supposer que le nombre désigné par η tend vers zéro; en effet, si l'on remplace η par un nombre plus petit, cela conduit à prendre n plus grand et par suite, à considérer comme cercle initial C , un cercle plus petit. Mais les cercles successifs C, C', \dots ont leurs rayons en progression géométrique décroissante; donc ils deviennent de plus en plus petits et tendent vers zéro; donc à mesure que l'on avance dans la construction de la ligne polygonale, le nombre η tend vers zéro et l'on a bien, en suivant cette ligne

$$\lim (z - \alpha)^m F(z) = 0.$$

C. Q. F. D.

On peut remarquer que, si l'on part d'un point P situé à une distance du point O égale à ε , la longueur de la ligne est au plus égale à

$$2\varepsilon + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{3}} + \frac{2\varepsilon}{(\sqrt{3})^2} + \frac{2\varepsilon}{(\sqrt{3})^3} + \dots = \frac{2\varepsilon\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}.$$

On remarquera aussi qu'au lieu de supposer droits les angles de la ligne polygonale, on pourrait d'arranger de manière qu'ils soient tous égaux à un angle donné d'avance; le facteur $\frac{1}{\sqrt{3}}$ serait seulement remplacé par un autre. On peut aussi les supposer inégaux sans grande difficulté; sans entrer dans tous les détails, indiquons que l'on peut s'arranger pour que les côtés de la ligne polygonale fassent des angles de plus en plus petits avec une direction issue du point O , de sorte que l'on peut dire que la ligne polygonale d'une infinité de côtés arrive au point O tangentiellement à cette direction; elle finit par être comprise toute entière à l'intérieur d'un angle aussi petit que l'on veut comprenant cette direction.

Nous avons ainsi démontré la seconde partie de notre théorème; la

première est une conséquence immédiate de notre démonstration. Cette première partie consiste en ce que si, sur un chemin quelconque, le produit

$$(z - \alpha)^m F(z)$$

a une limite, cette limite ne saurait différer de zéro. Or étant donné un chemin quelconque tendant vers le point α il existe évidemment au moins une direction (il y en a une infinité) telle que toutes les droites parallèles à cette direction rencontrent le chemin, en des points qui se rapprochent indéfiniment du point α en même temps que ces droites. Or, nous avons vu, qu'étant donné un nombre arbitrairement petit η , on pouvait trouver des droites parallèles à la direction donnée et telles que sur ces droites, ou du moins dans la partie voisine du point O , le produit $(z - \alpha)^m F(z)$ soit inférieur à η ; ces droites sont d'ailleurs aussi voisines que l'on veut du point O . Il suffit de considérer les points d'intersection de ces droites avec le chemin donné pour avoir le résultat énoncé.

15. La proposition que nous venons d'établir permet de faire une distinction très nette entre les séries de fractions rationnelles que l'on peut décomposer en éléments simples sans que les numérateurs cessent de satisfaire aux inégalités fondamentales et celles pour lesquelles une telle décomposition n'est pas possible.

Pour plus de netteté, bornons nous au cas où tous les dénominateurs $R_n(z)$ ont des zéros *simples*; dans ce cas, en décomposant en éléments simples chaque terme de la série, on met $F(z)$ sous la forme

$$F(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{A_n}{z - a_n} + \frac{B_n}{z - b_n} + \dots + \frac{J_n}{z - l_n} \right);$$

le même dénominateur $z - a_n$ peut figurer dans plusieurs termes de la série et même dans une infinité. Si l'on se trouve dans ce dernier cas, il peut arriver que la série $\sum A_n$ des numérateurs qui correspondent à un même dénominateur $z - a_n$, soit *divergente*: le pôle $z = a_n$ de $F(z)$ n'a pas alors de résidu déterminé. Si la série $\sum A_n$ est convergente, ce qui se présente nécessairement lorsqu'elle se compose d'un nombre limité de termes, c'est à dire lorsque le facteur $z - a_n$ figure dans un nombre limité de $R_n(z)$, on peut en désignant sa somme par \mathfrak{A}_n , dire que \mathfrak{A}_n est le résidu de $F(z)$

correspondant à $z = a_n$. Mais si la même circonstance se présente pour tous les pôles il n'en résulte pas que l'on puisse écrire

$$F(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n}$$

car cette série pourrait fort bien ne pas être convergente; nous en verrons des exemples. Enfin si cette série est convergente (ce qui exige la convergence de la série $\sum |A_n|$) il peut arriver que les A_n ne vérifient pas les conditions nécessaires pour qu'il existe des courbes de convergence.

16. Ainsi nous avons quatre cas possibles:

- 1° Les résidus, ou du moins certains d'entre eux, n'existent pas;
- 2° Les résidus existent, mais ne forment pas une série convergente;
- 3° Les résidus forment une série convergente, mais ne vérifient pas d'inégalités supplémentaires;
- 4° Les résidus vérifient des inégalités supplémentaires.

Il résulte de ce qui précède que ce dernier cas est de beaucoup le plus aisé à étudier; les pôles des divers termes peuvent alors être légitimement appelés pôles de la série, même dans le cas où les inégalités supplémentaires sont de la forme la plus simple, c'est à dire entraînent seulement l'existence de courbes de convergence pour la série et non pour ses dérivées, c'est à dire dans le cas où l'on suppose simplement la convergence de la série

$$\sum \sqrt{|A_n|}.$$

La proposition démontrée plus haut prend alors une forme extrêmement simple; je ne l'énoncerai pas: on la trouvera dans ma note des *Comptes Rendus* du 17 avril 1900.

Dans le troisième cas, on ne peut pas obtenir des résultats aussi complets, mais, cependant, il semble encore légitime de penser que les pôles ont encore une existence individuelle, en tant que pôles simples.¹ Des

¹ Par exemple, on voit aisément que l'intégrale le long d'une courbe de convergence fermée est égale au produit par $2\pi i$ de la somme des résidus relatifs aux pôles situés à l'intérieur. Si l'on considère un pôle déterminé, la convergence de la série des résidus a pour conséquence la possibilité de trouver une courbe entourant ce pôle et telle que l'intégrale diffère aussi peu que l'on veut du produit par $2\pi i$ du résidu correspondant.

résultats intéressants ont été obtenus, dans ce troisième cas, par MM. POINCARÉ, GOURSAT, LERCH, PRINGSHEIM en faisant des hypothèses sur la distribution des pôles a_n .

Enfin, dans le premier et le second cas, la question est beaucoup plus compliquée; je n'ai même pu trouver de différence intrinsèque simple entre ces deux cas, par la seule considération des valeurs de la série sur les courbes de convergence.

17. Pour montrer la nature des difficultés qui se présentent, un exemple ne sera pas inutile. Considérons la série

$$F(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{p=-n}^{p=+n} \sum_{q=-n}^{q=+n} \frac{e^{-n}}{\left(z - \frac{p+qi}{n}\right) \left(z + e^{-n^2} - \frac{p+qi}{n}\right)}.$$

Il est clair que cette série satisfait aux conditions nécessaires à l'existence de courbes de convergence pour la série et toutes ses dérivées; car si l'on range ses termes en une série simple, en ayant soin que n ne décroisse jamais en passant d'un terme au suivant, on voit que e^{-n} sera le numérateur des termes dont le rang sera compris entre

$$3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + (2n-1)^2 + 1$$

et

$$3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + (2n+1)^2,$$

c'est à dire de termes dont le rang est du même ordre de grandeur que n^2 ; le numérateur A_n du terme de rang n est donc égal à $e^{-k\sqrt{n}}$, k étant compris entre des limites finies; il suffit dès lors de se reporter à la page 321 pour constater que la série que nous considérons rentre bien dans la catégorie de celles qui y sont étudiées.

Mais il est impossible d'effectuer la décomposition en éléments simples et de grouper les termes correspondants; soit $\frac{p+qi}{n}$ une fraction irréductible, c'est à dire telle que l'un au moins des entiers p et q soit premier avec n ; le facteur $z - \frac{p+qi}{n}$ se retrouve avec tous les multiples de n , sous les formes successives

$$z - \frac{2p+2qi}{2n}, \quad z - \frac{3p+3qi}{3n}, \quad \dots$$

On a d'ailleurs

$$\frac{e^{-n}}{\left(z - \frac{p+qi}{n}\right)\left(z + e^{-n^2} - \frac{p+qi}{n}\right)} = \frac{e^{n^2-n}}{z - \frac{p+qi}{n}} - \frac{e^{n^2-n}}{z + e^{-n^2} - \frac{p+qi}{n}}.$$

Les divers numérateurs qui correspondent au dénominateur $z - \frac{p+qi}{n}$ sont donc

$$e^{n^2-n}, e^{4n^2-2n}, e^{9n^2-3n}, e^{16n^2-4n}, \dots;$$

on voit qu'il forment une série divergente. La série étudiée rentre dans la première catégorie. On aurait une série de la seconde catégorie en supposant que l'on supprime dans $F(z)$ tous les termes dans lesquels $p+qi$ n'est pas premier avec n , c'est à dire tels que les trois nombres p, q, n aient un diviseur commun. Alors chaque pôle ne figurant que dans un terme de la série a un résidu déterminé; mais la série de ces résidus, tous de la forme e^{n^2-n} , est manifestement divergente.

On pourrait donner beaucoup d'exemples analogues; signalons seulement en passant les deux séries que l'on obtient en supprimant dans la série $F(z)$, soit tous les termes pour lesquels q n'est pas nul, soit tous les termes pour lesquels p n'est pas nul.

Si l'on convient d'appeler pôles de $F(z)$ les pôles de ses divers termes, on voit que ces pôles sont intimement liés deux à deux de sorte que, bien qu'ils soient tous simples dans les termes de $F(z)$, cette fonction se comporte en partie comme si elle possédait des pôles doubles. Il y a là un fait curieux, signalé, je crois, pour la première fois et qu'il pourrait être intéressant d'étudier avec plus de détails, bien que de telles séries ne se présentent guère naturellement dans les applications. Mais la complication même de leur étude met en évidence, par contraste, les avantages qu'il y a à considérer les séries décomposables en éléments simples.

18. Nous allons terminer cette première partie en disant quelque mots de la convergence des séries considérées en des points non singuliers et du domaine d'existence des fonctions analytiques qu'elles définissent.

Considérons l'ensemble E des zéros des $R_n(z)$ et formons son dérivé E' ; en tout point du plan qui n'appartient ni à E , ni à E' , la série

$$F(z) = \sum \frac{P_n(z)}{R_n(z)}$$

converge manifestement en vertu des inégalités fondamentales de la page 314. On peut même tracer un cercle ayant son centre au point considéré et de rayon assez petit pour que la série $F(z)$ converge *uniformément* à l'intérieur de ce cercle; la fonction $F(z)$ est donc régulière au point considéré.

Si l'on considère un point appartenant à E , mais non à E' , on démontre aisément que c'est un pôle pour $F(z)$; on obtient la valeur principale de $F(z)$ en ce point en faisant la somme des valeurs principales des divers termes, somme d'ailleurs ici toujours convergente.

Enfin, à priori, il semble que les points de E' doivent être en dehors du domaine d'existence de la fonction $F(z)$ (ou des diverses fonctions analytiques que définit la série, au sens de WEIERSTRASS, dans le cas où le domaine formé des points qui n'appartiennent pas à E' se compose de plusieurs parties séparées). Mais c'est là un point qui paraît difficile à démontrer rigoureusement sans nouvelles hypothèses.

Dans les mémoires dont nous avons déjà parlé, MM. POINCARÉ¹ et GOURSAT² ont montré que si, une ligne L est telle que l'ensemble E est dense sur tout segment de L et si, de plus, d'un côté au moins de L , il n'y a pas de point de E' dans le voisinage de L , cette ligne L est certainement une coupure, sous la seule condition de la convergence des modules des numérateurs de la série décomposée en éléments simples. Mais c'est là évidemment, au point de vue de la distribution des pôles, un cas très particulier.

Un autre cas où il est évident que la ligne L est une coupure est le suivant: soient S et S_1 les régions du plan séparées par L ; si les pôles situés dans S sont isolés et ont cependant pour points limites tous les points de L , il est clair que la fonction analytique définie par la série dans S admet la ligne L comme coupure; il suffit pour en être assuré, de supposer convergente la série des modules des coefficients des numérateurs $P_n(z)$, même avant la décomposition en éléments simples. Cette condition est en effet suffisante pour qu'un pôle isolé soit certainement un point singulier de la fonction.

¹ Acta Societatis fennicae, t. 12.

² Bulletin des sciences mathématiques, 1887.

19. Mais une question autrement délicate est la suivante: dans les hypothèses qui précèdent, si la série n'a pas de pôles dans S_1 , la ligne L est-elle une coupure pour la fonction analytique définie par la série dans S_1 ? Il est évident qu'il doit en être ainsi *en général*, c'est à dire qu'il faut qu'il y ait des relations particulières entre les coefficients pour que les singularités apparentes puissent ainsi se détruire; d'ailleurs, dans le cas où la fonction analytique ainsi définie dans S_1 pourrait être prolongée au delà de L , elle ne pourrait y coïncider avec la fonction analytique définie par la série dans S . Aussi l'importance théorique d'un exemple où le prolongement serait possible serait très considérable; il serait, d'autre part, très important de démontrer dans des conditions très larges l'impossibilité de ce prolongement. La méthode que nous développons dans la seconde partie permet d'arriver à ce dernier résultat, au moyen d'hypothèses portant seulement sur la rapidité de la convergence de la série des numérateurs, sans rien supposer sur la distribution des pôles.

SECONDE PARTIE.

Les séries de polynômes et le prolongement analytique.

20. Je me propose d'étudier, dans cette seconde partie, certaines séries remarquables de polynômes dont l'importance, au point de vue de la théorie du prolongement analytique, a été mise en évidence pour la première fois par M. MITTAG-LEFFLER.¹ Il existe d'ailleurs, comme je l'ai montré dans mon *Addition au mémoire sur les séries divergentes*² une infinité de classes de séries ayant les mêmes propriétés générales que les séries de M. MITTAG-LEFFLER;³ je montrerai d'abord que la connaissance

Voir notamment, Acta mathematica, t. 23, où l'on trouvera l'indication des travaux antérieurement publiés en langue suédoise.

¹ Annales de l'Ecole normale, 1899.

Voir aussi LEAU, *Sur les développements en séries de polynômes*. Bulletin de la société mathématique de France, 1899.

de ces propriétés générales suffit pour le but que je désire atteindre, à savoir l'application des séries de polynomes à l'étude des séries de fractions rationnelles étudiées dans la première partie; je montrerai ensuite comment, dans le cas particulier où l'on emploie les séries de M. MITTAG-LEFFLER, on peut effectivement calculer complètement les seconds membres de certaines inégalités qui restaient indéterminés dans la théorie générale.

Je définirai d'abord une notion qui me paraît devoir être importante: celle des *classes* de séries de polynomes.

21. Etant données deux séries de polynomes, je dirai qu'elles *sont semblables*, ou qu'elles *appartiennent à une même classe*, si les coefficients d'une même puissance quelconque de z , dans les termes successifs des deux séries, sont proportionnels. En d'autres termes soient

$$F(z) = \sum P_n(z),$$

$$G(z) = \sum Q_n(z),$$

les deux séries; on pose

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{k=k_n} a_{n,k} z^k,$$

$$Q_n(z) = \sum_{k=1}^{k=k_n} b_{n,k} z^k;$$

les séries sont *semblables* si, pour chaque valeur de k , on a les égalités:

$$\frac{a_{1,k}}{b_{1,k}} = \frac{a_{2,k}}{b_{2,k}} = \frac{a_{3,k}}{b_{3,k}} = \dots$$

ou, si l'on veut, s'il existe une infinité de nombres c_k tels que l'on ait, pour toute valeur de n et de k

$$b_{n,k} = c_k a_{n,k}.$$

Les nombres c_k seront dits les coefficients de similitude de G par rapport à F . Parmi les nombres c_k certains, en nombre fini ou infini, peuvent être nuls; si aucun d'eux n'est nul, la classe des séries semblables à $G(z)$ est la même que la classe des séries semblables à $F(z)$; l'une quelconque de ces séries suffit pour définir complètement cette classe. Si, au contraire, certains des c_k sont nuls, la classe définie par $G(z)$ est comprise comme

cas particulier dans la classe (\mathcal{C}) définie par $F(z)$; on peut dire que $F(z)$ est un représentant complet de la classe (\mathcal{C}), tandis que $G(z)$ en est un représentant partiel.

Par exemple les séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de z constituent une classe. Toute série de cette nature, dont aucun coefficient n'est nul, est un représentant complet de la classe; si certains coefficients sont nuls, ou n'a plus qu'un représentant incomplet, qui définit une classe plus restreinte.

Je ne puis développer complètement ici la théorie des classes de séries de polynomes; j'espère pouvoir en faire l'objet d'un autre mémoire;¹ je m'attacherai ici à une catégorie importante de classes de séries: les classes à région de convergence étoilée, dont le premier exemple est dû à M. MITTAG-LEFFLER.

22. Voici comment sont définies ces classes; on sait, d'une infinité de manières,² développer la fonction $\frac{1}{1-z}$ en une série de polynomes, convergeant pour toute valeur de z , sauf pour les valeurs réelles et supérieures à m ; la convergence étant d'ailleurs absolue et uniforme dans toute région de convergence. Soit

$$\frac{1}{1-z} = F(z) = \sum P_n(z)$$

l'un de ces développements; la classe formée de tous les développements semblables est une classe à région de convergence étoilée.

Nous allons étudier les propriétés d'une telle classe, sans expliciter davantage le développement $F(z)$; nous supposons seulement que ce développement est déterminé, c'est à dire choisi une fois pour toutes parmi l'infinité de développements analogues qui sont possibles. Nous appliquerons plus loin les résultats généraux obtenus au cas particulier de la classe (\mathcal{M}) formée des développements qui sont dus à M. MITTAG-LEFFLER.

¹ Cf. *Mémoire sur les séries divergentes* (Annales de l'Ecole normale, 1899, p. 63) et *Comptes Rendus* 23 mai 1899.

Voir RUXGE, *Acta mathematica*, t. 4; PAINLEVÉ, *Comptes Rendus*, 1898.

23. Considérons donc une classe déterminée (C) à région de convergence étoilée et soient

$$1 - z = F(z) = \sum P_n z^n,$$

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{k=l_n} a_{n,k} z^k$$

les relations qui la définissent.

Soit, d'autre part,

$$f(z) = \sum c_k z^k$$

une série de TAYLOR dont le rayon de convergence n'est ni nul ni infini; sur une demi-droite quelconque OA issue de l'origine cette série définit, par prolongement analytique, une fonction bien déterminée sur tout segment OA ne renfermant aucun point singulier. Si M est le point singulier le plus voisin du point O sur la demi-droite (M peut être l'infini) nous choisirons arbitrairement un point P entre O et M et faisant tourner la demi-droite OA autour du point O , nous supposons que le point P se déplace d'une manière continue¹ (en satisfaisant toujours à la même condition); il décrit ainsi une courbe C ayant la double propriété de ne pas renfermer à son intérieur de point singulier de $f(z)$ et d'être coupée une seule fois par toute demi-droite issue de O . De la courbe C nous définirons une courbe C' par la loi suivante (qui pourrait être modifiée, mais que nous choisissons pour fixer les idées): sur chaque demi-droite OA issue de l'origine, considérons le point P situé sur C et le point singulier M le plus voisin; les longueurs MP ont une limite inférieure h , puisque l'ensemble des points M est parfait ainsi que l'ensemble des points P ; nous définirons C' en prenant

$$OP' = OP + \frac{h}{2};$$

la courbe C' lieu des point P' satisfait aux mêmes conditions que la courbe C .

Ceci posé, formons la série semblable à $F(z)$, les coefficients de similitude étant les coefficients c_k de $f(z)$, c'est à dire posons

¹ On peut toujours supposer que le lieu du point P n'est jamais tangent à OP .

$$b_{n,k} = c_k a_{n,k},$$

$$Q_n(z) = \sum b_{n,k} z^k,$$

$$G(z) = \sum Q_n(z).$$

Je dis que la série $G(z)$ converge absolument et uniformément à l'intérieur de C et γ représente la branche de fonction analytique définie par $f(z)$.

On a, en effet, d'après le théorème de CAUCHY

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C'} \frac{f(u) du}{u - z},$$

C' étant le contour que nous avons défini et z un point quelconque de C .

Or, ce point u étant sur C' et le point z intérieur à C , le point $\frac{z}{u}$ est intérieur à un certain contour I' ne passant par aucun point correspondant à une valeur réelle supérieure ou égale à un; on a donc

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{u}} = \sum P_n \left(\frac{z}{u} \right),$$

la série étant absolument et uniformément convergente quel que soit $\frac{z}{u}$ à l'intérieur de I' , c'est à dire quel que soit z à l'intérieur de C et u sur C' .

Donc, étant donné à l'avance un nombre ε on peut choisir m assez grand pour que l'on ait

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{u}} = \sum_{n=1}^{n=m} P_n \left(\frac{z}{u} \right) + \rho_m,$$

$|\rho_m|$ étant inférieur à ε , quelque soit z à l'intérieur de C et u sur C' . On a donc

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C'} \sum_{n=1}^{n=m} P_n \left(\frac{z}{u} \right) \frac{f(u) du}{u} + \frac{1}{2i\pi} \int_{C'} \frac{\rho_m f(u) du}{u}.$$

Soit $2\pi L$ la longueur du contour C' et M le maximum de $\frac{f(u)}{u}$ sur ce contour; on a évidemment

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{C'} \frac{\rho_m f(u) du}{u} \right| < LM\varepsilon$$

et comme, visiblement

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C'} P_n \left(\frac{z}{u} \right) \frac{f(u)}{u} du = Q_n(z),$$

il vient

$$f(z) = \sum_{n=1}^{n=m} Q_n(z) + \theta_m,$$

$|\theta_m|$ étant inférieur à $LM\varepsilon$. Comme L et M sont donnés en même temps que le contour C' , cette égalité exprime bien que la série $G(z) = \sum Q_n(z)$ converge *uniformément* vers $f(z)$ à l'intérieur de C .

Relativement à la convergence absolue, il suffit d'observer que la série

$$\sum \left| P_n \left(\frac{z}{u} \right) \right|$$

converge uniformément quel que soit u sur C' et z à l'intérieur de C , et que l'on a:

$$\begin{aligned} |Q_n(z)| &< \frac{1}{2\pi} \int_{C'} \left| P_n \left(\frac{z}{u} \right) \right| \left| \frac{f(u)}{u} \right| |du| \\ &< ML \left| P_n \left(\frac{z}{u} \right) \right|. \end{aligned}$$

Notre proposition est donc complètement démontrée.

24. Elle s'applique en particulier aux dérivées successives de $\frac{1}{1-z}$; considérons, par exemple, la fonction

$$\frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \dots + nz^n + \dots$$

les coefficients de similitude sont ici:

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1, \quad \dots, \quad c_n = n, \quad \dots$$

Le polynôme $Q_n(z)$ se déduit donc du polynôme $P_n(z)$ en multipliant par k le coefficient de z^k ; il en résulte

$$Q_n(z) = zP'_n(z),$$

c'est à dire

$$\frac{z}{1 - z} = \sum z P'_n(z),$$

$$\frac{1}{1 - z} = \sum P'_n(z)$$

la série qui donne $\frac{1}{1 - z}$ peut donc être dérivée terme à terme: c'est là une conséquence des hypothèses faites sur sa convergence absolue et uniforme dans tout domaine fini qui ne comprend pas sur son contour de valeur réelle supérieure à un. On démontrerait d'ailleurs absolument de même qu'elle peut être dérivée terme à terme indéfiniment, c'est à dire que l'on a, quel que soit p

$$\frac{1}{1 - z} = \sum P_n^{(p)}(z),$$

la série du second membre convergeant absolument et uniformément dans les mêmes conditions que $P(z)$. Il est clair que les mêmes conséquences s'étendent à une fonction quelconque $f(z)$; ses dérivées successives sont représentées par les dérivées de la série de polynômes qui représente $f(z)$.

Il faut remarquer que les séries dérivées ne sont pas semblables aux séries considérées; pour obtenir une série semblable à une série de polynômes donnée, il faut multiplier par z après la dérivation. Comme on divise par z , on pourrait craindre que la convergence cessât d'être uniforme dans le voisinage de $z = 0$, ou même qu'il y eût divergence en ce point; mais on sait qu'une série de fonctions analytiques régulières à l'intérieur d'un contour ne saurait converger uniformément sur le contour sans converger uniformément à l'intérieur.¹ Les séries dérivées des séries d'une

¹ Le fait que la série $F(z)$ converge, ainsi que toutes ses dérivées, pour $z = 0$ entraîne la convergence des séries

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} a_{n,k},$$

pour toute valeur de k ; la somme de chacune de ces séries est d'ailleurs égale à l'unité.

classe à région de convergence étoilée forment donc elles-mêmes une classe analogue, que l'on peut appeler la classe dérivée de la classe donnée.

La relation entre une classe et la classe dérivée est d'ailleurs très simple; elle est une conséquence de l'identité

$$\frac{\frac{1}{1-z} - 1}{z} = \frac{1}{1-z}.$$

Si l'on a

$$\frac{1}{1-z} = \sum P_n(z)$$

avec

$$P_n(z) = a_{n,0} + a_{n,1}z + \dots + a_{n,k_n}z^{k_n},$$

il est clair que:

$$\sum a_{n,0} = 1.$$

Donc

$$\frac{1}{1-z} - 1 = \sum [P_n(z) - a_{n,0}]$$

et

$$\frac{\frac{1}{1-z} - 1}{z} = \sum \frac{P_n(z) - a_{n,0}}{z}.$$

On obtient ainsi un nouveau développement de $\frac{1}{1-z}$:

$$\frac{1}{1-z} = \sum \frac{P_n(z) - a_{n,0}}{z},$$

c'est le développement qui définit la classe dérivée de la classe donnée, comme on s'en assurera aisément. Il est clair qu'il converge dans les mêmes conditions que le développement donné.

Les remarques qui viennent d'être faites peuvent paraître d'une nature bien élémentaire; mais, dans les applications, il y a grand avantage à pouvoir employer pour les dérivées successives d'une fonction les développements dérivés du développement de la fonction, au lieu des développements semblables; et il est bon de savoir que les conditions de convergence

de ces développements sont les mêmes; en particulier, la rapidité de la convergence est analogue.¹

25. Nous allons définir maintenant une fonction attachée à une classe de séries et qui joue un rôle important dans les applications: c'est la fonction qui exprime la rapidité de la convergence de la série des modules. D'ailleurs il entre un certain arbitraire, comme on le verra, dans la définition d'une telle fonction; certaines définitions analogues à celle qui sera adoptée pourraient rendre les mêmes services: l'essentiel est de bien préciser la définition que l'on choisit.

Voici comment nous procéderons; nous désignerons par R un nombre plus grand que un et par ρ un nombre plus petit que un : nous décrirons un cercle C ayant pour centre le point $z = 0$ et pour rayon R et un cercle I' ayant pour centre le point $z = 1$ et pour rayon ρ . Cela fait, nous mènerons du point $z = 0$ les deux tangentes au cercle I' ; nous désignerons par A et B leurs points de contact et par A' et B' les points d'intersection de ces tangentes avec le cercle C (A' est choisi sur le prolongement de OA et non de AO ; de même pour B'). Cela posé, nous considérerons le contour formé par l'arc AB inférieur à π du cercle I' , les segments de droites AA' et BB' et l'arc $A'B'$ supérieur à π du cercle C . L'aire intérieure à ce contour, complètement défini lorsqu'on donne les nombres R et ρ , sera désignée par $S(R, \rho)$. Dans les applications, on prendra parfois pour simplifier $\rho = \frac{1}{R}$ et l'on posera, pour abréger

$$S\left(R, \frac{1}{R}\right) = S(R).$$

¹ En même temps que l'ensemble des développements dérivés d'un développement donné, on peut considérer l'ensemble des développements obtenus par l'intégration; seulement, il y a lieu de préciser la répartition, entre les termes successifs de la série, de la constante introduite par chaque intégration. On est ainsi conduit à la notion de *classe étendue*, comprenant toutes les dérivées et toutes les intégrées d'une classe donnée. Une classe étendue peut être définie par une infinité de séries dont la somme est égale à l'unité

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

En ne conservant que les $a_{n,k}$ correspondant à des valeurs non négatives de k , on a la classe considérée dans le texte; ses dérivées et ses intégrées s'obtiennent respectivement en remplaçant k par $k \mp h$, h étant un entier quelconque.

Cela posé, considérons le développement qui définit la classe de séries que nous étudions (c'est une classe *déterminée* quelconque à région de convergence étoilée); soit

$$F(z) = \frac{1}{1-z} = \sum P_n(z)$$

ce développement, qui, nous le savons, converge absolument et uniformément dans l'aire $S(R, \rho)$; la série

$$\sum |P_n(z)|$$

définit donc une fonction continue (non monogène) dans cette aire; cette fonction possède un maximum que nous désignerons par $M(R, \rho)$; c'est cette fonction $M(R, \rho)$ qui jouera un rôle capital dans ce qui va suivre. Cette fonction sera dite la fonction majorante correspondant à $F(z)$. Nous nous appuierons d'ailleurs seulement sur le fait *qu'elle existe*; c'est à dire qu'elle a une valeur finie pour toute valeur de R et de ρ

$$[0 < \rho < 1 < R < +\infty];$$

nous n'aurons même pas à nous servir du fait qu'elle est continue. Pour les applications relatives à une classe particulière de séries, il pourra être utile de la déterminer effectivement, ou tout au moins d'en déterminer une limite supérieure; c'est ce que nous ferons à la fin de cette seconde partie, pour les séries de M. MITTAG-LEFFLER.

Il suffira parfois de considérer le cas particulier où $\rho = \frac{1}{R}$ et l'on posera, pour abréger

$$M\left(R, \frac{1}{R}\right) = M(R);$$

on n'a alors qu'une fonction d'une seule variable, ce qui est souvent plus commode.

Nous observerons tout d'abord que la connaissance de la fonction $M(R)$ permet de déterminer une limite supérieure de la fonction analogue relative à un développement quelconque semblable à $F(z)$. Si, en effet, l'on considère une fonction analytique quelconque et une région C définie comme plus haut, (p. 335) on définira la région C' comme on l'a fait dans la démonstration du théorème fondamental; on pourra alors déterminer R

par la condition que, si z est dans C et u sur C' , $\frac{z}{u}$ est certainement intérieur à la région $S(R)$; si l'on désigne alors par μ le maximum du module de $\frac{f(u)}{u}$ sur C' et par L la longueur de ce contour, l'on aura, z étant un point quelconque intérieur à C' ,

$$\sum |Q_n(z)| < \frac{1}{2\pi} \int_{C'} \left| \frac{f(u)}{u} \right| \left| \sum \left| P_n \left(\frac{z}{u} \right) \right| \right| du$$

c'est à dire

$$\sum |Q_n(z)| < \mu L M(R),$$

le nombre R étant défini comme il a été dit. Ainsi l'on peut trouver une limite supérieure de la somme des modules des termes de la série dans toute région C à l'intérieur de laquelle elle converge absolument et uniformément.

En particulier, on peut appliquer ceci aux dérivées successives de $\frac{1}{1-z}$; en prenant pour contour C précisément le contour $S(R)$, on désignera par $M_k(R)$ la fonction définie avec la dérivée d'ordre k de la même manière que $M(R)$ avec la fonction.¹ Il résulte de ce qui précède que, la fonction $M(R)$ étant connue, on trouvera sans peine des limites supérieures pour les diverses fonctions $M_k(R)$. D'ailleurs dans certains cas il pourra être plus commode de calculer directement ces fonctions $M_k(R)$. On aurait pu raisonner de même sur $M(R, \rho)$ et définir les fonctions $M_k(R, \rho)$.

Nous allons donc supposer connues ces diverses fonctions et nous en tirerons d'importantes conséquences relativement aux séries de fractions rationnelles qui ont été étudiées dans la première partie.

26. Pour plus de netteté, nous étudierons d'abord un cas particulier sur lequel on verra bien le mécanisme de la méthode.

¹ Il résulte des remarques faites plus haut qu'un calcul auxiliaire sans difficulté permet de passer du cas où l'on prend pour les dérivées un développement semblable à celui de la fonction, au cas où l'on prend le développement dérivé. Dans les applications on sera amené à prendre les mêmes fonctions $M_k(R)$ dans les deux cas, c'est à dire à négliger cette différence, qu'il était cependant bon de signaler.

Considérons une infinité de points a_n compris dans une couronne circulaire mais, à part cela, complètement arbitraires; c'est à dire que les a_n sont assujettis seulement à vérifier les inégalités

$$\alpha < |a_n| < \beta.$$

Nous considérerons la série: ¹

$$(1) \quad f(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n};$$

la fonction $f(z)$ peut être développée suivant les puissances croissantes de z

$$(2) \quad f(z) = \sum c_k z^k$$

et aux nombres c_k correspond une certaine série de polynomes de la classe que nous étudions

$$(3) \quad f(z) = \sum Q_n(z).$$

Nous nous proposons de démontrer que, moyennant certaines inégalités imposées aux A_n , et sans autre hypothèse, cette série (3) converge absolument et uniformément sur une infinité de diamètres du cercle de rayon β et α , sur ces diamètres, la même somme que la série (1). Relativement à l'infinité de ces diamètres, on peut dire qu'il y en a une infinité non dénombrable dans tout angle aussi petit que l'on veut ayant son sommet à l'origine.

27. Pour déterminer les inégalités auxquelles doivent satisfaire les A_n nous désignerons par

$$\sum u_n$$

une série convergente arbitraire à termes positifs; on pourrait supposer, par exemple, pour fixer les idées,

$$u_n = \frac{1}{n^2},$$

¹ Il est bon de faire observer dès maintenant que si l'on avait une série analogue, mais où les a_n soient assujettis à la seule relation $\alpha < |a_n|$, on pourrait obtenir les mêmes conséquences à l'intérieur du cercle de rayon β , puisque la série donnée et celle du texte ne différeraient que par une fonction holomorphe à l'intérieur de ce cercle.

mais il est inutile, pour l'instant, de faire aucune hypothèse particulière sur la valeur des u_n .

Décrivons un cercle C_n ayant pour centre le point a_n et pour rayon αu_n ; les rayons de convergence seront ceux qui ne passent par aucun point a_n et qui ne rencontrent qu'un nombre limité de ces cercles. Il est clair qu'il existe une infinité non dénombrable de tels rayons, dans tout angle θ ayant pour sommet l'origine.¹ En effet, l'angle sous lequel le cercle C_n est vu de l'origine est égal à

$$2 \arcsin \frac{\alpha u_n}{|a_n|} < 2 \arcsin u_n$$

puisque $\alpha < |a_n|$. La série

$$\sum 2 \arcsin u_n$$

est évidemment convergente de même que la série $\sum u_n$; on peut donc choisir p assez grand pour que l'on ait

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} 2 \arcsin u_n < \theta;$$

dès lors il y a dans l'angle θ une infinité non dénombrable de demi-droites qui ne rencontrent aucun des cercles C_n ($n \geq p+1$); si l'on exclut, parmi ces droites celles qui pourraient coïncider avec Oa_1, Oa_2, \dots, Oa_p , il en restera encore une infinité non dénombrable, ce que nous avons annoncé.

Il s'agit maintenant de choisir les A_n de manière que tous ces rayons soient des rayons de convergence.

Or, si l'on mène de l'origine les tangentes au cercle C_n et si on les prolonge jusqu'au cercle de rayon β , on formera une région S_n tout à fait analogue à celle que nous appelions plus haut $S(R, \rho)$, avec cette différence que le point a_n y remplace le point 1; le rayon R est égal à β et le rayon ρ à αu_n ; lorsque le point z est intérieur à cette région S_n le point $\frac{z}{a_n}$ est manifestement intérieur à la région

$$S\left(\frac{\beta}{|a_n|}, \frac{\alpha u_n}{|a_n|}\right)$$

¹ On démontrerait de la même manière l'existence de *diamètres* de convergence; mais il est préférable, pour la suite, de considérer les *rayons*.

c'est à dire, puisque $\alpha < |a_n| < \beta$, à la région

$$S\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{au_n}{\beta}\right),$$

puisqu'on agrandit la région S en augmentant R et en diminuant ρ .

Or, on a,

$$\frac{A_m}{z - a_m} = -\frac{A_m}{a_m} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{a_m}} = -\frac{A_m}{a_m} \sum P_n\left(\frac{z}{a_m}\right).$$

Par définition même de la fonction $M(R, \rho)$, l'on a, $\frac{z}{a_m}$ étant intérieur à la région $S\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{au_n}{\beta}\right)$

$$\sum \left| P_n\left(\frac{z}{a_m}\right) \right| < M\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{au_m}{\beta}\right).$$

Choisissons les A_m de telle manière que la série

$$\sum \left| \frac{A_m}{a_m} \right| M\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{au_m}{\beta}\right)$$

soit convergente; il suffit pour cela de supposer:

$$|A_m| < \frac{u_m}{M\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{au_m}{\beta}\right)}.$$

Alors la série double

$$\sum_m \sum_n \frac{A_m}{a_m} P_n\left(\frac{z}{a_m}\right)$$

sera absolument et uniformément convergente pour toutes les valeurs de z situées à l'intérieur des régions S_n définies plus haut. Si l'on considère l'un des rayons de convergence, choisi comme nous l'avons dit, c'est à dire ne rencontrant qu'un nombre limité de cercles C_n , la série double pourra s'écrire:

$$\sum_{m=1}^{m=p} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_m}{a_m} P_n\left(\frac{z}{a_m}\right) \right] + \sum_{m=p+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_m}{a_m} P_n\left(\frac{z}{a_m}\right).$$

La première partie est la somme d'un nombre limité de séries absolument et uniformément convergentes sur le rayon considéré; la seconde partie est

une série double qui, elle aussi, converge absolument et uniformément sur ce rayon; l'ensemble forme donc une série double *absolument convergente*, c'est à dire dans laquelle on peut intervertir l'ordre des sommations sans que la convergence cesse d'être uniforme; la somme de cette série est d'ailleurs égale à $f(z)$.¹ Or, en intervertissant l'ordre des sommations on peut poser

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{A_m}{a_m} P_n\left(\frac{z}{a_m}\right) = Q_n(z).$$

Il est clair que la série $\sum Q_n(z)$ est semblable à la série $\sum P_n(z)$, les coefficients de similitude étant précisément les coefficients c_k du développement $\sum c_k z^k$.

28. On a donc démontré le théorème suivant.

Théorème I. *Soit*

$$\frac{1}{1-z} = F(z) = \sum P_n(z)$$

une série définissant une classe à région de convergence étoilée et soit $M(R, \rho)$ la fonction majorante correspondante (définie p. 341). Désignons par a_n des nombres quelconques satisfaisant aux inégalités

$$\alpha < |a_n| < \beta$$

¹ Etant donné un nombre arbitrairement petit ε , on peut déterminer m' de telle manière que:

$$\sum_{m=1}^{\infty} n_m < \varepsilon.$$

Le nombre m' étant ainsi choisi, et supposé de plus supérieur au nombre p tel que le rayon donné ne rencontre pas les cercles C_n ($n > p$), les m' premières séries sont uniformément et absolument convergentes sur ce rayon; en particulier, il existe un nombre n' tel que l'on ait, pour chacune de ces séries, en nombre m' :

$$\left| \frac{A_m}{z - a_m} + \sum_{n=0}^{n=n'} \frac{A_n}{a_n} P_n\left(\frac{z}{a_m}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{m};$$

on a dès lors visiblement, sur tout le rayon considéré,

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{n=n'} Q_n(z) \right| < 2\varepsilon.$$

et par A_n des nombres assujettis aux inégalités

$$(4) \quad M\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha u_n}{\beta}\right) |A_n| < u_n,$$

la série $\sum u_n$ étant une série convergente à termes positifs. Si l'on pose

$$(1) \quad f(z) = \sum \frac{A_n}{z - \frac{1}{\alpha_n}},$$

la fonction $f(z)$ peut être développée en une série de la forme

$$(2) \quad f(z) = \sum c_k z^k;$$

soit dès lors

$$(3) \quad f(z) = \sum Q_n(z)$$

le développement semblable au développement $F(z)$, les coefficients de similitude étant les nombres c_k . Il existe dans tout angle ayant son sommet à l'origine une infinité de rayons du cercle de rayon β tels que sur chacun d'eux le développement (3) converge et ait même somme que la série (1).

29. On aperçoit immédiatement les importantes conséquences qu'entraîne ce théorème lorsqu'on le rapproche des résultats obtenus dans la première partie de ce mémoire. Nous avons démontré que, sous certaines conditions de convergence (qui sont une conséquence des inégalités (4)) une série telle que (1) admet des courbes de convergence uniforme, même dans les régions où les pôles forment un ensemble partout dense; nous avons vu aussi comment l'intégration définie le long de contours fermés de convergence uniforme permet de déterminer les pôles et les résidus. Mais ces divers résultats pouvaient paraître sans application possible, puisque la connaissance aussi bien des courbes de convergence uniforme que de la valeur de la fonction sur ces courbes exigeait la connaissance préalable de la série (1).

Il n'en est plus ainsi lorsqu'on tient compte du théorème précédent; il suffit de connaître le développement (2) pour déterminer la valeur de la série (1) sur toute courbe de continuité. En effet, si C est une telle courbe (comprise à l'intérieur de la couronne et ne coïncidant pas avec un rayon) la série (3), que nous savons déduire de (2) converge en une infinité de

points de C formant un ensemble dense sur tout arc de C ; car il y a des rayons de convergence dans tout angle si petit qu'il soit. Si donc la fonction est continue sur C , la connaissance de ces valeurs permet de la définir complètement.

Donc, étant donné un développement en série tel que (2), si l'on sait qu'il provient d'une série de la forme (1), sans rien connaître de plus sur cette série, il est possible, par des opérations bien déterminées, de connaître la valeur de la fonction sur des courbes de convergence comprises à l'intérieur de la région où se trouvent les points singuliers et, par l'intégration définie le long de ces courbes, ¹ de déterminer les pôles et les résidus correspondants, c'est à dire de reconstituer la série (1) en partant du développement (2).

30. L'étude de la série obtenue en intégrant terme à terme la série (3) est aussi fort intéressante; on obtient

$$(5) \quad \sum A_n \log \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) = \sum_0 \int Q_n(z)$$

¹ On remarquera que nous parlons d'opérations bien déterminées, et non d'opérations en nombre limité. Dans la théorie des fonctions analytiques d'après WEIERSTRASS, il est aussi complètement impossible (*théoriquement*) de résoudre n'importe quelle question par un nombre limité d'opérations (on n'y arrive *pratiquement*, dans des cas exceptionnels que grâce à des circonstances particulières heureuses); on se heurte en effet, à chaque instant, à la question de savoir si une série calculée numériquement est ou n'est pas convergente et il est clair qu'aucun calcul fini ne saurait résoudre cette question.

Dans les applications numériques, on regarde comme convergentes les séries dont les termes décroissent rapidement, on admet même que des règles empiriques donnent une limite supérieure de l'erreur commise. Cette manière de procéder donne d'ailleurs, en fait, des résultats généralement satisfaisants; on pourrait même dire *toujours* satisfaisants, si l'on tient compte des propriétés aujourd'hui bien connues des séries asymptotiques: elles se trouvent, en fait, être pratiquement utilisables tant qu'elles *paraissent* convergentes.

Si l'on admet cette manière de procéder, on pourra dire que le calcul, avec une approximation donnée à l'avance, de la somme d'une série convergente, n'exige qu'un nombre limité d'opérations et dès lors le résultat que nous avons obtenu prendra la forme suivante: étant donné un point a du plan, le résidu correspondant sera A_n si $a = a_n$ et sera zéro si a ne coïncide avec aucun des points a_n ; la connaissance du développement (2) permet de calculer ce résidu, par un nombre limité d'opérations, avec une approximation donnée à l'avance ε . D'ailleurs ce résidu est obtenu comme la somme d'une série convergente, de sorte que les remarques qui viennent d'être faites relativement au nombre limité d'opérations ont encore l'occasion de s'appliquer à cette série.

et cette égalité est exacte sur tous les rayons de convergence, la détermination des logarithmes étant prise égale à zéro pour $z = 0$ et fixée ensuite par continuité, en suivant le rayon.

La relation (5) conduit à des conséquences importantes lorsqu'on l'applique aux divers points d'intersection de divers rayons de convergence avec une *courbe de continuité* C . Supposons, pour plus de netteté que C soit un cercle ayant son centre à l'origine et soit E l'ensemble des points d'intersection de ce cercle avec les rayons de convergence. Cet ensemble E est dense sur tout arc de C . La série de polynômes

$$\sum_0^z Q_n(z)$$

converge en tous les points de l'ensemble E ; elle définit d'ailleurs une fonction *continue dans* E , c'est à dire telle que si A est un point de E la limite des valeurs que prend la fonction en un point B , qui tend vers A sans cesser d'appartenir à E , a pour limite la valeur de la fonction en A lorsque BA tend vers zéro. Soit α un point du cercle C n'appartenant pas à E ; lorsque le point B de E tend vers α en restant toujours du même côté de α , la valeur de la fonction tend vers une limite, mais cette limite peut dépendre du côté suivant lequel on s'approche de α . Ainsi, en tout point α de C on peut définir $f(\alpha + 0)$ et $f(\alpha - 0)$ au sens de LEJEUNE-DIRICHLET; mais ces valeurs peuvent ne pas être égales; leur différence est la mesure de la discontinuité en α . On démontrera aisément que leur différence est égale à $2\pi i \sum A_n$, la somme étant étendue à tous les résidus A_n tels que les pôles correspondants a_n soient sur le rayon $O\alpha$. On a ainsi une méthode pour la recherche des pôles et des résidus, méthode qui ne diffère pas d'ailleurs essentiellement de celle que nous avons donnée d'abord, mais qui est d'une application plus simple vu que l'on n'a à intégrer qu'une série de polynômes. De plus, nous trouvons là un premier exemple d'une espèce particulière de *fonctions non uniformes*, sur lesquelles nous reviendrons plus loin.

31. Nous allons montrer maintenant que, si les A_n vérifient des *inégalités convenables*, il existe des rayons de convergence sur lesquels la série

$$(3) \quad f(z) = \sum Q_n(z)$$

converge ainsi que toutes ses dérivées lesquelles sont égales aux dérivées de la série

$$(1) \quad f(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n}.$$

Si l'on désirait seulement obtenir la convergence des dérivées *jusqu'à un ordre déterminé* h , il suffirait de remplacer $M(R, \rho)$ par le plus grande des fonctions $M_1(R, \rho)$, $M_2(R, \rho)$, \dots , $M_h(R, \rho)$ définies page 342. Pour chaque valeur de R et de ρ , soit $\mu(R, \rho)$ la plus grande de ces quantités, il suffira de remplacer les inégalités (4) par les suivantes

$$\mu\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha u_n}{\beta}\right) |A_n| < u_n.$$

Mais ce procédé ne s'applique évidemment plus lorsque le nombre h devient infini, c'est à dire lorsque l'on veut que les dérivées *de tout ordre* de la série convergent sur une infinité de rayons dans tout angle. Pour traiter ce cas, il suffit d'appliquer un théorème de PAUL DU BOIS REYMOND dont j'ai déjà, à diverses reprises, signalé l'importance.¹

D'après ce théorème, étant données les diverses fonctions $M_h\left(\frac{\beta}{\alpha}, \rho\right)$ lesquelles augmentent indéfiniment lorsque ρ tend vers zéro, *il est possible de trouver une fonction $\mu(\rho)$ telle que l'inégalité*

$$(6) \quad M_h\left(\frac{\beta}{\alpha}, \rho\right) < \mu(\rho)$$

soit vérifiée, quelque soit h , lorsque ρ est assez petit; il est clair que la valeur ρ' à partir de laquelle l'inégalité sera vérifiée dépendra en général de h ; mais, quel que soit h fixe, il existera un nombre ρ' tel que l'inégalité (9) soit une conséquence de l'inégalité

$$\rho < \rho'.$$

Dès lors, si l'on suppose vérifiées les inégalités

$$(7) \quad \mu\left(\frac{\alpha u_n}{\beta}\right) |A_n| < u_n,$$

¹ Voir notamment mes *Leçons sur la théorie des fonctions*, note II, où l'on en trouvera une démonstration.

on pourra affirmer que les inégalités

$$(8) \quad M_n\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha u_n}{\beta}\right) |A_n| < u_n$$

sont, quel que soit le nombre h fixe, vérifiées à partir d'une certaine valeur de n et cela suffit évidemment pour que la dérivée d'ordre h converge sur les rayons de convergence déterminés comme plus haut.

32. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant

Théorème II. *Les notations et les hypothèses du théorème I étant conservées, sauf que les inégalités (4) sont remplacées par les suivantes*

$$(7) \quad \mu\left(\frac{\alpha u_n}{\beta}\right) |A_n| < u_n$$

on peut affirmer que sur les rayons de convergence, non seulement la série (3), mais encore toutes les séries obtenues en la dérivant terme à terme, convergent absolument et uniformément et sont respectivement égales aux dérivées correspondantes de la série (1).

33. Il est aisé d'étendre les résultats qui précèdent au cas de séries de fractions rationnelles non décomposées en éléments simples. Soit, pour fixer les idées

$$g(z) = \sum \frac{T_n(z)}{R_n(z)}$$

une telle série, dans laquelle les $T_n(z)$ et $R_n(z)$ sont au plus¹ de degré m . On a d'ailleurs

$$R_n(z) = (z - a_n)(z - b_n) \dots (z - l_n)$$

les nombres a_n, b_n, \dots, l_n étant en nombre au plus égal à m et ayant tous leurs modules compris entre deux nombres fixes α et β . Il résulte de ce qui précède que si l'on trace des cercles de même rayon ρ ayant pour centres les divers points a_n, b_n, \dots, l_n et si, menant de l'origine les

¹ Le cas où les degrés augmentent indéfiniment peut, par l'introduction de termes nuls, on par la réunion d'un nombre limité de termes, se ramener à celui où $R_n(z)$ est de degré n ; on peut d'ailleurs le traiter directement par des méthodes analogues, mais les inégalités auxquelles doit alors satisfaire T_n sont plus compliquées.

tangentes à ces cercles, on prolonge ces dernières jusqu'au cercle de rayon β de manière à former une région analogue à la région $S(R, \rho)$, il est possible de trouver au moyen de la fonction $M(R, \rho)$ un maximum de la somme des modules des termes du développement en série de polynomes de la fonction

$$\frac{1}{R_n(z)} = \frac{1}{(z - a_n)(z - b_n) \dots (z - l_n)}.$$

Pour s'en convaincre il suffit de remarquer que si l'on choisit comme contour C le contour formé par des arcs des cercles de rayons ρ , leurs tangentes, et des arcs du cercle de rayon β , il est possible de trouver un contour C' sur lequel le maximum du module de $\frac{1}{R_n(z)}$ puisse être déterminé par la seule connaissance des nombres ρ, m, α, β . Dès lors le maximum trouvé et que l'on peut appeler

$$M^{(m)}(\rho, \alpha, \beta)$$

ne dépend nullement de la situation particulière des pôles de $R_n(z)$ dans la couronne limitée par les cercles de rayons α et β . Dès lors, en assujettissant les coefficients des numérateurs $T_n(z)$ à des inégalités tout à fait analogues à l'inégalité (4) on assurera la convergence absolue et uniforme du développement en série de polynomes de la fonction $g(z)$ actuellement considérée, dans les mêmes conditions que pour la fonction $f(z)$ étudiée précédemment.

De même, on pourra déterminer une fonction

$$\mu^{(m)}(\rho)$$

telle qu'en l'introduisant dans les inégalités à la place de $M^{(m)}(\rho, \alpha, \beta)$ on ait un théorème analogue au théorème II, c'est-à-dire exprimant la convergence des dérivées de tous les ordres de la série de polynomes sur les rayons de convergence.

34. On peut ainsi énoncer le théorème suivant:

Théorème III. *Étant donnée une classe déterminée de séries de polynomes à région de convergence étoilée, classe définie par les relations*

$$F(z) = \frac{1}{1-z} = \sum P_n(z),$$

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{t_n} a_{n,k} z^k;$$

étant donnés en outre un entier positif m et deux nombres positifs α et β ($\alpha < \beta$), il est possible de déterminer une fonction $\mu(\rho)$ ayant les propriétés suivantes.

Soit

$$(1) \quad g(z) = \sum \frac{T_n(z)}{R_n(z)}$$

une série de fractions rationnelles; on suppose que les degrés de $T_n(z)$ et de $R_n(z)$ sont au plus égaux à m ; le coefficient de la plus haute puissance de z dans $R_n(z)$ est égal à l'unité et les modules des zéros de $R_n(z)$ sont supérieurs à α ; enfin les coefficients de $T_n(z)$ satisfont tous à l'inégalité

$$|A_n| \mu(u_n) < u_n$$

la série $\sum u_n$ étant convergente. Soit

$$g(z) = \sum c_k z^k$$

le développement de $g(z)$ suivant les puissances croissantes de z , développement dont le rayon de convergence est au moins égal à α . Si l'on pose

$$c_{n,k} = c_k a_{n,k},$$

$$Q_n(z) = \sum_{k=1}^{t_n} c_{n,k} z^k,$$

$$(2) \quad g(z) = \sum Q_n(z)$$

il existe, dans tout angle ayant son sommet à l'origine, une infinité de rayons du cercle β sur lesquels la série (2) converge absolument et uniformément et a même somme que la série (1), cette propriété subsistant pour les séries dérivées d'ordre quelconque de (1) et de (2).

35. Les observations que nous avons faites dans le cas des séries de fractions simples, relativement à la détermination sur des courbes de continuité subsistent dans leur intégralité. Seulement, en ce qui concerne l'intégration, il y a lieu de tenir compte des observations sur les résidus

que nous avons faites dans la première partie. Un cas intéressant est celui où les coefficients des polynômes $T_n(z)$ vérifient les inégalités du théorème III, alors que les numérateurs des fractions obtenues par la décomposition en éléments simples ne vérifient pas les inégalités du théorème II, ni même du théorème I, ces numérateurs formant cependant une série absolument convergente. Il est dès lors possible, par intégration le long des courbes de continuité, de déterminer les résidus, absolument comme dans le cas où les conditions du théorème I sont vérifiées. On peut aussi obtenir relativement à l'impossibilité du prolongement analytique dans des régions où les pôles forment un ensemble dense, des résultats qui répondent en partie aux questions posées à la fin de la première partie. Mais, pour ne pas allonger démesurément, nous énoncerons ces résultats à la fin de cette deuxième partie, en nous bornant au cas particulier où la classe de séries de polynômes considérée est celle que M. MITTAG-LEFFLER a le premier signalée. Nous aurons en même temps l'avantage de pouvoir donner un énoncé plus précis, dans lequel rien ne restera indéterminé.

36. Nous allons, en effet, calculer une limite supérieure de la fonction désignée plus haut par $M(R, \rho)$, dans le cas des développements de M. MITTAG-LEFFLER.

Rappelons d'abord les résultats obtenus par M. MITTAG-LEFFLER. Nous utiliserons les notations de son mémoire *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène* (Acta mathematica, t. 23), en les appliquant à la fonction particulière $\frac{1}{1-z}$.

En conséquence, nous poserons¹

$$10 \quad \begin{cases} g_n(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{n^4} \sum_{\lambda_2=0}^{n^8} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{4n}} \frac{|\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n|}{|\lambda_1| |\lambda_2| \dots |\lambda_n|} \left(\frac{z}{n}\right)^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}, \\ G_0(z) = g_0(z) = 1, \\ G_n(z) = g_n(z) - g_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \end{cases}$$

¹ Nous modifions légèrement la formule de M. MITTAG-LEFFLER, afin d'avoir une série *absolument convergente* (ou du moins, afin qu'il soit aisé de démontrer que la convergence est absolue, car il est possible que la série même de M. MITTAG-LEFFLER, soit absolument convergente).

Nous remarquons de suite que $g_n(z)$ est un polynome en z de degré n^{4n} dans lequel tous les coefficients sont positifs et inférieurs ou égaux à un ; par suite $G_n(z)$ est un polynome du même degré dans lequel les coefficients sont tous en valeur absolue inférieurs à un et, par suite, si le module de z est inférieur à R , on a certainement

$$|G_n(z)| < 1 + R + R^2 + \dots + R^{n^{4n}} = \frac{R^{n^{4n}+1} - 1}{R - 1}.$$

On peut donc écrire, en supposant $R > 2$

$$(11) \quad |G_n(z)| < R^{n^{4n}+1}.$$

Cette inégalité nous sera très utile. La manière même dont on l'a obtenue prouve qu'elle subsiste si l'on prend un nombre quelconque de fois la dérivée des deux membres par rapport aux variables qui y figurent. On a donc, quelque soit h

$$(12) \quad |G_n^{(h)}(z)| < \frac{d^h}{dR^h} (R^{n^{4n}+1}) < n^{4nh} R^{n^{4n}}.$$

37. Ces inégalités établies, revenons au théorème de M. MITTAG-LEFFLER. Il consiste en ce que l'on a

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z)$$

la série du second membre étant absolument¹ convergente dans tout domaine

¹ Comme nous venons de le dire la convergence *absolue* dont ne parle pas M. MITTAG-LEFFLER et qui résultera manifestement de nos calculs a été obtenue par le changement de n en n^2 . Il est évident que si une série

$$(1) \quad \sum f_n(z)$$

converge *uniformément* dans un domaine D , il est possible en groupant convenablement ses termes, de la transformer en une série qui converge *absolument et uniformément* dans ce même domaine, c'est à dire telle que la série des modules converge *uniformément*. Mais si la série (1) converge uniformément dans une infinité de domaines $D_1, D_2, \dots, D_k, \dots$ de plus en plus grands, la convergence n'étant pas uniforme dans l'ensemble de ces domaines, il n'est pas certain qu'un même groupement de termes puisse rendre la série *absolument et uniformément convergente* dans chaque domaine D_k . C'est cependant ce qui a lieu dans le cas très général où il existe une série de comparaison fixe $\sum u_n$ indépendante de k et telle que le reste de la série (1) soit inférieur au reste de la série de comparaison, à partir d'un certaine valeur de n fixe dans chaque domaine D_k , mais dépendant de k .

fini D ne renfermant à son intérieur ni sur son contour aucune valeur de z réelle et supérieure ou égale à un.

En particulier, on peut choisir comme domaine D le domaine $S(R, \rho)$ défini plus haut. Notre but actuel est de déterminer une limite supérieure $M(R, \rho)$ de la somme des modules des termes de la série, lorsque z a une position quelconque dans le domaine. Pour cela nous déterminerons d'abord un nombre N , tel que l'on ait, dans tout le domaine D

$$(13) \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} |G_n(z)| < 1.$$

On aura dès lors, en utilisant les inégalités (12)

$$\sum_0^{\infty} |G_n(z)| < 1 + \sum_{n=1}^{N} R^{N^2 n + 1} < \sum_{n=0}^{N^2 N + 1} R^n < R^{N^2 N + 2},$$

en supposant toujours $R > 2$, ce qui n'a pas d'inconvénient, puisqu'on peut toujours remplacer une valeur de R par une valeur plus grande. On a donc

$$(14) \quad M(R, \rho) < R^{N^2 N + 2},$$

tout revient à déterminer N .

38. Mais auparavant nous remarquerons que si, pour la valeur de N choisie, on a, en même temps que l'inégalité (13), les inégalités

$$(15) \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} |G_n^{(h)}(z)| < A_h, \quad h = 1, 2, \dots, \infty,$$

les inégalités (12) donneront

$$(14') \quad M_h(R, \rho) < \sum_{n=0}^{\infty} |G_n^{(h)}(z)| < A_h + N^{2N} R^{N^2 N + 1}.$$

Pour atteindre complètement notre but nous devons donc déterminer 1° le nombre N ; 2° les nombres A_h .

39. Dans ce but, reportons-nous au mémoire de M. MITTAG-LEFFLER, et en particulier aux formules (33) de la page 58 dont nous transcrivons la première et la dernière

$$m \geq \varepsilon n \omega(n) \log n \omega(n),$$

$$m_1 + m_2 + \dots + m_{n-2} + m_n \geq m_{n-1} n \omega(n) \log n \omega(n).$$

Comme nous avons pris

$$m_1 = n^4, \quad m_2 = n^4, \quad m_3 = n^{12}, \quad \dots, \quad m_n = n^{4n},$$

on voit que ces inégalités sont vérifiées si l'on pose

$$\omega(n) = n^2;$$

nous adopterons cette valeur pour la fonction $\omega(n)$. L'inégalité (35) de M. MITTAG-LEFFLER deviendra alors

$$|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n| < \frac{\eta^k}{\mu^2},$$

et l'on aura, pour n assez grand

$$(16) \quad \left| \frac{1}{1-z} - g_n(z) \right| < \frac{C}{n^2},$$

C étant une constante. Il en résulte

$$|G_n(z)| < \left| \frac{1}{1-z} - g_n(z) \right| + \left| \frac{1}{1-z} - g_{n-1}(z) \right| < \frac{C}{n^2} + \frac{C}{(n-1)^2}$$

et, par suite, l'on voit à la fois que la série $\sum |Q_n(z)|$ converge et qu'il est aisé d'obtenir une limite supérieure de son reste.

40. Le point délicat consiste, étant donné le domaine $S(R, \rho)$, à déterminer un nombre N tel que l'inégalité (16) soit vérifiée pour $n > N$, la constante C étant inférieure à $\frac{N}{2}$. En effet s'il en est ainsi, on aura bien

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |G_n(z)| < C \sum_{n=N+1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} \right] < \frac{N}{2} \int_N^{\infty} \frac{2dN}{N^2} = 1$$

ce qui est notre inégalité (13).

Or, le domaine $S(R, \rho)$ étant donné, nous pouvons choisir d'abord l'étoile E et le nombre n de manière que l'étoile désignée par $E_n^{(n)}$ dans le mémoire de M. MITTAG-LEFFLER le comprenne entièrement à son in-

térieur. On voit aisément que cette condition sera remplie si l'on choisit pour E le domaine $S\left(R + 2\rho, \frac{\rho}{4}\right)$ et si l'on détermine n par la condition

$$n - 1 < \frac{4R}{\rho} < n.$$

Il suffit de se reporter aux pages 49 et 50 du mémoire du M. MITTAG-LEFFLER en remarquant que l'on a ici

$$a = e^{-\frac{1}{n\omega(n)}} = e^{-\frac{1}{n^3}}.$$

Quant au nombre g , limite supérieure des valeurs de la fonction $\frac{1}{1-z}$ sur le contour de l'étoile E , il satisfera visiblement à l'inégalité

$$g < \frac{4}{\rho}.$$

Enfin relativement au nombre k qui tend vers l'unité pour n infini (page 58 du mémoire de M. MITTAG-LEFFLER) on voit sans peine que l'on peut toujours supposer

$$k < 2.$$

Donc en prenant $N = \frac{8R}{\rho}$ l'inégalité (16) sera bien vérifiée quel que soit n supérieur à N , la constante $C = gk$ étant inférieure à $\frac{N}{2}$.

L'inégalité (14), en y remplaçant N par cette valeur, nous donne l'inégalité fondamentale¹

$$(17) \quad M(R, \rho) < R^{\left(\frac{8R}{\rho}\right)^{\rho} + 2}.$$

41. Il nous reste à calculer les nombres A_k qui figurent dans les inégalités (15). Il suffit, pour cela, d'utiliser l'inégalité par laquelle nous avons démontré, d'une manière générale, la convergence absolue des séries

¹ Dans mon cours du Collège de France, j'ai indiqué une méthode pour obtenir cette inégalité directement, sans se servir des calculs de M. MITTAG-LEFFLER. Il est plus simple de procéder ainsi que de refaire ces calculs; si on les suppose connus, comme il est naturel ici, la marche du texte est un peu plus brève.

semblables à une série $\sum P_n(z)$ donnée. Nous négligerons d'ailleurs, pour abrégér, la différence entre les séries semblables et les séries dérivées; il s'introduit ainsi, comme il a été expliqué, des facteurs proportionnels aux puissances de z , c'est à dire ici inférieurs à une puissance de R , ce qui est tout à fait sans importance à côté des facteurs exponentiels. Or l'intégration le long du contour $S(R, \rho)$ nous donne

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |G_n^{(h)}(z)| < ML \sum_{n=N+1}^{\infty} |G_n(z)|,$$

M étant le maximum du module de la dérivée d'ordre h sur le contour d'intégration et L la longueur de ce contour. Or on a évidemment

$$M < \frac{h^h}{\rho^{h+1}}, \quad L < 6R.$$

On a donc

$$A_h < \frac{6h^h R}{\rho^{h+1}}$$

et l'on voit que, dans les inégalités (14') ce terme est négligeable par rapport au suivant. On a donc, au moins pour ρ assez petit

$$(17') \quad M_h(\mu, \rho) < \left(\frac{8R}{\rho}\right)^{\frac{32Rh}{\rho}} R^{\left(\frac{8R}{\rho}\right)^{\frac{32R}{\rho}} + 1}.$$

Les inégalités (17) et (17') seront commodément remplacés dans les applications par les suivantes. On a, quel que soit h , pourvu que R soit assez grand

$$(18) \quad M_h\left(R, \frac{1}{R}\right) < \mu(R)$$

en posant

$$(19) \quad \mu(R) = e^{e^{R^{\frac{1}{2}}}},$$

ε étant un nombre positif quelconque, mais fixe.

On verrait sans peine que la fonction $\mu(R)$ ainsi déterminée est aussi celle qu'il convient d'introduire dans l'énoncé du théorème III, quel que soit m , lorsque l'on choisit le développement de $\frac{1}{1-z}$ défini par les re-

lations (10). Mais, au lieu de développer les calculs qui conduisent à ce résultat, il nous semble préférable de terminer cette seconde partie en énonçant rapidement quelques-uns des résultats précis qui se déduisent des formules (18) et (19), en utilisant les théorèmes I et II précédemment démontrés.

42. **Théorème IV.** *On considère la série*

$$f(z) = \frac{A_n}{(a_n - z)^{m_n}}$$

et l'on suppose que, α, ε, m étant des nombres positifs quelconques, mais fixes, on a,¹ quel que soit n ,

$$|A_n| < e^{-c^{n^{2+\varepsilon}}},$$

$$|a_n| > \alpha,$$

$$m_n < m.$$

On définit des nombres c_k par les égalités

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{|k|} = \frac{m_n(m_n + 1) \dots (m_n + k - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \sum \frac{A_n}{a_n^{m_n + k}}$$

et l'on pose

$$g_n(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{n^4} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{n^4} \frac{|\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n|}{|\lambda_1| |\lambda_2| \dots |\lambda_n|} c_{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} \left(\frac{z}{n}\right)^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n},$$

$$g_0(z) = g_0(z) = c_0,$$

$$G_n(z) = g_n(z) - g_{n-1}(z).$$

Dès lors la série

$$(S) \quad \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z)$$

converge sur une infinité de droites issues de l'origine, et a pour somme $f(z)$,

¹ On suppose de plus que les m_n sont entiers; il serait aisé de se débarrasser de cette hypothèse, mais il faudrait pour cela entrer dans des détails sur les fonctions non uniformes. On pourrait aussi supposer que m_n augmente indéfiniment avec n , à condition de limiter sa croissance d'une manière précise; de supposer, par exemple $m_n < n$.

la convergence étant absolue et uniforme sur tout segment fini de chacune de ces droites. Il y a d'ailleurs une infinité non dénombrable de telles droites dans tout angle, si petit qu'il soit, ayant son sommet à l'origine. Les dérivées d'ordre quelconque de la série (S) convergent de même sur ces droites et sont égales en chaque point aux dérivées de $f(z)$.

43. Soit E l'ensemble dérivé de l'ensemble des points a_n et Σ l'ensemble des points du plan qui n'appartiennent pas à E . Il peut se faire que l'ensemble Σ se compose de plusieurs parties séparées; la série donnée définit dans chacune d'elles une fonction analytique. Soit D une portion d'un seul tenant du domaine Σ ne contenant pas le point $z = 0$; il est clair que, parmi les droites de convergence définies dans l'énoncé précédent, il y en a dont une portion finie est entièrement comprise à l'intérieur de D . La connaissance des valeurs de la série sur ce segment suffit pour déterminer complètement la fonction analytique que définit cette série dans le domaine D . D'autre part, il est clair que les hypothèses fondamentales de l'énoncé subsistent lorsqu'on remplace z par $z + z_0$ à condition que le point $z = z_0$ n'appartienne pas à E ; le nombre α est simplement remplacé par un autre nombre fini. On peut donc énoncer le

Théorème V. Si l'on pose

$$f(z) = \sum \frac{A_n}{(z - a_n)^{m_n}}$$

en supposant

$$|A_n| < e^{-c^{m_n}},$$

$$m_n < m,$$

et si l'on désigne par Σ l'ensemble des points du plan qui n'appartiennent pas à l'ensemble dérivé E de l'ensemble des points a_n , la série $f(z)$ définit, dans le cas où Σ se compose de plusieurs domaines séparés (en nombre fini ou infini) une fonction analytique dans chacun de ces domaines.

La connaissance d'une de ces fonctions analytiques permet de calculer toutes les autres.

On peut affirmer, de plus, que chacune de ces fonctions analytiques admet comme domaine naturel d'existence la portion de Σ où elle est définie

par la série, c'est à dire que les points de E qui servent de frontière à cette région sont effectivement des points singuliers.

44. Lorsque la série $f(z)$ est donnée, on peut, comme nous l'avons fait observer, y remplacer z par $z + z_0$ sans modifier ses propriétés essentielles, à condition que le point z_0 n'appartienne pas à cet ensemble, c'est à dire qu'à tout point z_0 de Σ on peut ainsi faire correspondre une série de polynômes *relative à ce point*, série qui converge ainsi que toutes ses dérivées, sur une infinité de droites issues du point. Une remarque importante est la suivante: *on peut déterminer les droites de convergence sans se donner le point z_0 ; en d'autres termes, on peut déterminer des droites telles que la série relative à l'un quelconque de leurs points z_0 converge sur toute la droite, le point z_0 n'appartenant pas à E .*

45. Pour s'en rendre compte, il suffit d'observer que les droites de convergence passant par un point sont déterminées par la condition qu'elles rencontrent un nombre limité des cercles C_n dont les centres coïncident avec les divers points a_n et dont les rayons sont égaux aux termes successifs d'une série convergente à termes positifs $\sum u_n$. Or, les cercles C_n étant donnés, on sait qu'il existe une infinité de droites D ne rencontrant qu'un nombre limité d'entre eux. On peut se donner arbitrairement la direction de ces droites; et il en existe encore une infinité non dénombrable dont la distance à un point donné est inférieure à un nombre donné à l'avance. Il est clair que si l'on choisit une droite telle que D , rencontrant un nombre limité de cercles C_n et ne passant par aucun des points a_n et si z_0 est un point quelconque appartenant à D et n'appartenant pas à E , la série de polynômes relative au point z_0 converge sur toute la droite D , ainsi que toutes ses dérivées, la convergence étant d'ailleurs absolue et uniforme dans tout intervalle fini. D'ailleurs pour calculer les coefficients de cette série, il suffit de connaître les valeurs de la fonction et de ses dérivées au point z_0 .

En changeant z en $\alpha z + \beta$, on peut évidemment supposer que la droite D coïncide avec l'axe des quantités réelles; on peut de plus, séparer, s'il y a lieu, dans chacune des séries de polynômes, la partie réelle du coefficient de i , de manière à énoncer un résultat dans lequel ne figurent que des quantités réelles, ce qui n'en diminue pas d'ailleurs la généralité.

Dès lors si l'on suppose que sur la droite D (ou axe des x) certains segments font partie de l'ensemble E , et certains autres de l'ensemble Σ , on arrive au résultat suivant.

46. *Il est possible¹ de former des séries de polynômes*

$$f(x) = \sum Q_n(x)$$

qui convergent ainsi que toutes leurs dérivées, pour toute valeur de la variable réelle x , et qui définissent, dans certains intervalles une fonction réelle non analytique, dans d'autres intervalles une fonction réelle analytique. Si le point $x = x_0$ appartient à l'un de ces derniers intervalles, la connaissance de la valeur de $f(x)$ et de ses dérivées en ce point permet de déterminer complètement les coefficients de la série et, par suite, les valeurs de la fonction pour toute valeur réelle de x .

47. Il importe d'attirer l'attention sur une circonstance singulière, que l'on comprendra nettement sur un exemple particulier.

Supposons que l'ensemble E se réduise à un segment de Oy comprenant le point O , par exemple à l'ensemble des points θi , θ étant réel et compris entre -1 et $+1$; le seul point de Ox qui appartienne à E est alors le point $x = 0$; on a donc deux fonctions analytiques sur Ox , l'une définie pour x positif, l'autre pour x négatif; on passe d'ailleurs de l'une de ces fonctions à l'autre au moyen de l'une des séries de polynômes qui peuvent être déduites de chacune d'elles et qui convergent sur tout l'axe Ox . Mais on peut aussi se servir du prolongement analytique ordinaire, en contournant l'ensemble E , c'est à dire en traversant Oy en un point dont le module soit supérieur à l'unité. Ces deux manières de procéder donnent le même résultat. La circonstance sur laquelle nous désirons appeler l'attention est la suivante: *il est aisé de construire des cas où ces deux manières de procéder donneraient des résultats différents.* Il suffit en effet, d'ajouter à $f(z)$ une fonction quelconque non uniforme, ayant un point singulier de non uniformité parmi les points de E autres que $z = 0$; par exemple on peut considérer l'une des fonctions

$$\begin{aligned} g(z) &= f(z) + \sqrt{1+z^2}, \\ h(z) &= f(z) + \log(1+z^2). \end{aligned}$$

¹ Pour former effectivement de telles séries il suffit d'employer le procédé que nous appliquons dans la troisième partie à un cas plus général.

Le terme additif donne lieu en chaque point de l'axe réel à une série de polynomes relative à ce point et qui converge, ainsi que toutes ses dérivées, pour toutes les valeurs réelles; il est d'ailleurs clair que l'on obtient des valeurs différentes de la fonction $\sqrt{1+z^2}$ ou $\log(1+z^2)$ suivant que l'on passe des valeurs positives aux valeurs négatives de z en traversant Oy à l'intérieur ou à l'extérieur du segment qui a pour extrémités les points $+i$ et $-i$.

Les fonctions $g(z)$ et $h(z)$ sont uniformes, dans la théorie ordinaire du prolongement analytique; j'ai déjà signalé, dans ma thèse, l'intérêt qu'il pouvait y avoir à les considérer comme faussement uniformes; nous reviendrons plus loin sur ce point, de manière à faire évanouir toute apparence de contradiction possible entre la théorie du prolongement analytique de WEIERSTRASS et la généralisation de cette théorie, qui est naturellement suggérée par ce qui précède et à laquelle est consacrée la troisième partie de ce Mémoire.

TROISIÈME PARTIE.

La généralisation de la théorie du prolongement analytique.

48. Nous venons de voir comment certaines transformations de séries de puissances en séries de polynomes donnent le moyen, non seulement d'obtenir le prolongement analytique sous une forme commode par sa généralité, mais encore d'atteindre des régions dans lesquelles le prolongement analytique est impossible. Les résultats que nous avons obtenus peuvent donc, en un certain sens, être regardés comme une généralisation de la théorie du prolongement analytique; mais, pour établir la nouvelle théorie d'une manière complète, il est nécessaire d'aller plus loin et de montrer que *la transformation en séries de polynomes peut s'appliquer avec succès à des séries de puissances toujours divergentes.*

49. Pour plus de netteté, nous nous bornerons aux séries de polynomes dues à M. MITTAG-LEFFLER (avec la légère modification indiquée

page 354), bien que tout ce qui suit s'applique sans difficulté à une classe quelconque de séries de polynomes à région de convergence étoilée.¹

Rappelons le résultat fondamental dont nous aurons à nous servir. En posant:

$$g_n(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{n^1} \sum_{\lambda_2=0}^{n^2} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{n^n} \frac{|\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n|}{|\lambda_1| |\lambda_2| \dots |\lambda_n|} \left(\frac{z}{n}\right)^n,$$

$$G_0(z) = g_0(z) = 1,$$

$$G'_n(z) = g_n(z) - g_{n-1}(z)$$

la série

$$\sum G_n(z)$$

converge absolument et uniformément ainsi que toutes ses dérivées, dans la région $S(R, \rho)$, quels que soient R et ρ . De plus si l'on désigne par $M_k(R, \rho)$ le maximum de la somme

$$\sum |G'_n(z)|$$

¹ Une étude intéressante serait l'étude *simultanée* de *plusieurs* classes différentes, au point de vue auquel nous nous plaçons ici; mais nous laisserons ce point complètement de côté dans ce Mémoire.

On peut faire à la théorie que nous esquissons diverses objections, et observer, par exemple, que le résultat obtenu peut dépendre du choix des constantes c (voir, par exemple MITTAG-LEFFLER, *Acta mathematica*, t. 24, p. 186, mémoire dont j'ai eu connaissance après avoir écrit celui-ci). A ces objections, basées sur une hypothèse, on pourrait aisément répondre par d'autres hypothèses (par exemple, que l'on peut choisir, pour édifier la théorie, des constantes déterminées, ou des classes de constantes; ou bien, que l'on peut exclure de la théorie les cas où toutes les constantes possibles — ou du moins des catégories très larges — ne fourniraient pas le même résultat, etc.).

Mais au lieu de raisonner ainsi dans le vide, il vaut mieux remarquer simplement qu'une théorie ne saurait être parfaite du premier coup. Sans prétendre comparer, au point de vue de leur importance, la théorie nouvelle avec celle des fonctions analytiques, on peut observer que celle-ci date en réalité du jour où CAUCHY a montré que la série de TAYLOR peut se déduire de la notion de fonction monogène; mais elle est restée longtemps imparfaite: c'est seulement longtemps après que le génie de WEIERSTRASS lui a donné sa forme définitive; on ne doit donc pas s'étonner des imperfections de la théorie nouvelle, qui date seulement de deux ans (puisque les premiers mémoires de M. MITTAG-LEFFLER sont de 1898).

lorsque z reste dans cette région, on a quel que soit le nombre positif ε

$$M_k(R, \rho) < e^{-e^{\left(\frac{L}{\rho}\right)^{1+\varepsilon}}},$$

au moins pour les valeurs de $\frac{R}{\rho}$ dépassant une certaine limite (laquelle dépend évidemment de k et de ε).

50. Considérons l'expression

$$\frac{A_n}{(a_n - z)^{k+1}};$$

traçons un cercle C_n ayant pour centre le point a_n et pour rayon ρ_n et un autre cercle I' ayant pour centre le point $z = 0$ et pour rayon un nombre R indépendant de n . Désignons d'autre part par r_n le module de a_n . Il est clair que si l'on mène de l'origine les tangentes au cercle C_n et si on les prolonge jusqu'au cercle I' , on forme ainsi une région S_n semblable à une certaine région $S(R, \rho)$.¹ Si le point z est intérieur à la région S_n , le point $\frac{z}{a_n}$ est intérieur à la région

$$S\left(\frac{R}{r_n}, \frac{\rho_n}{r_n}\right).$$

On a d'ailleurs

$$\frac{A_n}{(a_n - z)^{k+1}} = \frac{A_n}{a_n^{k+1}} \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{k+1}}.$$

Dès lors, la somme des modules du développement en série de polynomes de la fraction $\frac{A_n}{(a_n - z)^{k+1}}$ est inférieure à

$$\left| \frac{A_n}{a_n^{k+1}} \right| M_k\left(\frac{R}{r_n}, \frac{\rho_n}{r_n}\right)$$

¹ Si l'on désigne par A et B les points de contact des tangentes avec C_n et par A' et B' leurs points d'intersection avec I' , la région S_n est limitée par l'arc $A'B'$ supérieur à π , les droites AA' et BB' et l'arc AB inférieur à π .

c'est à dire inférieure, *au moins pour n assez grand*, si l'on suppose que $\frac{\rho_n}{r_n}$ tende vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, à

$$|A_n| e^{-e^{\left(\frac{R}{r_n}\right)^{1+\varepsilon}}},$$

car, dans ces conditions, le facteur $\frac{1}{|a_n|^{k+1}}$ peut être négligé, en faisant varier aussi peu que l'on veut ε , le nombre k étant supposé inférieur à un nombre fixe indépendant de n .

Il est dès lors évident que, si les nombres a_n sont donnés *d'une manière absolument quelconque*, il suffira de choisir les nombres ρ_n de telle manière que la série

$$\sum \frac{\rho_n}{r_n}$$

soit convergente; il y aura alors une infinité de droites D issues de l'origine et extérieures à toutes les régions S_n d'indice assez grand. Si donc l'on suppose les nombres A_n choisis de manière que la série

$$\sum |A_n| e^{-e^{\left(\frac{R}{\rho_n}\right)^{1+\varepsilon}}}$$

soit convergente, on pourra affirmer que la série de polynomes déduite de la série de fractions rationnelles

$$\sum \frac{A_n}{(a_n - z)^{k_n}}, \quad k_n < m,$$

converge absolument et uniformément, ainsi que toutes ses dérivées, sur chacune des droites D .¹

51. Ainsi, les points a_n étant donnés, il n'est pas difficile de choisir les coefficients A_n de manière à assurer la convergence de la série de polynomes sur une infinité de droites issues du point $z = 0$, lequel peut appartenir à l'ensemble dérivé E de l'ensemble des points a_n ; mais c'est

¹ Ce qui précède montre qu'il en est ainsi à l'intérieur du cercle de rayon R ; mais ce nombre R peut être pris aussi grand que l'on veut, en faisant varier infiniment peu ε , puisque ρ_n tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.

là un résultat qu'on aurait pu aisément prévoir, d'après ce qui précède. Nous pouvons aller plus loin et montrer que, les points a_n étant donnés, on peut écrire pour les $|A_n|$ un système d'inégalités telles que, lorsqu'elles sont vérifiées, il existe dans toute région une infinité de droites telles que chacun de leurs points ait la propriété qu'avait le point $z = 0$ dans le cas que nous venons d'étudier: c'est à dire telle que la série de polynômes relative à chacun de leurs points converge sur toute la droite, tous les points de la droite pouvant d'ailleurs appartenir à l'ensemble E , auquel cas la fonction définie par la série n'est analytique en aucun point de la droite.

52. Considérons donc une série ¹

$$f(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n}$$

dont les pôles ont une distribution absolument quelconque. Désignons par u_n des nombres positifs quelconques tels que la série

$$\sum u_n$$

soit convergente et décrivons, de chaque point a_n comme centre, deux cercles, l'un C_n ayant pour rayon u_n et l'autre C'_n ayant pour rayon u_n^2 . Nous pouvons d'ailleurs supposer que l'on a, quel que soit n

$$u_n < 1,$$

de manière que le cercle C'_n soit toujours intérieur au cercle C_n .

53. Soit maintenant A un point du plan extérieur à tous les cercles C_n ; si l'on mène du point A les deux tangentes au cercle C'_n , l'angle de ces deux tangentes est évidemment

$$2 \arcsin \frac{u_n^2}{r_a},$$

¹ Nous supposons tous les dénominateurs du premier degré, uniquement pour abrégér l'écriture; le cas où ce degré serait un nombre fini quelconque ou même augmenterait indéfiniment avec n , suivant une loi donnée, se traiterait d'une manière analogue.

r_n désignant la distance Aa_n ; mais l'on a $r_n > u_n$; l'angle des tangentes est donc inférieur à

$$2 \operatorname{arc} \sin \frac{u_n^2}{u_n} = 2 \operatorname{arc} \sin u_n;$$

les valeurs numériques de ces angles forment par suite une série convergente: c'est à dire qu'il y a une infinité de droites passant par le point A et rencontrant un nombre limité de cercles C'_n . Pour que la série de polynômes relative au point A , qui peut se déduire de $f(z)$, converge, ainsi que toutes ses dérivées, sur chacune de ces droites, il suffit évidemment que R étant un nombre fixe quelconque, l'on ait, pour n assez grand,

$$|A_n| < e^{-e^{\left(\frac{R}{u_n}\right)^{1+\varepsilon}}}.$$

Or, on peut prendre $u_n = n^{-1-\varepsilon}$ et les inégalités précédentes peuvent être, quel que soit le nombre fixe R , remplacées par les suivantes

$$|A_n| < e^{-e^{n^{2+\varepsilon}}}.$$

ε étant un nombre positif arbitraire.

D'ailleurs, la série $\sum u_n$ étant convergente, il existe une infinité de droites qui ne rencontrent qu'un nombre limité de cercles C_n ; comme on peut toujours négliger un nombre limité de termes,¹ chaque point de ces droites peut être pris pour A .

54. Pour donner des exemples effectifs, il est commode d'utiliser des résultats connus relatifs à l'approximation des nombres irrationnels. Désignons par α un nombre irrationnel tel que, dans son développement en fraction continue, tous les quotients incomplets soient inférieurs ou égaux à un nombre fixe B ; en particulier, on peut prendre pour α une irrationnelle quelconque du second degré. Pour fixer les idées nous supposons

$$\alpha = \sqrt{2}$$

¹ On suppose, bien entendu, que les termes négligés ne sont pas infinis, c'est à dire que la droite considérée ne passe par aucun point a_n , ce qui est toujours possible.

et l'on a alors

$$B = 2.$$

Soit $\frac{p}{q}$ un nombre rationnel quelconque et $\frac{P_n}{Q_n}$ la première des réduites de α telle que Q_n soit supérieur à q ; on sait que l'on a

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| > \left| \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \alpha \right| > \left| \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n} \right| = \frac{1}{Q_{n-1} Q_n}.$$

On a d'ailleurs

$$Q_n < BQ_{n-1} + Q_{n-2} < (B + 1)Q_{n-1} < (B + 1)q,$$

$$Q_{n-1} < q$$

et, par suite

$$\frac{1}{Q_n Q_{n-1}} > \frac{1}{(B + 1)q^2}.$$

On a donc, finalement, quels que soient les entiers p et q :

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| > \frac{1}{(B + 1)q^2}.$$

Cela posé, considérons dans le plan tous les points dont les coordonnées sont des nombres rationnels, c'est à dire tous les points

$$z = \frac{p + ip'}{q},$$

p, p', q étant des nombres entiers; nous supposons que ces points sont les points a_n . Si l'on veut exclure certains d'entre eux, de manière que dans certaines régions la série définisse une fonction analytique régulière; il suffit de supposer nuls les numérateurs correspondants. On sait d'ailleurs que les points donnés, peuvent être, d'une infinité de manières, rangés sous la forme d'une série simple; pour préciser, nous les rangerons de manière qu'en passant d'un point au suivant, la somme

$$|p| + |p'| + |q|$$

n'aille jamais en diminuant.

55. Considérons maintenant une droite D ayant pour équation

$$(D) \quad Ax + A'y + C + C'\alpha = 0,$$

A, A', C, C' étant des nombres entiers quelconques, dont le dernier est supposé essentiellement différent de zéro. La distance d du point $z = \frac{p + ip'}{q}$ à cette droite est

$$d = \frac{1}{\sqrt{A^2 + A'^2}} \frac{Ap + A'p' + (C + C'\alpha)q}{q},$$

c'est à dire

$$d = \frac{C'}{\sqrt{A^2 + A'^2}} \left(\alpha + \frac{Ap + A'p' + Cq}{C'q} \right);$$

or, d'après ce qui précède, on a

$$\left| \alpha + \frac{Ap + A'p' + Cq}{C'q} \right| > \frac{1}{(B + 1)C'^2q^2}.$$

Il en résulte

$$|d| > \frac{1}{C'\sqrt{A^2 + A'^2}(B + 1)q^2} > \frac{c}{q^2},$$

c étant une constante. D'ailleurs, avec les conventions que nous avons faites, il est aisé de voir que le rang n du point $\frac{p + ip'}{q}$ est de l'ordre de grandeur de q^3 lorsque q est assez grand; on a donc certainement, en changeant au besoin la valeur de c ,

$$|d| > \frac{c}{n}.$$

Dès lors, si l'on décrit de chaque point a_n comme centre un cercle C_n ayant pour rayon $\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ la droite D ne pourra rencontrer qu'un nombre limité de ces cercles (d'une manière précise, un nombre au plus égal à $\left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$).

Les points de cette droite pourront donc être pris comme points A ; d'ailleurs puisque nous prenons ici $u_n = \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ nous aurons $u_n^2 = \frac{1}{n^{2+2\varepsilon}}$ et nous supposons

$$|A_n| < e^{-e^{a_n^{2+\varepsilon}}},$$

c'est à dire, en observant que le rang n est de l'ordre de grandeur de

$$(|p| + |p'| + |q|)^3,$$

$$|A_{p,p',q}| < e^{-e^{\frac{1}{2} + p' + q}}.$$

Lorsque cette inégalité est vérifiée on peut affirmer que la série

$$\sum_z \frac{A_{p,p',q}}{z - \frac{p + ip'}{q}}$$

donne naissance, en tout point d'une droite D à une série de polynomes convergente ainsi que toutes ses dérivées, sur la droite D tout entière.

56. Un changement de variable très simple permet d'obtenir une droite D coïncidant avec l'axe réel et l'on obtient le résultat suivant.

Théorème. *Si l'on pose*

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \sum_{p'=-\infty}^{p'=+\infty} \frac{\varphi(p, p', q)}{x + i\sqrt{2} - \frac{p + ip'}{q}},$$

la fonction $\varphi(p, p', q)$ vérifiant l'inégalité

$$|\varphi(p, p', q)| < e^{-e^{p^2 + p'^2 + q^2}},$$

la série $f(x)$ qui converge absolument et uniformément ainsi que toutes ses dérivées, sur tout segment fini de l'axe des x , définit une fonction d'une variable réelle continue, ainsi que ses dérivées de tous les ordres, pour toute valeur de la variable. Cette fonction n'est d'ailleurs analytique pour aucune valeur de x si l'on suppose $\varphi(p, p', q)$ constamment différent de zéro.

La fonction $f(x)$ a la propriété fondamentale suivante; si l'on désigne par $f(x_0)$, $f'(x_0)$, \dots , $f^{(k)}(x_0)$, \dots sa valeur et celle de ses dérivées en un point réel quelconque x_0 et si l'on pose

$$g_n(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{n^k} \sum_{\lambda_2=0}^{n^k} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{n^k} \frac{f(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)}{|\lambda_1| |\lambda_2| \dots |\lambda_n|} \left(\frac{x - x_0}{n} \right)^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n},$$

$$g_0(x) = g_0(x) = f(x_0),$$

$$g'_n(x) = g_n(x) - g_{n-1}(x)$$

la série

$$f(x) = \sum_0^{\epsilon} G_n(x)$$

converge absolument et uniformément, ainsi que toutes ses dérivées, dans tout intervalle fini et l'on a quels que soient x et k

$$f^{(k)}(x) = \sum_0^{\infty} G_n^{(k)}(x).$$

57. Le théorème précédent fait connaître une classe de fonctions d'une variable réelle possédant, comme les fonctions analytiques, la propriété d'être complètement déterminées par la connaissance de leur valeur et des valeurs de leurs dérivées, *en un point*. On peut, après avoir constaté par un exemple l'existence effective de telles fonctions, les définir *a priori* et baser sur leur considération une généralisation de la théorie du prolongement analytique. C'est la marche que nous allons suivre.

58. *Etant donnée une fonction d'une variable réelle x , continue ainsi que toutes ses dérivées dans un intervalle AB , nous dirons que c'est une fonction (M) dans cet intervalle si, quels que soient les nombres x_1 et x_0 compris dans cet intervalle et l'entier positif k , l'on a*

$$F^{(k)}(x_1) = \sum_0^{\infty} G_n^{(k)}(x_1 - x_0)$$

la série du second membre étant absolument et uniformément convergente lorsque x_0 étant fixe, x_1 est intérieur à un intervalle quelconque intérieur à AB .

Les polynomes $G_n(\xi)$ sont d'ailleurs définis par les relations

$$g_n(\xi) = \sum_{\lambda_1=0}^{n^1} \sum_{\lambda_2=0}^{n^2} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^n} \frac{P^{(\lambda_1+\dots+\lambda_n)}(x_0)}{|\lambda_1| |\lambda_2| \dots |\lambda_n|} \left(\xi\right)_n^{\lambda_1+\dots+\lambda_n},$$

$$G_n(\xi) = g_n(\xi) - g_{n-1}(\xi).$$

59. Il résulte immédiatement de la définition qu'une fonction (M) est complètement déterminée par la connaissance de la suite

$$(\Sigma) \quad F(x_0), F'(x_0), \dots, F^{(n)}(x_0), \dots$$

x_0 étant un point quelconque de AB .

60. Etant donnée une suite telle que Σ , la question de savoir si elle définit une fonction (M) se ramène à l'étude de certaines séries. Il serait désirable, au point de vue de la commodité des applications, de remplacer cette étude directe, pratiquement beaucoup trop compliquée, par des critères plus simples;¹ mais ces difficultés sont d'ordre purement pratique et n'ont aucune importance en théorie; l'essentiel est que l'on ait constaté par des exemples, que les conditions imposées par la définition aux fonctions (M) sont parfaitement compatibles, bien qu'a priori elles puissent paraître surabondantes. Ce qui serait plus important, c'est l'extension aux fonctions (M) des propriétés qui m'ont permis d'utiliser dans la théorie des équations différentielles d'autres procédés de sommation des séries divergentes.² Mais c'est un point que je laisserai de côté, pour m'occuper exclusivement de la généralisation de la théorie du prolongement analytique.

Si nous considérons un segment de droite AB situé d'une manière quelconque dans le plan de la variable complexe z , une transformation de la forme

$$z = (\alpha + i\beta)x + \gamma + i\delta$$

peut amener ce segment à coïncider avec un segment de l'axe des x . Si une fonction définie sur AB est une fonction (M) après cette transforma-

¹ Pour rechercher ces critères, il sera peut être commode de modifier la définition en ne précisant pas la valeur des nombres appelés m_1, m_2, \dots, m_n dans le mémoire de M. MITTAG-LEFFLER, et pris ici égaux à n^4, n^8, \dots, n^{4n} mais d'assujettir seulement ces nombres à vérifier des inégalités convenables.

² Voir mon *Mémoire sur les séries divergentes*, pages 95—99 et 121.

Pour l'étude des relations qu'il y a entre la théorie de M. MITTAG-LEFFLER, la théorie développée ici, et la théorie générale des séries divergentes, je me permets de renvoyer à mes *Leçons sur les séries divergentes* qui paraîtront prochainement (Paris, Gauthier-Villars, 1901).

tion, nous conviendrons de dire qu'elle est une fonction (M) sur tout AB et la formation des séries de polynômes qui la représentent, ainsi que ses dérivées, est exactement la même que dans le cas particulier étudié d'abord.

61. Soient maintenant deux segments AB , CD , ayant un point commun I et sur chacun de ces segments une fonction (M) ; si ces deux fonctions prennent, ainsi que toutes leurs dérivées par rapport à z , la même valeur au point I , nous conviendrons de dire que chacune d'elles est le *prolongement* de l'autre.

Etant donnée une fonction (M) définie sur AB et un segment CD rencontrant AB au point I , le prolongement sur CD de la fonction (M) définie sur AB peut ne pas exister; mais, *s'il existe, il est unique*. D'ailleurs, dans le cas où la fonction (M) est analytique dans le voisinage du point I (sur AB), le prolongement existe au moins dans un certain voisinage de I (sur CD) et coïncide avec celui que donne la théorie ordinaire des fonctions analytiques.

62. Etant donnés un point I et une suite telle que Σ , s'il existe au moins un segment AB passant par I et tel que la suite Σ définisse une fonction (M) sur AB , on dira que la suite Σ constitue un élément de fonction (M) . Un tel élément peut définir une fonction (M) dans une seule direction, ou dans plusieurs, ou dans une infinité.¹

Nous pouvons maintenant acquérir la notation d'une fonction (M) uniforme dans une région du plan.

63. Soit (S) une région du plan simplement connexe et (D) un ensemble de droites D dense dans tout le plan. Nous entendons par là qu'étant donnés deux points quelconques du plan et un nombre arbitraire ε il existe une droite D telle que la distance des deux points à cette droite soit inférieure à ε . Sur chacune des droites D , il existe un nombre limité ou illimité de segments intérieurs à (S) ; nous supposons que sur chacun de ces segments est définie une fonction M . Nous supposons de plus,

¹ Il y aura sans doute lieu d'introduire une dénomination particulière pour les éléments tels que les directions dans lesquelles ils définissent une fonction (M) forment un faisceau partout dense.

qu'en un point d'intersection intérieur à S de deux quelconques des droites D les fonctions (M) définies sont le prolongement l'une de l'autre. Dans ces conditions, nous dirons que les diverses fonctions (M) définies sur les divers segments de toutes les droites D constituent une branche unique de fonction (M) , uniforme dans S . Il est clair qu'une telle branche est complètement définie par un seul de ses éléments; d'ailleurs la définition précédente comprend, comme cas particulier, la définition du prolongement analytique. Si une fonction analytique est définie dans un domaine S' d'un seul tenant intérieur à S et si la fonction (M) coïncide avec elle, ainsi que ses dérivées de tout ordre, en un point de S' la coïncidence a lieu dans tout S' .

Mais il existe effectivement, comme nous l'avons montré, des fonctions (M) uniformes dans une région, sans être analytiques en aucun point de cette région. Tel est le cas de la fonction considérée page 372, en supposant que $\varphi(p, p', q)$ ne soit jamais nul.

64. Mais dans certains cas, on peut, en partant d'une fonction analytique uniforme, définir une fonction (M) non uniforme; alors une branche seulement de la fonction (M) coïncide avec la fonction analytique, dans son domaine naturel d'existence.

65. Posons, par exemple

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p^{-i} q^{-j} z^{i+j},$$

et considérons la fonction

$$\Phi(z) = \varphi(z) + A\sqrt{z-z^2} + B \log \frac{z}{z-1}.$$

La fonction $\varphi(z)$ est une fonction uniforme dans tout le plan, admettant comme coupure essentielle le segment rectiligne $0 \leq z < 1$, que nous désignerons par OI . Par suite la fonction $\Phi(z)$ est une fonction analytique uniforme; car, la détermination du radical et celle du logarithme étant une fois choisies, on ne franchira jamais le segment OI .

Mais si l'on prend dans le plan un point P non situé sur l'axe réel, et si l'on forme la série (M) qui se déduit des valeurs en P de la fonction $\Phi(z)$ et de ses dérivées, on obtiendra une fonction (M) sur des segments qui traversent OI . Cette fonction (M) peut ainsi être suivie dans

tout le plan, sur des chemins différant aussi peu que l'on veut d'un chemin quelconque et, si l'on procède ainsi, *on constatera que cette fonction (M) n'est pas uniforme*. Dès lors si l'on considère le cercle décrit sur OI comme diamètre on constatera aisément que l'on a une branche de fonction (M) uniforme dans ce cercle; mais si dans l'un des deux demi-cercles cette fonction coïncide avec la fonction analytique $\phi(z)$, dans l'autre demi-cercle, elle en différera, la différence étant visiblement égale à

$$2A\sqrt{z-z^2} + 2i\pi B.$$

66. Ainsi il peut arriver qu'une fonction (M) uniforme dans un domaine d'un seul tenant (S) coïncide, dans deux parties séparées de ce domaine, avec deux fonctions analytiques différentes. Mais, dans ce cas, l'une quelconque de ces fonctions analytiques ne peut pas être prolongée, *sans quitter* (S), dans la partie de (S) où l'autre est définie.

Il est inutile d'insister: on voit qu'il ne saurait y avoir de contradiction entre la théorie que nous exquissions ici et la théorie des fonctions analytiques édifiée par WEIERSTRASS.

Nous n'insisterons pas non plus sur les singularités que peuvent présenter les fonctions (M) non uniformes, les points de ramification ou les points singuliers logarithmiques pouvant former un ensemble partout dense; car il semble que l'étude des fonctions (M) uniformes doive être d'abord tentée.

67. Nous avons déjà fait connaître une classe très étendue de fonctions (M) uniformes; nous les avons définies par des séries dans lesquelles les points singuliers sont mis en évidence. Il serait évidemment désirable de connaître des cas dans lesquels l'étude d'une fonction (M) peut être faite en partant d'un *élément*, sans que les points singuliers soient connus a priori. Mais ce que nous connaissons de la théorie des fonctions analytiques fait craindre qu'il ne soit extrêmement difficile de former un tel exemple. En effet, en dehors de deux cas singuliers, les fonctions entières d'une part, et les séries de TAYLOR admettant leur cercle de convergence comme coupure d'autre part, je ne pense pas qu'il existe de circonstance¹ dans laquelle la

¹ Citons cependant, dans cet ordre d'idées, certains résultats obtenus par MM. FABRY, LEAU et LE ROY (voir notamment Comptes Rendus, tomes 127 et 128).

connaissance d'un élément de fonction analytique ait permis effectivement d'obtenir les propriétés de la fonction, sans que ces propriétés fussent connues antérieurement au développement.

68. En terminant, je vais indiquer comment l'on peut résoudre une petite difficulté qui pourrait être soulevée à propos de l'exemple donné plus haut, mais sur laquelle nous n'avons pas insisté, pour ne pas interrompre la suite du raisonnement.

Nous avons considéré deux systèmes de cercles ayant pour centres les points a_n ; les uns, les cercles C_n , ont pour rayons les nombres u_n ; les autres, les cercles C'_n , ont pour rayons les nombres u_n^2 . Nous considérons maintenant une infinité d'autres systèmes de cercles, les cercles C''_n dont les rayons seront u_n^3 , les cercles C'''_n dont les rayons seront u_n^4 , ..., les cercles $C^{(\alpha-1)}_n$ dont les rayons seront u_n^α , Nous avons vu que si l'on considère une droite D qui rencontre un nombre limité de cercle C_n , tout point A de D possède la propriété suivante: dans tout angle ayant son sommet au point A , il existe une infinité non dénombrable de droites qui ne rencontrent qu'un nombre limité de cercles C'_n . Si l'on désigne par D' l'une de ces droites, la série de polynômes relative au point A converge ainsi que ses dérivées sur tout D' : il en est d'ailleurs de même de la série de polynômes relative à un autre point de D' ; on a donc sur D' une fonction (M) .

Il a donc été possible, partant d'une fonction (M) définie sur D , de la prolonger dans une infinité de directions à partir de chaque point A de D .

69. Mais si l'on considère maintenant un point quelconque A' de D' , on ne peut pas affirmer que le point A' ait la même propriété que le point A , c'est à dire ne soit à l'intérieur que d'un nombre limité de cercles C_n et, par suite, soit tel qu'il se trouve dans tout angle ayant son sommet en A' , une infinité non dénombrable de droites ne rencontrant qu'un nombre limité de cercles C'_n . Il y a cependant sur D' des points B à partir desquels le prolongement de la fonction (M) est possible dans au moins une direction; ce sont les intersections avec D' des droites analogues à D' qui passent par un point de D autre que A ; cela suffit, à la rigueur, pour bâtir la théorie; mais celle-ci prendrait évidemment une forme plus élégante si chaque point A' de D' avait la même propriété que chaque point A de D .

Or il est clair que, tout point A' de D' ne pouvant être à l'intérieur que d'un nombre limité de cercles C'_n , il existe dans tout angle ayant son sommet en A' , une infinité non dénombrable de droites ne rencontrant qu'un nombre limité de cercles C''_n . En effet si la distance $A'a_n$ est désignée par r_n , on a, pour n assez grand,

$$r_n > u_n^2$$

et comme, d'autre part, l'angle des tangentes menées de A' au cercle C''_n est

$$2 \arcsin \frac{u_n}{r_n}$$

les valeurs numériques de ces angles forment une série convergente, puisque la série $\sum u_n$ est convergente par hypothèse.

On peut donc mener par A' une infinité non dénombrable (dans tout angle) de droites D'' ne rencontrant qu'un nombre limité de cercles C''_n . Par chaque point A'' d'une droite D'' il passe une infinité de droites D''' ne rencontrant qu'un nombre limité de cercles C'''_n , et ainsi de suite.

70. On voit que les droites successivement obtenues D, D', D'', D''', \dots n'ont pas les mêmes propriétés; il est cependant possible, et il nous sera fort commode, de les définir par une propriété qui leur est commune.

Nous dirons qu'une droite est une droite (D) s'il existe¹ un nombre fini α tel que cette droite ne rencontre qu'un nombre limité de cercles $C_n^{(\alpha)}$.

Il résulte manifestement de ce qui précède que, par tout point A pris sur une droite D , il passe, dans tout angle, une infinité non dénombrable de droites (D). Car, si le point A n'est intérieur qu'à un nombre limité de cercles $C_n^{(\alpha)}$ il passe par ce point, dans tout angle, une infinité non dénombrable de droites ne rencontrant qu'un nombre limité de cercles $C_n^{(\alpha+1)}$; ces droites sont des droites (D).

71. Si donc on choisit les numérateurs de la série de fractions rationnelles, de manière que cette série définisse une fonction (M) sur chaque droite (D), on pourra effectuer le prolongement de cette fonction (M) de

¹ On suppose, de plus, bien entendu, que la droite D ne passe par aucun des points a_n .

la manière la plus commode, en cheminant exclusivement sur des droites (D), c'est à dire sur des droites telles que l'on puisse se déplacer, à partir de l'un quelconque de leurs points, dans une direction aussi voisine que l'on veut d'une direction donnée à l'avance.

Or, rien n'est plus aisé que d'obtenir ce résultat; voici l'un des moyens que l'on peut employer.

72. Désignons par $\varphi(n)$ une fonction quelconque de n , assujettie à la seule condition d'augmenter indéfiniment avec n , en n'étant jamais décroissante. Soit I_n le cercle qui a pour centre le point a_n et pour rayon $n^{\varphi(n)}$. Il est clair que chaque droite (D) ne rencontre qu'un nombre limité de cercles I_n , puisqu'il existe un nombre α tel qu'elle ne rencontre qu'un nombre limité de cercles $C_n^{(\alpha)}$ et qu'à partir d'une certaine valeur de n , on a certainement

$$\varphi(n) > \alpha + 1$$

de sorte que le cercle I_n est dès lors intérieur au cercle $C_n^{(\alpha)}$. On voit dès lors très aisément qu'il suffit de supposer:

$$|A_n| < e^{-e^{\varphi(n)}}$$

pour que la série

$$\sum \frac{A_n}{n^{\varphi(n)}}$$

définisse une fonction (M) sur chacune des droites (D), la fonction $\varphi(n)$ étant assujettie à la seule condition d'augmenter indéfiniment avec n , ce qui permet de négliger les facteurs constants qui la multiplieraient.

Conclusion.

73. Les recherches entreprises dans ce Mémoire peuvent être envisagées à deux points de vue, que l'on peut appeler brièvement le point de vue *complexe* et le point de vue *réel*.

Au point de vue de la théorie des fonctions d'une variable complexe, je me permettrai de rappeler que, dès 1894, j'ai signalé dans ma Thèse la nécessité qu'il y avait, à mon avis, à élargir la théorie du prolongement analytique. Malheureusement, je ne pouvais étayer cette opinion

que d'un trop petit nombre de faits, de sorte que je fus peut être le seul à être vraiment convaincu qu'elle était juste. L'an dernier, M. FABRY a émis des idées analogues dans les Comptes Rendus (t. 128) et M. PICARD y a publié aussi sur ce sujet quelques pages intéressantes; mais la manière dont il envisageait le problème était très différente de la mienne. J'espère que les résultats de ce Mémoire convaincront tous les lecteurs que la généralisation de la théorie du prolongement analytique s'impose nécessairement à l'attention des géomètres: l'observation attentive des faits analytiques y conduit naturellement; *on voit* la fonction analytique traverser, par des passages infiniment étroits, la coupure qui paraissait infranchissable.

Il serait superflu autant que prématuré de discuter ici l'importance que pourra prendre en analyse cette nouvelle théorie; il est, sans doute, inutile de dire que je n'ai jamais pensé que ces fonctions à singularités compliquées puissent devenir jamais aussi importantes que les fonctions analytiques les plus simples: polynômes, fonctions entières, méromorphes, algébriques, abéliennes. Mais leur étude ne devrait-elle servir qu'à élargir notre concept de la fonction de variable complexe, il me semble qu'elle ne serait pas inutile.

74. Au point de vue des variables réelles, nous avons appris à connaître une catégorie peut être intéressante de fonctions de variables réelles pourvues de dérivées de tout ordre: ce sont les fonctions (M) qui comprennent comme cas particulier les fonctions analytiques et qui, comme ces dernières, sont complètement déterminées lorsqu'on connaît, en un point, leur valeur et celles de leurs dérivées.

Il est clair que, pour les fonctions définies expérimentalement, la question de savoir si elles sont ou non analytiques est complètement dépourvue de sens; on peut les représenter avec une approximation supérieure aux erreurs d'expérience par une formule d'espèce quelconque, pourvu qu'elle renferme assez d'indéterminées. Mais certaines formes peuvent être préférables, c'est à dire donner avec moins d'indéterminées une approximation plus grande; le but des théories physiques est souvent de déterminer a priori ces formes, dont l'expérience permet ensuite de calculer les coefficients. Il est dès lors légitime de se demander s'il est préférable de prendre les premiers termes du développement en série d'une fonction ana-

lytique, ou d'une fonction (M), ou de toute autre catégorie de fonctions que l'on pourrait définir. En ce sens, la distinction entre ces diverses catégories peut ne pas rester spéculative, mais avoir des conséquences pratiques dans l'étude des phénomènes naturels.¹

75. Enfin signalons en terminant que, le théorème de M. MITTAG-LEFFLER pouvant être étendu² aux fonctions de plusieurs variables complexes, on peut leur étendre aussi la théorie des fonctions (M). En particulier, en nous bornant aux variables réelles, il existe des fonctions de deux variables réelles x et y , qui ne sont analytiques pour aucun système de valeurs de ces variables et qui sont cependant telles que la connaissance, *en un point*, de leur valeur et de la valeur de toutes leurs dérivées partielles, permet de former une série de polynômes convergeant uniformément, ainsi que toutes ses dérivées, dans toute région finie du plan, et représentant la fonction considérée dans tout le plan.

On peut dès lors se poser bien des questions, qui paraissent malheureusement difficiles à aborder. Par exemple, on peut, comme me l'a fait observer M. PAINLEVÉ, se demander si l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

dans laquelle $f(x, y)$ est une fonction (M) de ses deux arguments, définit pour y une fonction (M) de x , auquel cas la méthode de BRIOT et BOUQUET permet évidemment de calculer les dérivées successives de y par rapport à x et de former, par suite, le développement de y en série de polynômes.

Paris, le 17 mai 1900.

¹ J'ai déjà remarqué dans ma Thèse que le potentiel d'un corps de masse fini, qui serait formé d'une infinité de molécules, se présente sous la forme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\sqrt{(x-a_n)^2 + (y-b_n)^2 + (z-c_n)^2}}$$

c'est à dire sous une forme tout à fait analogue à celle des séries de fractions rationnelles que nous avons étudiées, puisque la série $\sum A_n$ est ici convergente.

² La possibilité de cette extension a été signalée tout d'abord par M. MITTAG-LEFFLER (Comptes Rendus, 5 mai 1899). Peu de temps après, M. PAINLEVÉ a indiqué une méthode de démonstration qui s'étend sans difficulté aux fonctions de plusieurs variables (Comptes Rendus, 23 mai 1899). M. MITTAG-LEFFLER développera prochainement (dans une quatrième Note) les résultats qu'il possède à ce sujet.

ADDITION AU MÉMOIRE
SUR LES SÉRIES DE POLYNOMES ET DE FRACTIONS RATIONNELLES

PAR

EMILE BOREL
A PARIS.

Pendant que le mémoire précédent était à l'impression, je me suis aperçu que l'hypothèse de la convergence *absolue* des séries de polynomes, sur laquelle sont fondées les démonstrations de la seconde et de la troisième partie, n'est pas indispensable. Je n'ai pas cru cependant devoir refondre le mémoire, car cette hypothèse rend les démonstrations très simples et fait bien voir par suite la véritable origine des propositions que nous avons établies.

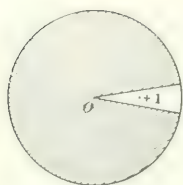
Je me contenterai de montrer, dans le cas le plus simple, comment la démonstration peut être conduite, en supposant simplement la convergence *uniforme*, sans la supposer *absolue*; le lecteur se convaincra sans peine que le même mode de démonstration permettrait d'établir, sous la seule hypothèse de la convergence *uniforme*, toutes les propositions démontrées dans le mémoire précédent, en supposant la convergence absolue et uniforme.

Soit

$$\frac{1}{1-z} = \sum_1^{\infty} P_n(z)$$

une série de polynomes *uniformément* convergente dans tout domaine fini ne traversant pas la coupure $[+1 \dots +\infty]$. Nous poserons

$$\sum_1^{\infty} P_n(z) = Q_n(z).$$



Soit D_q le domaine, couvert de hachures, limité par le cercle $|z| = 2$ et par les droites

$$\arg. \text{ de } z = \pm \frac{1}{2q^2}.$$

La série (1) convergeant uniformément dans le domaine D_q on peut trouver un nombre m tel que, quel que soit $n > m$ et z dans D_q , l'on ait

$$\left| \frac{1}{1-z} - Q_n(z) \right| < 1$$

Soit, d'autre part M_q la plus grande des quantités

$$\left| \frac{1}{1-z} - Q_n(z) \right|, \quad n = 1, 2, \dots, m$$

lorsque z est quelconque dans D_q (chacune de ces quantités est finie dans D_q). On aura, dès lors (en supposant $M_q > 1$), quel que soit z dans D_q et quel que soit n

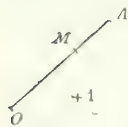
$$\left| \frac{1}{1-z} - Q_n(z) \right| < M_q.$$

Cela posé, prenons:

$$a_q = e^{2q\pi i \sqrt{z}}, \quad A_q = \frac{e^{-q}}{M_q}$$

et considérons la série

$$F(z) = \sum_1^{\infty} \frac{A_q}{1 - a_q z}$$



Désignons par D'_q le domaine qui se déduit de D_q en divisant par a_q l'afixe de chacun de ses points et soit OA un rayon de longueur 2 intérieur à tous les D'_q (il existe une infinité de tels rayons, la somme de la série convergente

$\sum \frac{1}{c^q}$ étant inférieure à 2π). En un point quelconque M

de OA , l'on a, ce point M étant intérieur à D'_q ,

$$\left| \frac{1}{1 - a_q z} - Q_n(a_q z) \right| < M_q$$

quel que soit n . Donnons à n une valeur fixe, la série

$$\sum A_q \left| \frac{1}{1 - a_q z} - Q_n(a_q z) \right|$$

est convergente, et il en est de même de la série

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left[\frac{A_q}{1 - a_q z} - A_q Q_n(a_q z) \right].$$

Mais la série

$$\sum \frac{A_q}{1 - a_q z}$$

est évidemment convergente sur OA . Il en est donc de même de la série

$$\sum_{q=1}^{\infty} A_q Q_n(a_q z)$$

dont nous désignerons la somme par

$$G_n(z).$$

$G_n(z)$ est un polynome de même degré que $Q_n(z)$, dont on aurait pu démontrer l'existence d'autres manières.

Nous allons montrer maintenant que $G_n(z)$ tend uniformément sur OA vers $F(z)$, en désignant par $F(z)$ la somme de la série, *uniformément convergente*¹ sur OA

$$F(z) = \sum \frac{A_q}{1 - a_q z}.$$

Soit ε un nombre positif arbitraire; déterminons un nombre p tel que l'on ait

$$\sum_{q=p+1}^{\infty} e^{-q} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

¹ On a supposé $A_q = \frac{e^{-q}}{M_q}$, $M_q > 1$, les termes de la série $F(z)$ sont donc sur OA , respectivement inférieurs à ceux de la série convergente

$$\sum 4q^2 e^{-q}$$

car, à l'intérieur du domaine D'_q , $|1 - a_q z|$ est supérieur à $\frac{1}{4q^2}$.

Il en résulte que l'on a, quel que soit le nombre entier n et quel que soit z sur OA

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{A_i}{1 - a_i z} - A_i Q_n(a_i z) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

puisque $A_i M_i = e^{-q}$.

Choisissons maintenant le nombre m de telle manière que l'on ait, quel que soit $n > m$ et quel que soit z sur OA

$$\left| \sum_{q=1}^{q=p} \frac{A_q}{1 - a_q z} - \sum_{q=1}^{q=p} A_q Q_n(a_q z) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cela est possible, puis que les $Q_n(a_q z)$ en nombre limité, tendent uniformément sur OA vers $\frac{1}{1 - a_q z}$.

On aura dès lors, quel que soit $n > m$ et quel que soit z sur OA

$$\left| \sum_{q=1}^n \frac{A_q}{1 - a_q z} - \sum_{q=1}^n A_q Q_n(a_q z) \right| < \varepsilon$$

c'est à dire

$$|F(z) - G_n(z)| < \varepsilon.$$

C. Q. F. D.

Remarques.

1°. La fonction analytique $F(z)$ que nous avons considérée a pour domaine d'existence le cercle de rayon 1. La même série de fractions rationnelles définit, au sens de WEIERSTRASS, une autre fonction analytique $F_1(z)$ dont le domaine d'existence est la région du plan extérieure au cercle.

2°. Si l'on pose

$$F(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} c_k z_k,$$

$$Q_n(z) = \sum_{k=0}^{k=n} c_k z_k,$$

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{k=n} \tilde{c}_k z_k,$$

on a évidemment

$$\gamma_{nk} = c_k c_{nk}.$$

3°. La même démonstration s'étendrait, sans modification essentielle aux dérivées de tous ordres d'un développement tel que $f(z)$; en choisissant convenablement les A_q , la série de polynomes converge en dehors du domaine d'existence, *ainsi que toutes ses dérivées*.

4°. Avec les valeurs particulières que nous avons prises pour les a_q , on prouverait aisément que toutes les droites issues de 0 et dont l'argument est commensurable avec π , sont des droites de convergence uniforme, à l'intérieur du cercle de rayon 2. Sur les parties de ces droites situées à l'extérieur du cercle de rayon un , la somme $G_n(z)$ de la série de polynomes est la fonction analytique $F_1(z)$.

St Paul, par Tournemire, Aveyron, le 4 septembre 1900.

SUR LA THÉORIE DES GROUPES

PAR

M. DUPORT

À DIJON.

Bien que la théorie des groupes continus de transformation ait fait l'objet de nombreux travaux, il ne semble pas que l'on soit arrivé encore au résultat final que comporte cette étude. Il résulte en effet du caractère fonctionnel des équations qui définissent un groupe que ce groupe doit forcément être cherché parmi des expressions précises renfermant des fonctions arbitraires, le cas le plus défavorable étant celui où ces expressions seraient les solutions d'un système précis d'équations aux dérivées partielles.

L'analyse suivante où je me suis borné au cas d'un groupe d'une variable et un paramètre fera bien comprendre la partie générale des considérations précédentes. Elle met en plus en évidence un fait nouveau; c'est l'existence de groupes continus n'admettant pas la substitution unité, malgré un changement de variable quelconque effectué sur le paramètre.

Il s'agit de trouver une fonction $y = f(x, a)$ telle que l'on ait

$$f[f(x, a), b] = f(x, c),$$

c étant une fonction de a et de b .

Or ce problème est un cas particulier du suivant: exprimer que les équations

$$\begin{aligned} y &= f(x, a), \\ f_1(y, b) &= F(x, c), \\ c &= \varphi(a, b) \end{aligned} \tag{1}$$

se réduisent à deux.

On a

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial a} da,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial b} db = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial c} dc,$$

$$dc = \frac{\partial \varphi}{\partial a} da + \frac{\partial \varphi}{\partial b} db;$$

on en tire

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} \left[\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial a} da \right] + \frac{\partial f_1}{\partial b} db = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial c} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial a} da + \frac{\partial \varphi}{\partial b} db \right],$$

d'où séparément

$$(2) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial c} \frac{\partial \varphi}{\partial a}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial b} = \frac{\partial F}{\partial c} \frac{\partial \varphi}{\partial b}.$$

Ces équations (2) doivent encore rentrer dans (1).

On en tire

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial c}} \cdot \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial a}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial a}}$$

ou bien, en prenant les logarithmes

$$R(x, c) + S(a, b) = T(x, a).$$

Si on suppose dans cette équation c remplacé par sa valeur en a et b , elle doit devenir une identité. On en tire donc

$$\frac{dR}{dx} = \frac{dT}{dx}.$$

Cette équation ne contenant que x , a et c doit être une identité. On aura donc

$$R = A(x) + B(c),$$

$$T = A(x) + D(a)$$

d'où

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial c}} = M(c)N(x), \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial a}} = P(a)N(x).$$

On en tire

$$f(x, a) = \varphi[H(x) + K(a)], \quad F(x, c) = \phi[H(x) + L(c)].$$

Les équations (1) peuvent alors être remplacées par les suivantes

$$\begin{aligned} (3) \quad & H(x) + K(a) - Q(y) = 0, \\ & H(x) + L(c) + F_1(y, b) = 0, \\ & c = \varphi(a, b). \end{aligned}$$

En retranchant la première de la seconde, on a

$$(4) \quad F_1(y, b) + Q(y) + L(c) - K(a) = 0.$$

Si on suppose dans cette équation, c remplacé par sa valeur en a et b , elle doit être une identité; on a donc

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(y, b) + Q'(y) = 0$$

d'où

$$F_1(y, b) = -Q(y) - D(b)$$

et l'équation (4) devient

$$-D(b) + L(c) - K(a) = 0,$$

et doit être équivalente à

$$c = \varphi(a, b).$$

En résumé le système (1) est équivalent aux équations suivantes

$$\begin{aligned} (5) \quad & H(x) + K(a) - Q(y) = 0, \\ & -Q(y) - D(b) + H(x) + L(c) = 0, \\ & -D(b) + L(c) - K(a) = 0 \end{aligned}$$

qui se réduisent bien à deux.

Supposons maintenant que de plus f , f_1 et F soient la même fonction des deux variables dont elles dépendent.

Il sera nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\varphi[H(y) + K(b)] = \varphi[H(x) + K(c)],$$

φ étant, on se rappelle, la fonction inverse de Q .

Cette équation peut s'écrire

$$(6) \quad \varphi[H(y) + K(b)] = \varphi[Q(y) + K(c) - K(a)].$$

D'après cette équation, il faut d'abord que

$$K(c) - K(a)$$

soit une fonction de b . Donc l'équation

$$K(c) = K(a) + O(b).$$

doit être identique à

$$L(c) = K(a) + D(b)$$

On en tire

$$L(c) = K(c) - \alpha,$$

$$O(b) = D(b) + \alpha$$

α étant une constante. L'équation (6) devient

$$\varphi[H(y) + K(b)] = \varphi[Q(y) + D(b) + \alpha].$$

On en tire

$$\frac{H'(y)}{Q'(y)} = \frac{K'(b)}{D'(b)} = \beta$$

puis

$$H(y) = \beta Q(y) + \gamma,$$

$$K(b) = \beta D(b) + \delta$$

β , γ , δ étant de nouvelles constantes. Les équations (5) se réduisent à

$$Q(y) = \beta Q(x) + \gamma + \beta D(a) + \delta,$$

$$\beta D(c) - \alpha = \beta D(a) + D(b)$$

et l'équation (6) devient

$$\varphi[\beta Q(y) + \gamma + \beta D(b) + \delta] = \varphi[Q(y) + D(b) + \alpha].$$

Si on pose

$$z = Q(y) + D(b) + \alpha$$

cette équation devient

$$\varphi(\beta z + \gamma + \delta - \alpha\beta) = \varphi(z);$$

$\gamma + \delta$ peut être remplacé par une seule constante α' ; on peut faire un changement de paramètre de façon à poser

$$D(a) = \alpha', \quad D(b) = \beta', \quad D(c) = c'$$

et les équations d'un groupe à un paramètre et une variable peuvent s'écrire

$$Q(y) = \beta[Q(x) + \alpha'] + \alpha',$$

$$\beta c' = b' + \beta \alpha' + \alpha.$$

Dans ces équations la fonction φ inverse de Q satisfait à l'équation

$$\varphi(\beta z + \alpha' - \alpha\beta) = \varphi(z).$$

Les cas les plus remarquables sont:

$$1^\circ \quad \beta = 1, \quad \alpha' = \alpha = 0;$$

on a la solution connue jusqu'ici où la fonction Q est complètement arbitraire.

$$2^\circ \quad \beta = -1, \quad \alpha' = \alpha = 0$$

la fonction φ inverse de Q doit être paire.

Dans le cas général la solution peut, ainsi que me l'a fait remarquer M. E. PICARD, s'écrire

$$Q(y) = Q_1(x) + \lambda,$$

Q et Q_1 étant deux déterminations d'une fonction z satisfaisant à l'équation

$$\varphi(z) = \varphi(mz + n),$$

m et n étant deux constantes arbitraires, λ étant le paramètre.

CHARLES HERMITE.

La mort de CHARLES HERMITE, survenue le 14 janvier dernier, a fait un grand vide dans le monde des mathématiciens. C'est qu'en effet, jusqu'au dernier moment, la plume infatigable d'Hermite n'avait cessé de produire et que toutes les publications sorties de sa main laborieuse continuaient à porter cet inimitable cachet d'élégance algébrique qui distinguait toujours ses ouvrages. Mais c'est surtout qu'aucun mathématicien n'a entre-tenu comme lui des relations toutes personnelles avec un si grand nombre d'autres. Son énorme correspondance embrassait tous les pays où les mathématiques sont en honneur. Mathématiciens jeunes et vieux, distingués ou insignifiants, ces derniers pourvu qu'il les crût animés du véritable amour de notre science, tous trouvaient dans le vénérable vieillard un ami et un conseiller paternel, toujours prêt à accueillir avec un enthousiasme sincère toute communication qui lui paraissait contenir, si peu importante fût-elle, quelque pensée neuve.

L'œuvre mathématique d'Hermite sera retracée dans le prochain numéro par la plume la plus autorisée, celle de M. E. PICARD, le successeur immédiat d'Hermite dans cette chaire de la Sorbonne que les mathématiciens ont été habitués, durant les trente années qu'Hermite l'occupa, à regarder comme un des premiers centres du travail mathématique contemporain.

Si les mathématiques ont atteint de nos jours dans la patrie d'Hermite un développement aussi remarquable tant par l'importance des ouvrages publiés que par le nombre considérable des travailleurs scientifiques, il faut sans aucun doute en attribuer, pour une très grande part, le mérite à Charles Hermite, à ses conférences, à son enseignement et à son ascendant personnel. Cette revue a eu l'avantage de compter Hermite, comme aussi WEIERSTRASS,

pour l'un de ses fondateurs, et depuis lors elle a toujours eu en lui un de ses principaux protecteurs, qui nous a prêté en plus d'une occasion le plus énergique et le plus indispensable appui.

Hermite était né à Dieuze (Lorraine) le 24 décembre 1822; il est mort à Paris le 14 janvier de cette année. Il fut nommé professeur à l'Ecole Normale Supérieure en 1862, professeur à l'Ecole Polytechnique en 1867, et occupa la chaire d'Algèbre supérieure à la Sorbonne de 1869 à 1897. Il était entré à l'Institut en 1856. Tels sont les traits extérieurs d'une vie qui fut entièrement consacrée à la science et dont les dates marquantes se confondent, pour le reste, avec celles de ses découvertes scientifiques.

Il est à espérer qu'on ne tardera pas à voir paraître le recueil de toutes les publications mathématiques d'Hermite. Alors seulement on pourra juger combien il fut grand, et ce sera le plus beau monument qu'on puisse élever à sa mémoire.

L'honneur et l'avantage de réaliser cette publication qui intéresse l'humanité entière reviennent à la France.

Stockholm, mars 1901.

Mittag-Leffler.

ACTA
MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

JOURNAL

HERAUSGEGEBEN

RÉDIGÉ

VON

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

24

STOCKHOLM

BEIJERS BOKFÖRLAGSAKTIEBOLAG

1901.

CENTRALTRYCKERIET, STOCKHOLM.

BERLIN

MAYER & MÜLLER.

VERLAG VON J. NEUBAUER

PARIS

A. HERMANN

5 RUE DE LA SORBONNE

REDACTION

SVERIGE:

A. V. BÄCKLUND, Lund.
A. LINDSTEDT, Stockholm.
G. MITTAG-LEFFLER, »
E. PHRAGMÉN, »

NORGE:

C. A. BJERKNES, Christiania.
ELLING HOLST, »
S. LIE, Leipzig.
L. SYLOW, Fredrikshald.

DANMARK:

J. PETERSEN, Kjöbenhavn.
H. G. ZEUTHEN, »

FINLAND:

L. LINDELÖF, Helsingfors.

INHALTSVERZEICHNISS. — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 24. — 1901. — TOME 24.

	Seite. Pages.
BENDIXSON, IVAR. Sur les courbes définies par des équations différentielles	1— 88
BOREL, EMILE. Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles	309—382
BOREL, EMILE. Addition au mémoire sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles	383—388
DUPORT, M. Sur la théorie des groupes	389—394
HORN, J. Über die asymptotische Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen	289—308
HOUGH, S. S. On certain discontinuities connected with periodic orbits	257—288
VON KOCH, HELGE. Sur quelques points de la théorie des déterminants infinis	89—122
VON KOCH, HELGE. Sur la distribution des nombres premiers	159—182
LIPSCHITZ, R. Nachweis des Zusammenhanges zwischen den vier Drehungsachsen einer Lagenänderung eines orthogonalen Systems und einem Maximumstetraeder	123—158

Inhaltsverzeichnis. — Table des matières.

	Seite. Pages.
MAILLET, EDMOND. Sur les équations indéterminées de la forme $x^k + y^k = cz^k$	247—256
MITTAG-LEFFLER, G. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. (Seconde note)	183—204
MITTAG-LEFFLER, G. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. (Troisième note)	205—244
MITTAG-LEFFLER, G. Charles Hermite	395—396
PRINGSHEIM, ALFRED. Erklärung	245—246

QA

1

Acta mathematica

A2575

v. 23-24

Physical Sci.

Applied Sci.

Senale

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

121 F/6

